Министерство образования и науки Кыргызской Республики
Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына
Научно-исследовательский центр Навье-Стокса

Т.Д. Омуров

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКОСТЬЮ

Шестая проблема тысячелетия

Бишкек - 2011

УДК 532.5.516(04);[517.9]
ББК 22.253
О – 57

Омуров Т.Д.
Нестационарная задача Навье-Стокса для жидкости
О – 57 с вязкостью/ КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2011. –116 с.

ISBN 978 – 9967 – 02 – 759 – 6

Доказательство существования и гладкости решений уравнений Навье-Стокса является шестой задачей тысячелетия. Задача сформулирована Математическим институтом Клэя в 2000 году и описывает движение вязкой ньютоновской жидкости, которая является основой гидродинамики. В работе дано доказательство существования и гладкости решений нестационарной задачи Навье-Стокса с вязкостью.

Библиогр. 11 назв.

Основное содержание работы зарегистрировано в Кыргызпатенте: Сектор объектов авторского права, авторское свидетельство №1543 от 30.07.2010 года.

Ответственный редактор:

д-р. физ.-мат. наук Каракеев Т.Т.

Рецензенты:

д-р. техн. наук,академик НАН КР Шаршеналиев Ж.Ш.
д-р. физ.-мат. наук, проф. Саадабаев А.С.
д-р. физ.-мат. наук, проф. Туганбаев У.М.

О 1603040000 – 11

УДК 532.5.516(04);[517.9]
ББК 22.253
ISBN 978 – 9967 – 02 – 759 – 6

Оглавление

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- R^3 – действительное 3-мерное пространство с евклидовым расстоянием;
- $x \in R:$ x - принадлежит множеству R;
- $\forall x$ – любое значение x;
- C_i – произвольная постоянная $i = \overline{1,3}$;
- ρ – плотность;
- $\mu > 0$ – кинематическая вязкость; $\rho^{-1} A_\tau = \varepsilon$ – кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости: $\mu = \rho^{-1} \nu$ ламинарного течения (A_τ-коэффициент турбулентного обмена, ν-коэффициент вязкости);
- $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}, y, z, t)$ – внешняя сила $i = \overline{1,3}$;
- $P(x, y, z, t)$ – давление;
- ∇ – оператор набла;
- Δ – оператор Лапласа, т.е. лапласиан $\nabla \cdot \nabla$;
- $div v = 0, v = (v_1, v_2, v_3), (v_{1x} + v_{2y} + v_{3z} = 0)$ (условие соленоидальности вектора v;
- $rot v = 0, v = (v_1, v_2, v_3)$ (условие потенциальности или безвихревости поля векторов v);
- L_{H_0} – коэффициент Липшица оператора H_0;
- $C(T)$ - Банахово пространство непрерывных функций на T с нормой $\|u\|_C = \max\limits_{(x,y,z,t)\in T} |u(x,y,z,t)|, T = R^3 \times [0, T_0]$;
- $C^{3,3,3,0}(T)$ – пространство функций $u(x,y,z,t)$, имеющих непрерывные частные производные 3-го порядка по *(x,y,z)*, причем

$$\|u\|_{C^{3,3,3,0}(T)} = \sum_{0 \le |k| \le 3} \|D^k u\|_{C(T)}, \ (C^{3,3,3,0}(T) \equiv C^3(T)),$$

где $k = (k_1, k_2, k_3)$ - мультииндекс,

$$k = 0: D^0 u(x,y,z,t) \equiv u; k \ne 0: D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}}, |k| = \sum_{m=1}^{3} k_m, (k_m = 0,1,2,3; m = \overline{1,3});$$

- $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$ –пространство функций $u(x,y,z,t)$, имеющих непрерывные частные производные 3-го порядка по *(x,y,z)* и производную 1-го порядка по t при этом

$$\begin{cases} \|u\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le 3} \|D^k u\|_{C(T)} + \|u_t\|_{C(T)}; \tilde{C}^{3,1}(T) \equiv \tilde{C}^{3,3,3,1}(T) = \{(x,y,z,t) \in T : \\ D^k u \in C(T); u_t \in C(T)\}, k = 0 : D^0 u(x,y,z,t) \equiv u; \\ k \ne 0 : D^k u = \dfrac{\partial^{|k|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}}; |k| = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i, (\alpha_i = 0,1,2,3; i = \overline{1,3}), \end{cases}$$

а $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$ отличается от пространства $C^{3,3,3,1}(T)$ тем, что не содержит члены со смешанными производными, учитывающие производные 1-го порядка по t (производные по t содержатся отдельно);

- $L^2_{\lambda\Omega}[T = R^3 \times (0,T_0)]$ − линейное пространство всех измеримых функций $U(x,y,z,t)$ с весом $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, где

$$0 \le \lambda(t) : \int_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0 < +\infty; 0 \le \Omega : \int_{R^3} \Omega(x,y,z)dxdydz = 1,$$

если, например: $\Omega(x,y,z) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \exp[-(x^2+y^2+z^2)],$ причем

$$\|U\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} = \Big(\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|U(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt\Big)^{\frac{1}{2}};$$

- D_i − оператор типа Вольтерра;
- ϑ_0 − начальное приближение;
- ε − малый положительный параметр: $0 < \varepsilon < 1$;
- $a(t) \ge 0$ − неотрицательная интегрируемая функция в $R_+ = [0,+\infty)$;
- [1],…, [11] - основная литература; [1*],…, [12*] – дополнительная литература;
- $C_3\ (T) \ni v(x,y,z,t)$ − заданная векторная функция: $v = (v_1, v_2, v_3)$.
- Если выполняется

$$\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|v_{it}(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, (i = \overline{1,3}),$$

то $v_i \in G^2_{\lambda\Omega}(T), (i = \overline{1,3})$, при этом норма: $\|v\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3} \|v_i\|_{\tilde{D}^2_{(v_i;\lambda\Omega)}(T)}$, где

$$\begin{cases} \|v_i\|_{\tilde{D}^2_{(v_i;\lambda\Omega)}(T)} = \|v_i\|_{C^{3,3,3,0}(T)} + \|v_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)}, i = \overline{1,3}; \\ \tilde{D}^2_{(v_i;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : v_i \in C^{3,3,3,0}(T); v_{it} \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)], \\ 0 \le \lambda(t) : \int_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0 < +\infty; 0 \le \Omega : \int_{R^3} \Omega(x,y,z)dxdydz = 1\}, i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Пусть

$$\sum_{0\le|k|\le 3}(\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k\prod(x,y,z,t)]^2 dxdydzdt)+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times$$

$$\times\left|\prod_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K_0 < +\infty,$$

тогда

$$\prod\in W^2_{\lambda\Omega}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: D^k\prod\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right],\prod_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right]\},$$

$$k=0: D^0\prod(x,y,z,t)\equiv\prod; k\ne 0: D^k\prod=\frac{\partial^{|k|}\prod}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}, |k|=\sum_{m=1}^{3}k_m, (k_m=0,1,2,3; m=\overline{1,3}),$$

а норма

$$\|\prod\|_{W^2_{\lambda\Omega}(T)}=\{\sum_{0\le|k|\le 3}(\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k\prod(x,y,z,t)]^2 dxdydzdt)+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times$$

$$\times\left|\prod_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt\}^{\frac{1}{2}},$$

где $W^2_{\lambda\Omega}(T)$ - весовое пространство типа Соболева.

Предисловие

В данной работе исследуется нестационарная задача Навье-Стокса для несжимаемой и сжимаемой жидкости с вязкостью.

Основной целью работы, является доказательство существования, единственности и условной гладкости решения задачи Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в $G_{\lambda}^{2}(T)$, $G_{\lambda\Omega}^{2}(T)$ или $\bar{D}_{\lambda\Omega}^{2}(T)$ [или гладкости в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,1}(T)$].

Более точно проведены обоснования метода эквивалентного раздробления системы и развита теория о принадлежности решений к конкретным пространствам с весовыми функциями. Рассматривается предельный случай очень малой вязкости в $G_{\lambda\Omega}^{2}(T)$.

Далее, обосновывается справедливость асимптотического разложения, которое позволяет построение решений $u_{\mu},\upsilon_{\mu},w_{\mu}$ в $\bar{D}_{\lambda\Omega}^{2}(T)$. При этом изучены особенности решений исследуемых уравнений и методы их построения, и ограниченности в весовых пространствах $\bar{D}_{\lambda\Omega}^{2}(T)$. В условиях асимптотического разложения при обращении параметра $\mu\to 0$ доказывается, что решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в смысле $\bar{D}_{\lambda\Omega}^{2}(T)$.

Полученные результаты обобщены к интегро-дифференциальным уравнениям Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью в $\bar{D}_{\lambda\Omega}^{2}(T)$.

В главе 4 изучена нестационарная задача Навье-Стокса для сжимаемого вязкого течения изотермического изменения состояния в $G_{\lambda\Omega}^{2}(T)$, где определяются неизвестные величины: скорость $v=(u,\upsilon,w)$, $P-$ давление, $\rho-$ плотность.

Введение

Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса – одна из проблемных математических задач тысячелетия, сформулированных в 2000 году Математическим институтом Клэя [1].

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ – трёхмерный вектор скорости жидкости, $x=(x,y,z)$, $P(x,t)$ –давление. Уравнения Навье-Стокса в векторной форме имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=\frac{1}{\rho}\nabla P+\mu\Delta\mathbf{v}+f(x,t) \tag{1}$$

с условием

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\big|_{t=0}=v^0(\mathbf{x}),\ \forall \boldsymbol{x}\in R^3,\ t\in[0,T_0],(t\in R_+=[0,+\infty)), \tag{2}$$

где $\mu>0$ – кинематическая вязкость, ρ– плотность, $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ – внешняя сила, ∇ – оператор набла и Δ – оператор Лапласа, т.е. лапласиан $\nabla\cdot\nabla$. Векторное уравнение (1) содержит три скалярных уравнения. Обозначая компоненты векторов скорости и внешней силы

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=[v_1(\mathbf{x},t),v_2(\mathbf{x},t),v_3(\mathbf{x},t)],$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=[f_1(\mathbf{x},t),f_1(\mathbf{x},t),f_1(\mathbf{x},t)],\ \ i=1,2,3,$$

получаем соответствующие скалярные уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}+\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}+f_i\ .$$

Неизвестными величинами являются скорость $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ и давление P, т.е. четыре неизвестных: три компоненты скорости и давление, поэтому необходимо еще одно уравнение. Дополнительным уравнением является условие несжимаемости жидкости

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0\,. \tag{3}$$

На основе разработанных методов работы решается нестационарная задача Навье-Стокса для сжимаемого течения с вязкостью изотермического изменения состояния [2]:

$$\begin{cases}\rho[\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\sum\limits_{j=1}^{3}v_j\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}]=f_i-\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+F_i(v_1,v_2,v_3,\mu),i=\overline{1,3},\\ F_1\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1})]+\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1})],\\ F_2\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2})]+\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1})],\\ F_3\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(2\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3})]+\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2})],\end{cases} \tag{4}$$

$$\rho_t + \sum_{i=1}^{3} (\rho v_i)_{x_i} = 0, \tag{5}$$

$$P - \rho RT = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\big|_{t=0} = v^0(\mathbf{x}), \forall x \in R^3, t \in [0,T_0], \\ \rho\,\big|_{t=0} = \rho_0(x), \forall x \in R^3, t \in [0,T_0]. \end{cases} \tag{7}$$

Неизвестные величины являются: скорость $v = (v_1, v_2, v_3)$, P – давление, ρ – плотность, а T, μ – считаются известными, где T – абсолютная температура, соотношение $\mu(T)$, связь между коэффициентом вязкости μ и температурой T (здесь зависимостью вязкости от давления обычно не учитывает).

Численные решения задачи Навье-Стокса используются во многих практических приложениях, но в аналитическом виде решения найдены лишь в некоторых частных случаях. Однако, известны некоторые частные решения, например, для ламинарного течения в трубе или для течений в пограничном слое [2]. Эти частные решения хорошо совпадают с экспериментальными результатами, что вряд ли можно сомневаться в общей применимости уравнений Навье-Стокса. Поэтому в физическом смысле вывод уравнений Навье-Стокса не входит в нашу задачу, так как имеется огромное количество фундаментальных работ, отражающие эти вопросы [2,6,8,…].

Глава 1

Краткий обзор по исследуемым задачам и математическим понятиям, применяемым в работе

В основном работа состоит из четырех глав.

В первой главе приводятся основные методы и пространства, которые используются для изучения нестационарной задачи Навье-Стокса, и далее дается краткое содержание изучаемых задач.

В главе 2 изучается задача Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью [1,2]. Результаты исследований получены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ и $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

Целью главы 3 является асимптотическое разложение решения нестационарной задачи Навье-Стокса с вязкостью [1] и доказательство ограниченности решений в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. При условиях асимптотического разложения, когда $\mu \to 0$ доказывается, что решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В главе 4 доказываются единственность и условно-гладкость решения нестационарной задачи Навье-Стокса для сжимаемой жидкости с вязкостью изотермического изменения состояния [2] в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§1.1. Обзор по уравнениям теплопроводности и Пуассона в неограниченной области. Преобразование Фурье

§1.1.1. Уравнение распространения тепла [5].

I. Фундаментальное решение. Рассмотрим уравнение со многими независимыми переменными

$$\frac{1}{a^2}u_t + f = \Delta u, \tag{1.1.1}$$

определяющее температуру в точках некоторого однородного изотропного тела. Замена переменного t по формуле $t_1 = a^2 t$ позволяет избавиться от коэффициента a^2, то в дальнейшем изложении считаем a^2 равным единице. Тогда

$$u_t + f = \Delta u, T = R^3 \times (0, T_0). \tag{1.1.2}$$

Рассмотрим задачу о распространении тепла в неограниченной среде с условием Коши

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y,z), \forall (x,y,z) \in R^3. \tag{1.1.3}$$

Это означает, что в начальный момент времени распределение температур в теле известно. При этом основную роль играет одно частное решение однородного уравнения теплопроводности, называемое фундаментальным.

Пусть

$$v = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 (t-s)^3}} exp(-\frac{r^2}{4(t-s)}), \tag{1.1.4}$$

где $r = \sqrt{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 + (z-s_3)^2}$. При этом имеют место:

Лемма 1.1.1. Функция v удовлетворяет уравнениям

$$\Delta_0 v - \frac{dv}{dt} = 0, \Delta v + \frac{dv}{ds} = 0, \tag{1.1.5}$$

здесь $\Delta_0 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$.

Лемма 1.1.2. Если $t > s$, то имеет место равенство

$$\int_{R^3} v ds_1 ds_2 ds_3 = 1. \tag{1.1.6}$$

При доказательстве этой леммы учитывается: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2 d\tau} = \sqrt{\pi}$.

Лемма 1.1.3. Пусть $F(x,y,z)$ – произвольно-непрерывная и ограниченная функция в области Ω (в частности, Ω может совпадать со всем пространством). Тогда

$$\frac{1}{8\sqrt{\pi^3}\xi^3} \int_{\Omega} exp(-\frac{r^2}{4\xi}) F(s_1,s_2,s_3) ds_1 ds_2 ds_3 \xrightarrow[\xi \to 0]{} F(x,y,z), \tag{1.1.7}$$

если точка $(x,y,z) \in \Omega$. (В формуле (1.1.7) стремление к пределу равномерное по отношению к (x,y,z) во всякой конечной области Ω_1, лежащей внутри Ω вместе со своей границей).

II. Решение задачи Коши (1.1.2), (1.1.3). Пусть при $t > 0$ задана некоторая функция u, имеющая непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно по x, y, z и производную

1-го порядка по времени. Кроме того, пусть функция u и ее первые производные ограничены во всем пространстве.

Применим формулу Грина к функциям u,v для значений $t: 0 \le \tau < t,$ (v-есть частное решение уравнения теплопроводности и определяется в виде (1.1.4), причем за область интегрирования берем

шар Ω, ограниченный сферой S), получим

$$\int_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)d\Omega = \int_{S}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})dS\,, \tag{1.1.8}$$

где $\frac{\partial v}{\partial n}$ обозначена нормальная производная функция v. Она равна проекции вектора $\operatorname{grad} v$ с составляющими $\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial z}$ на направление внутренней нормали.

С другой стороны, отметим, что интеграл вида

$$\int_{0}^{t}\int_{\Omega} vF(x,y,z,\tau)d\Omega d\tau \tag{1.1.9}$$

абсолютно сходится, если F – непрерывно-ограниченная функция.

Предположим, что $f(x,y,z,t),\ u_0(x,y,z)$ – непрерывно-ограниченные функции. Тогда имеем

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 t^3}}\int_{R^3} exp(-\frac{r^2}{4t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 - \int_{0}^{t}\int_{R^3} exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\times$$

$$\times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3} f(s_1,s_2,s_3,\tau)ds_1ds_2ds_3d\tau, \tag{1.1.10}$$

здесь гладкость решений требуются по пространственным координатам, (1.1.10) – это решение задачи Коши (1.1.2), (1.1.3).

§1.1.2. Уравнения Пуассона в неограниченной области.

Рассмотрим уравнение Пуассона [5]

$$\Delta J = -4\pi F_0\,. \tag{1.1.11}$$

В работе Соболева С.Л. [5] указано, что функция

$$J = \int_{R^3} F_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \tag{1.1.12}$$

$r = \sqrt{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 + (z-s_3)^2}$, J – решение (1.1.11), стремящееся к нулю на бесконечности, и называется ньютоновым потенциалом, а функция F_0 называется плотностью этого потенциала. При этом были доказаны [5]:

а) стремление к нулю функции J на бесконечности;

б) что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона;

в) одновременно доказано существование непрерывных первых и вторых производных у ньютонова потенциала.

Введем новые переменные: $s_1 = x + \xi,\ s_2 = y + \eta,\ s_3 = z + \tau$, чтобы доказать существование и непрерывность вторых производных. Тогда из интеграла (1.1.12), получим

$$J_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{R^3} F_0\,(s_1, s_3, s_3, t)\frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}\right) = \int_{R^3} F_0\ \frac{(s_1 - x)ds_1 ds_2 ds_3}{r^3} =$$

$$= \int_{R^3} \xi \frac{F_0\,(x+\xi, y+\eta, z+\tau, t)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\tau^2)^3}}. \qquad (1.1.13)$$

Аналогично, имеем

$$\begin{cases} J_y = \int_{R^3} \eta \dfrac{F_0(x+\xi, y+\eta, z+\tau, t)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\tau^2)^3}}, \\ J_z = \int_{R^3} \tau \dfrac{F_0(x+\xi, y+\eta, z+\tau, t)d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\tau^2)^3}}. \end{cases} \qquad (1.1.14)$$

Отсюда видно, что (1.1.13), (1.1.14) можно дифференцировать по $x,y,z,$ причем интегралы от производных будут сходиться равномерно.

§1.1.3. Преобразование Фурье в R^3. Рассмотрим множество $Q(R^3)$ быстро убывающих функций на R^3:

$$Q(R^3) = \{ f \in C^\infty(R^3); \sup_{x \in R^3}\left|x^\alpha D^k f\right| < +\infty \}; \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_j \ge 0,$$

$$k = (k_1, k_2, k_3), k_j \ge 0; D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}}, |k| = \sum_{j=1}^{3} k_j; k = 0 : D^0 f \equiv f.$$

При $f \in Q(R^3)$ преобразование Фурье $F(s), s \in R^3, s = (s_1, s_1, s_1)$ определяется формулой

$$F(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int_{R^3} e^{i(x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \qquad (1.1.15)$$

а обратное преобразование Фурье

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(x_1s_1+x_2s_2+x_3s_3)}F(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 . \qquad (1.1.16)$$

I. Если $f(x_1,x_2,x_3)$ абсолютно интегрируема в R^3, то функция (1.1.15) непрерывна в R^3 и стремится к нулю при $\pm\infty$ по совокупности аргументов.

II. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{R^3}\left|f_n(x_1,x_2,x_3)-f(x_1,x_2,x_3)\right|dx_1dx_2dx_3=0,$

то $\lim\limits_{n\to\infty}F_n=F$, (где F_n,F являются преобразованиями Фурье функций $f_n,$ соответственно f), причем F_n равномерно сходится к непрерывной функции $F,\forall s\in R^3$.

§1.2. Основные пространства, применяемые в работе для исследования нестационарных задач Навье-Стокса

§1.2.1. Решение многих задач теоретической и математической физики, связанных с изучением процессов теплопроводности, взаимодействия излучения с веществом, распространения электромагнитных и звуковых волн, разработка теории ядерных реакторов и внутреннего строения звезд приводит к использованию различных специальных весовых пространств [11*,12*,…].

Если задача Навье-Стокса:

$$\upsilon_{it}+\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\upsilon_{ix_j}=f_i-\frac{1}{\rho}P_{x_i}+\mu\Delta\upsilon_i,i=\overline{1,3}, \qquad (1.2.1)$$

$$\nabla\cdot\upsilon=0, \qquad (1.2.2)$$

$$\upsilon(x,t)\big|_{t=0}=\upsilon^0(x),x\in R^3,t\in\left[0,T_0\right] \qquad (1.2.3)$$

решается в классе $G^0(T)$, где

$G^0(T)=\{\ (x_1,x_2,x_3,t)\in T=R^3\times\left[0,T_0\right]:\upsilon_i\in C^{3,3,3,0}(T)\equiv C^{3,0}(T),(i=\overline{1,3}),$

а производные 1-го порядка во времени: $\upsilon_{it},(i=\overline{1,3})$ определяются для $t>0$ при заданных начальных условиях: $\upsilon_i\big|_{t=0}=\upsilon_i^0,i=\overline{1,3},$ гладкости функций $\upsilon_i,(i=\overline{1,3})$ в $G^0(T)$, требуются только по $(x_1,x_2,x_3)\}$, то при условии

$$\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)\left|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)\right|^2dx_1dx_2dx_3dt\le K<+\infty,i=\overline{1,3}, \qquad (1.2.4)$$

решение задачи Навье-Стокса $\upsilon=[\upsilon_1(x,t),\upsilon_2(x,t),\upsilon_3(x,t)]\in G^2_{\lambda\Omega}(T)$ и норма пространства $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ определяется в виде

$$\|v\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\sum_{i=1}^{3}\|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)}, \tag{1.2.5}$$

где

$$\begin{cases}\|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)}=\|\upsilon_i\|_{C^{3,3,3,0}(T)}+\|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}},(i=\overline{1,3}),\\ \|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}}=(\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)|^2dx_1dx_2dx_3dt)^{\frac{1}{2}},(i=\overline{1,3}),\\ \tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)=\{(x_1,x_2,x_3,t)\in T=R^3\times[0,T_0]:\upsilon_i\in C^{3,3,3,0}(T);\\ \upsilon_{it}\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,T_0)]\},\\ v=(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)\in G^2_{\lambda\Omega}(T)=\{(x_1,x_2,x_3,t)\in T=R^3\times[0,T_0]:\\ \upsilon_i\in C^{3,3,3,0}(T),(i=\overline{1,3});\upsilon_{it}\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,T_0),i=\overline{1,3}]\},\end{cases} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{cases}0\le\lambda(t):\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt=q_0<+\infty;0\le\Omega:\int\limits_{R^3}\Omega(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3=1,\\ f_i\in C^{4,0}(T=R^3\times[0,T_0]),C^{4,0}(T)\equiv C^{4,4,4,0}(T),i=\overline{1,3},\\ \upsilon_i^0\in C^3(R^3),(i=\overline{1,3}),C^{3,3,3}(R^3)\equiv C^3(R^3).\end{cases} \tag{1.2.7}$$

Если

$$\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in R^3}\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)|^2dt\le K<+\infty,i=\overline{1,3}, \tag{1.2.8}$$

то функции $\upsilon_{it},(i=\overline{1,3})$ рассматриваются в $L^2_\lambda(0,T_0)$ с условиями: $\upsilon_i\big|_{t=0}=\upsilon_i^0$.
Следовательно:
$G^0[T=R^3\times[0,T_0];\lambda(t)]\equiv G^2_\lambda(T)=\{(x_1,x_2,x_3,t)\in T:\upsilon_i\in C^{3,3,3,0}(T),i=\overline{1,3};$
$\upsilon_{it}\in L^2_\lambda(0,T_0),i=\overline{1,3},$ где $\upsilon_{it},(i=\overline{1,3})$ непрерывные и ограниченные функции по $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$; $0\le\lambda(t):\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt=q_0<+\infty\}$:

$$\begin{cases}\|\upsilon\|_{G^2_\lambda(T)}=\sum_{i=1}^{3}\|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda)}(T)};\|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda)}(T)}=\|\upsilon_i\|_{C^{3,0}(T)}+\|\upsilon_{it}\|_{L^2_\lambda},i=\overline{1,3},\\ \|\upsilon_{it}\|_{L^2_\lambda}=(\sup_{(x_1,x_2,x_3)\in R^3}\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)|^2dt)^{\frac{1}{2}},i=\overline{1,3}.\end{cases} \tag{1.2.9}$$

Пусть функции f_i, υ_i^0 удовлетворяют условия:

1) $f_i \in C^{3,0}(T = R^3 \times [0,T_0]), C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T), i = \overline{1,3},$

2) $\upsilon_i^0 \in C^2(R^3), (i = \overline{1,3}), C^2(R^3) \equiv C^{2,2,2}(R^3),$

которые требуются, как необходимые условия решения системы Навье-Стокса (1.2.1) с трением. При этом решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) можно искать в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Здесь $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ имеют частные производные 2-го порядка по пространственным координатам, причем

$$\begin{cases} \|\upsilon\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3} \|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)}; \|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)} = \|\upsilon_i\|_{C^{2,0}(T)} + \|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, (i = \overline{1,3}), \\ \|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)\left|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)\right|^2 dx_1dx_2dx_3dt)^{\frac{1}{2}}, (i = \overline{1,3}), \\ \tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T) = \{(x_1,x_2,x_3,t) \in T : \upsilon_i \in C^{2,2,2,0}(T) \equiv C^{2,0}(T); \\ \upsilon_{it} \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Замечания **1.2.1. A$_1$)** Если

$$\sum_{0\le|k|\le2} (\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)[D^k\upsilon_i(x_1,x_2,x_3,t)]^2 dx_1dx_2dx_3dt) + $$
$$+\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)\left|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)\right|^2 dx_1dx_2dx_3dt \le K_0 < +\infty, i = \overline{1,3}, \quad (1.2.11)$$

то

$$\upsilon_i \in W^2_{\lambda\Omega}(T) = \left\{(x_1,x_2,x_3,t) \in T : D^k\upsilon_i \in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3 \times (0,T_0)\right], \upsilon_{it} \in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3 \times (0,T_0)\right]\right\},$$

$$i = \overline{1,3}; k = 0 : D^0\upsilon_i \equiv \upsilon_i; k \ne 0 : D^k\upsilon_i = \frac{\partial^{|k|}\upsilon_i}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}}, |k| = \sum_{m=1}^{3} k_m, (k_m = \overline{0,2}; m = \overline{1,3}),$$

$$\|\upsilon_i\|_{W^2_{\lambda\Omega}} = \{\sum_{0\le|k|\le2} (\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)[D^k\upsilon_i(x_1,x_2,x_3,t)]^2 dx_1dx_2dx_3dt) + $$
$$+\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)\left|\upsilon_{it}(x_1,x_2,x_3,t)\right|^2 dx_1dx_2dx_3dt\}^{\frac{1}{2}}, i = \overline{1,3}, \quad (1.2.12)$$

где $W^2_{\lambda\Omega}(T)$ – весовое пространство типа Соболева.

A$_2$) В §2.4 рассматривается задача, когда решение принадлежит в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$:

$$\begin{cases} \|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|\upsilon_i\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon_i;T)}} ; \|\upsilon_i\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon_i;T)}} = \sum_{0\le|k|\le 2} \|D^k\upsilon_i\|_{C(T)} + \|\upsilon_{it}\|_{C(T)}, (i=\overline{1,3}), \\ \tilde{C}^{2,1}(T) \equiv \tilde{C}^{2,2,2,1}(T) = \{(x_1,x_2,x_3,t)\in T : D^k\upsilon_i \in C(T); \upsilon_{it}\in C(T)\}, (i=\overline{1,3}), \\ k=0 : D^0\upsilon_i(x_1,x_2,x_3,t)\equiv \upsilon_i ; k\neq 0 : D^k\upsilon_i = \dfrac{\partial^{|k|}\upsilon_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}, |k| = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i, \\ (\alpha_i = 0,1,2; i=\overline{1,3}). \end{cases}$$

При изучении стационарных задач $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$ переходит в $C^{2,2,2}(R^3)$ – пространство функций $\upsilon_i(x_1,x_2,x_3)$, имеющих непрерывные частные производные по x_1,x_2,x_3 до 2-го порядка, включительно, причем

$$\|\upsilon_i\|_{C^2(R^3)} = \sum_{0\le|k|\le 2} \|D^k\upsilon_i\|_{C(R^3)}, i=\overline{1,3}.$$

§1.2.2. Основные задачи, исследуемые в главе 2 и 3.

Содержание главы 2. В работах [3,4] был предложен метод для решения задачи Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (1.2.1)-(1.2.3), когда конвективные члены

$$K_i(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3) \equiv \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \upsilon_{ix_j}, i=\overline{1,3} \tag{1.1}$$

имеют определенные ограничения. При этом функции вида

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \upsilon_{ix_j} - \frac{1}{2} Q_{x_i}, i=\overline{1,3}, \tag{1.2}$$

$\theta_i, (i=\overline{1,3})$ не могут быть тождественно равны нулю и

$$\begin{cases} \theta_i\big|_{t=0} = \theta_i^0(x), \forall x\in R^3, i=\overline{1,3}, \\ Q = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2, \\ Q_{x_i} = (\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+\upsilon_3^2)_{x_i} = 2(\upsilon_1\upsilon_{1x_i} + \upsilon_2\upsilon_{2x_i} + \upsilon_3\upsilon_{3x_i}), i=\overline{1,3}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\theta_i^0, (i=\overline{1,3})$ – известные функции, так как известны $\upsilon_i^0, i=\overline{1,3}$. Здесь функции θ_i, которые введены с помощью (1.2), могут допускать условия: a$_1$) $\mathrm{rot}\tilde{\theta} = 0, \tilde{\theta} = (\theta_1,\theta_2,\theta_3)$; $\mathrm{rot}\, v \neq 0,\ v = (u,\upsilon,w)$;

или: a$_2$) $\mathrm{div}\tilde{\theta} = 0$; $\mathrm{rot}\, v \neq 0,\ v = (u,\upsilon,w)$;

или: a$_3$) $\theta_i, (i=\overline{1,3})$- произвольные функции, если, соответственно, как необходимые условия, имеют место:

a$_{1,0}$) $\mathrm{rot}\tilde{\theta}^0 = 0, \tilde{\theta}^0 = (\theta_1^0,\theta_2^0,\theta_3^0)$;

$a_{2,0}$) $\operatorname{div}\tilde{\theta}^0 = 0;$ $a_{3,0}$) $\tilde{\theta}^0$ - произвольные функции.

Замечания 1.2.2. Б$_1$) В случае (a_1) течение рассматривается с очень малой вязкостью: $0 < \mu < 1,$ (см. §2.1, §2.2, гл.2), когда число Рейнольдса очень велико ($\mathbf{Re} \to \infty$) [2,6]. Этот вопрос в предельном случае очень большого числа Рейнольдса является основным вопросом в теории пограничного слоя.

В исследовании турбулентности разрешающая способность численных методов никогда не достигает полного смысла при высоких числах Рейнольдса. Поэтому качественно-аналитические методы, дающие решения задачи Навье-Стокса с трением, позволяют достичь более полного понимания физики турбулентности [6,7].

Если рассмотрим $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, то при условиях (a_1), (1.2.2) и (1.2.3) функции $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ ограничены в $C^{3,0}(T)$. Поэтому, чтобы оценить $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, надо, сперва, оценить функции: $\upsilon_{it}, i = \overline{1,3}$ в $L^2_{\lambda\Omega}$.

Так как

$$\|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|\upsilon_i\|_{C^{3,0}(T)} \le 3N_1, C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T); \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = \sum_{i=1}^{3} \|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le 3M^*(\sqrt{\mu} + \frac{2}{15}),$$

$$\|\upsilon_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le M^*(\sqrt{\mu} + \frac{2}{15}), i = \overline{1,3}; N_1 = 20k_1, M^* = 60\beta_0\sqrt{\tilde{q}}, \tilde{q} = \max(q_0, q_1, q_2, q_3),$$

то имеем

$$\|\upsilon\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|\upsilon_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)} \le 3[N_1 + M^*(\sqrt{\mu} + \frac{2}{15})].$$

Это означает, что функции $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ ограничены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Известно, что предельный переход к очень малой вязкости следует выполнять не в уравнениях Навье-Стокса, а в решении этих уравнений путем приближения коэффициента вязкости к нулю [2].

Предельный же случай, который мы рассмотрим в §2.2 относится к результатам §2.1 с условием (a_1). При этом для идеальной несжимаемой жидкости ($\mu = 0$) с условием Стокса, решение получено в виде ((0.10), см. §2.1.2, гл.2): $\bar{\upsilon}_i \in \tilde{C}^{3,3,3,1}(T), i = \overline{1,3}$. Следовательно, оценивая близости решений задачи Навье-Стокса с трением и вырожденной системы в смысле $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ при $\mu \to 0$ с учетом

$$\begin{cases} \|\upsilon_i - \bar{\upsilon}_i\|_{C^{3,0}(T)} \le \gamma_1(\delta_\mu, \mu), i = \overline{1,3}; \gamma_1(\delta_\mu, \mu) = 20(\delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}), \delta_\mu = \sum_{i=1}^{3} \delta_{i\mu}, \\ \text{или } \|\upsilon_i - \bar{\upsilon}_i\|_{C^{3,0}(T)} \le O(\sqrt{\mu}), i = \overline{1,3}, \text{если } \delta = \sqrt{\mu}; C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T), \end{cases}$$

получим

$$\|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\sum_{i=1}^{3}\|\upsilon_i-\bar{\upsilon}_i\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon_i;\lambda\Omega)}(T)}\le 3\gamma_2(\delta_\mu,\mu), \tag{1.4}$$

$$\gamma_2(\delta_\mu,\mu)=C^*\sqrt{\mu}+20\delta_\mu, C^*=\sqrt{k^*}+180N_0, k^*=8\tilde{q}.$$

Предложение 1. При условии (1.4), когда $\delta=\sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Б$_2$) В случае (а$_2$) течение рассматривается со средней величиной вязкости: $0<\mu=\mu_0=\text{const}<+\infty$, причем $t\in[0,T_0], T_0<+\infty$, так как в этом случае из системы Навье-Стокса порождаются нелинейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода по переменной $t\in[0,T_0]$, относительно функций $\theta_i, i=\overline{1,3}$ (см. §2.3, гл.2).

Б$_3$) В §2.4 задача (1.2.1)-(1.2.3) исследуется, когда конвективные члены задачи Навье-Стокса произвольны, т.е. с условием (а$_3$).

Пусть функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ преобразуют (1.2.1) к системам вида

$$\begin{cases}\upsilon_{it}+\theta_i=f_i-J_{x_i}+\mu\Delta\upsilon_i,(i=\overline{1,3}); \operatorname{rot}\upsilon\ne 0, \upsilon=(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3);\\ \theta_i=\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\upsilon_{ix_j}-\frac{1}{2}Q_{x_i},(i=\overline{1,3}); J=\frac{1}{2}Q+\frac{1}{\rho}P, Q\equiv\sum_{i=1}^{3}\upsilon_i^2.\end{cases} \tag{1.5}$$

В указанных системах содержатся неизвестные $\upsilon_i, J, \theta_i,(i=\overline{1,3}), P$.

Чтобы решить систему (1.5), предложим следующий способ. Требуя

$$\begin{cases}\upsilon_i=U_i(x_1,x_2,x_3,t)+C_i(x_1,x_2,x_3,t),(i=\overline{1,3});\\ U_i\big|_{t=0}=U_{0i}, C_i\big|_{t=0}=0,(i=\overline{1,3});\\ C_i(x_1,x_2,x_3,t)=\int_0^t[\theta_i(x_1,x_2,x_3,\tau)+J_i(x_1,x_2,x_3,\tau)]d\tau,(i=\overline{1,3});\\ \theta_i(x_1,x_2,x_3,t)=-J_i(x_1,x_2,x_3,t)+C_{it}(x_1,x_2,x_3,t);\\ J_{x_i}\equiv J_i(x_1,x_2,x_3,t),(i=\overline{1,3}),\end{cases} \tag{1.6}$$

где U_i, C_i – новые неизвестные функции, имеем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть функции U_i, C_i являются решениями системы

$$\begin{cases}U_{it}=\mu\Delta U_i, i=\overline{1,3},\\ 2C_{it}=f_i+\mu\Delta C_i, i=\overline{1,3}.\end{cases} \tag{1.7}$$

Тогда (1.6) является решением системы (1.5).

Решение системы (1.5) зависит от параметра вязкости.

В самом деле, в случае (a_3), когда течение рассматриваем со средней величиной вязкости: $0 < \mu = \mu_0 = \mathrm{const} < +\infty$, то найденное решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T) \equiv \tilde{C}^{2,1}(T)$ (см. §2.4.1, гл.2), $T = R^3 \times R_+$.

Когда параметр вязкости: $0 < \mu < 1$, то решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) обладает свойством условной гладкости в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ (см. §2.4.2, гл.2) при точных входных данных:

1) $\upsilon_i^0 \in C^2(R^3), i = \overline{1,3}; C^2(R^3) \equiv C^{2,2,2}(R^3),$

2) $f_i \in C^{3,0}(T), C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T), T = R^3 \times R_+, (i = \overline{1,3}); \mathrm{div} f = 0, f = (f_1, f_2, f_3).$

Содержание главы 3. Если для системы Навье-Стокса с трением [1,2] обосновывается справедливость асимптотического разложения, то построения решений $\upsilon_{i\mu}, i = \overline{1,3}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ становится возможным.

Доказывается ограниченность функций $\upsilon_{i\mu}, i = \overline{1,3}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Также доказывается, что в условиях асимптотического разложения при $\mu \to 0$ решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$; $f_i \in C^{3,0}(T), i = \overline{1,3}.$

Пусть

$$\upsilon_{i\mu}(x_1,x_2,x_3,t) = \bar{\upsilon}_i(x_1,x_2,x_3,t) + \xi_i(x_1,x_2,x_3,t) + \Pi_i(x_1,x_2,x_3,t), i = \overline{1,3}, \tag{1.8}$$

$$\bar{\upsilon}_i(x_1,x_2,x_3,t)|_{t=0} = \bar{\upsilon}_i^0(x_1,x_2,x_3), i = \overline{1,3}; \mathrm{div}\bar{\upsilon} = \sum_{i=1}^{3} \bar{\upsilon}_{ix_i} = 0, \tag{1.9}$$

$$\xi_i(x_1,x_2,x_3,t)|_{t=0} = 0; \Pi_i(x_1,x_2,x_3,t)|_{t=0} = \Pi_i^0(x_1,x_2,x_3) \equiv \upsilon_i^0 - \bar{\upsilon}_i^0, (i = \overline{1,3}), \tag{1.10}$$

где $\bar{\upsilon} = (\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3)$, $\bar{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ – новые неизвестные функции, которые удовлетворяют условия (1.9), (1.10). При этом, относительно $\bar{\upsilon} = (\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3), \bar{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3),$ с учетом (1.8) из системы (1.2.1) вырождаются системы:

$$\bar{\upsilon}_{it} + \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{3} \bar{\upsilon}_j^2\Big)_{x_i} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho}\bar{P}_{x_i}, i = \overline{1,3}, \tag{1.11}$$

$$\Pi_{it} = \mu\Delta\Pi_i, i = \overline{1,3}, \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} \xi_{it} + \sum_{j=1}^{3}[\xi_j \xi_{ix_j} + a_j \xi_{ix_j} + \xi_j a_{ix_j}] = b_i + F_i - \dfrac{1}{\rho}[P_{x_i} - \bar{P}_{x_i}] + \mu\Delta\xi_i, i = \overline{1,3}, \\ F_i \equiv f_i - \bar{f}_i \in C^{3,0}(T), i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{1.13}$$

I. Функции $(\bar{\upsilon}_1, \bar{\upsilon}_2, \bar{\upsilon}_3)$- есть решение вырожденной системы (см. §2.1.2, гл.2) с условием Стокса: $\mathrm{rot}\bar{\upsilon} = 0$, $\bar{\upsilon}_i \in \tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

II. В системе (1.12) функции $\Pi_i \in \tilde{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)$. Поэтому с условием (1.10) и

$$\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x_1,x_2,x_3)\left|\Pi_{it}(x_1,x_2,x_3,t)\right|^2 dx_1dx_2dx_3dt \le K < +\infty, i=\overline{1,3}, \qquad (1.14)$$

решение (1.12) представляем в виде

$$\Pi_i = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\int_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\Pi_i^0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times$$
$$\times\Pi_i^0(x_1+2\tau_1\sqrt{\mu t},x_2+2\tau_2\sqrt{\mu t},x_3+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \equiv N_i^0(x_1,x_2,x_3,t), i=\overline{1,3}, \qquad (1.15)$$

причем функции $\Pi_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\left\|\tilde{\Pi}\right\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(10+3\sqrt{q_0})\sqrt{\mu}.$$

III. В данном разложении $\bar{\zeta}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ играют роль остаточного члена с условием (1.10). Из полученных результатов следует, что функции $a_i, b_i, i=\overline{1,3}$:

$$\begin{cases} b_i(x_1,x_2,x_3,t) \equiv -\sum_{j=1}^{3}a_ja_{ix_j} + \frac{1}{2}(\bar{\upsilon}_j^2)_{x_i} = -\sum_{j=1}^{3}[\bar{\upsilon}_j\Pi_{ix_j} + \bar{\upsilon}_{ix_j}\Pi_j + \Pi_j\Pi_{ix_j}], i=\overline{1,3}, \\ a_i(x_1,x_2,x_3,t) \equiv \bar{\upsilon}_i + \Pi_i, i=\overline{1,3} \end{cases} \qquad (1.16)$$

в уравнениях системы (1.13) становятся известными. Поэтому, учитывая

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{3}[\xi_j\xi_{ix_j} + a_j\xi_{ix_j} + \xi_ja_{ix_j}]; \theta_i\Big|_{t=0} = 0, i=\overline{1,3} \qquad (1.17)$$

из системы (1.13) получим

$$\xi_{it} + \theta_i = b_i + F_i - \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i + \mu\Delta\xi_i; \tilde{P}_i \equiv P_{x_i} - \bar{P}_{x_i}, i=\overline{1,3}. \qquad (1.18)$$

Пусть

$$\begin{cases} \xi_i = \varphi_i(x_1,x_2,x_3,t) + C_i(x_1,x_2,x_3,t);\ \varphi_i\Big|_{t=0}=0,\ C_i\Big|_{t=0}=0, (i=\overline{1,3}); \\ C_i(x_1,x_2,x_3,t) = \int_0^t[\theta_i(x_1,x_2,x_3,\tau) + \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x_1,x_2,x_3,\tau)]d\tau, (i=\overline{1,3}); \\ \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x_1,x_2,x_3,\tau) = -\theta_i(x_1,x_2,x_3,\tau) + C_{it}(x_1,x_2,x_3,t), (i=\overline{1,3}), \end{cases} \qquad (1.19)$$

тогда $\varphi_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \varphi_{it} = F_i + \mu\Delta\varphi_i, i=\overline{1,3}, \\ 2C_{it} = b_i + \mu\Delta C_i, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Поэтому (1.19) является решением системы (1.18). При этом

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int_0^t \int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+$$

$$+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}} \int_0^t \int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))b_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},$$

$$y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv H_i, i=\overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\mu,$$

где $\xi_i \in \tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$, причем

$$\|\bar{\zeta}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(15+\sqrt{q_1})\delta_4; q_1 = \int_0^{T_0} \lambda(t)[\frac{3}{2} + \frac{6\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}\sqrt{t}]^2 dt,\ \bar{\zeta} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3). \quad (1.21)$$

Утверждение 3.1.2. При выполнении (1.21), когда $\delta_4 = \sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Теорема 3.1.1. Если функции $\upsilon_i, \Pi_i, \xi_i, i=\overline{1,3}$ единственным образом определяются, как решения системы (1.11), (1.12), (1.13), то (1.8) является решением системы (1.2.1) в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В §3.2 изучено поведение решения системы Навье-Стокса при асимптотическом разложении (1.8), когда $\mu \to 0$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В §3.3 рассматривается вопрос о возможности применения асимптотического разложения (1.8) к системам Навье-Стокса вида

$$\upsilon_{it} + \sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \upsilon_{ix_j} = f_i - \frac{1}{\rho}P_{x_i} + \mu\Delta\upsilon_i + \varepsilon_\mu \Omega_i(\upsilon_i), i=\overline{1,3} \quad (1.22)$$

с условиями (1.2.2), (1.2.3) и

$$\Omega_i(\upsilon_i) \equiv \int_{R^3} K_i(x_1,x_2,x_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\upsilon_i(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, i=\overline{1,3}, \quad (1.23)$$

$$\begin{cases} 0 \le K_i : \int_{R^3} K_i(x_1,x_2,x_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = 1, (i=\overline{1,3}), \\ \varepsilon_\mu \in (0,1) : \varepsilon_\mu \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0; \upsilon_i^0 \in C^2(R^3), f_i \in C^{3,0}(T), (i=\overline{1,3}), T = R^3 \times [0,T_0]. \end{cases}$$

В работе [2] были исследованы частные случаи уравнения Навье-Стокса, когда $\rho^{-1}A_\tau = \varepsilon$ – кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости: $\mu = \rho^{-1}\nu$ ламинарного течения (A_τ - коэффициент турбулентного обмена). При этом Ω_i рассматривается, как дифференциальный оператор 2-го порядка. Результаты этих работ не применимы к полным уравнениям Навье-Стокса вида (1.22).

В наших исследованиях все результаты §3.1, §3.2 применяются к уравнению (1.22), где Ω_i является операторами вида (1.23).

Замечание. Результаты параграфа 3.3 получены с учетом согласования параметров: $0<\mu,\varepsilon_\mu<1:\varepsilon_\mu \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0.$

Содержание главы 4. Исследуется нестационарная задача Навье-Стокса для сжимаемого изотермического течения с вязкостью [2]:

$$\begin{cases} \rho[\dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\sum\limits_{j=1}^{3} v_j\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}]=f_i-\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+F_i(v_1,v_2,v_3,\mu),i=\overline{1,3}, \\ F_1\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(2\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1})]+\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1})], \\ F_2\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(2\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2})]+\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1})], \\ F_3\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_3}[\mu(2\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div} v)]+\dfrac{\partial}{\partial x_1}[\mu(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3})]+\dfrac{\partial}{\partial x_2}[\mu(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2})], \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\rho_t+\sum_{i=1}^{3}(\rho v_i)_{x_i}=0, \tag{1.25}$$

$$P-\rho RT=0, \tag{1.26}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\big|_{t=0}=v^0(\boldsymbol{x}),\forall x\in R^3,t\in[0,T_0], \\ \rho\,|_{t=0}=\rho_0(x),\forall x\in R^3,t\in[0,T_0], \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\begin{cases} f_i\in C^{3,0}(T=R^3\times[0,T_0]),C^{3,0}(T)\equiv C^{3,3,3,0}(T),i=\overline{1,3}, \\ v_i^0\in C^3(R^3)\equiv C^{3,3,3}(R^3),i=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{1.28}$$

Неизвестные величины: скорость $v=(v_1,v_2,v_3)$, $P-$ давление, $\rho-$ плотность, а T, μ – считаются известными, где T – абсолютная температура, соотношение $\mu(T)$, связь между коэффициентом вязкости μ и температурой T (здесь зависимостью вязкости от давления обычно не учитывает). При этом доказывается, что задача (1.24) – (1.27) имеет единственное решение в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Глава 2

Нестационарная задача Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

Одной из проблемных математических задач современности является уравнение Навье-Стокса, которое описывает движение вязкой жидкости в гидродинамике. Изучение этого уравнения представляют научный интерес и в теоретическом, и в практическом плане, как сказано ранее.

Пусть $(u=\upsilon_1, \upsilon=\upsilon_2, w=\upsilon_3)$:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \upsilon u_y + wu_z = f_1(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_x + \mu\Delta u, \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z = f_2(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_y + \mu\Delta\upsilon, \\ w_t + uw_x + \upsilon w_y + ww_z = f_3(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_z + \mu\Delta w, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{divU} = u_x + \upsilon_y + w_z = 0, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)|_{t=0} = u_0(x,y,z), \\ \upsilon(x,y,z,t)|_{t=0} = \upsilon_0(x,y,z), \\ w(x,y,z,t)|_{t=0} = w_0(x,y,z), \forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0], \end{cases} \tag{2.3}$$

где уравнение (2.2) есть уравнение неразрывности. Неизвестными величинами являются скорость v :(u,v,w) и давление P, причем

1) $f_i \in C^{4,0}(T = R^3\times[0,T_0]), C^{4,0}(T)\equiv C^{4,4,4,0}(T)$,

2) $u_0, \upsilon_0, w_0 \in C^3(R^3), C^3(T)\equiv C^{3,3,3}(T)$.

Возникает вопрос о разрешимости задачи Навье-Стокса и условной гладкости всех его решений в $G^0(T)$.

В общем случае, задача Навье-Стокса решается методом эквивалентного раздробления системы в классе $G^0(T)$, где $G^0(T) = \{(x,y,z,t)\in T = R^3\times\left[0,T_0\right] : u\in C^{3,3,3,0}(T), \upsilon\in C^{3,3,3,0}(T), w\in C^{3,3,3,0}(T),$ а производные 1-го порядка во времени: u_t, υ_t, w_t определяются для $t>0$, при заданных начальных условиях: $(u,\upsilon,w)|_{t=0} = (u_0,\upsilon_0,w_0)$, где гладкости функций (u,υ,w) в $G^0(T)$ требуются только по $x,y,z\}$.

Если

$$\begin{cases} \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\left|u_t(x,y,z,t)\right|^2 dt \le K < +\infty, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)\right|^2 dt \le K < +\infty, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\left|w_t(x,y,z,t)\right|^2 dt \le K < +\infty, \end{cases}$$

то функции u_t, υ_t, w_t рассматриваются в $L^2_\lambda(0,T_0)$. Следовательно $G^0\left[T = R^3\times\left[0,T_0\right];\lambda(t)\right] \equiv G^2_\lambda(T) = \{(x,y,z,t)\in T : u\in C^{3,3,3,0}(T), \upsilon\in C^{3,3,3,0}(T),$ $w\in C^{3,3,3,0}(T); u_t\in L^2_\lambda(0,T_0), \upsilon_t\in L^2_\lambda(0,T_0), w_t\in L^2_\lambda(0,T_0)$, где u_t, υ_t, w_t непрерывные и ограниченные функции по $(x,y,z)\in R^3\}$, а

$$0\le\lambda(t) : \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0 .$$

При выполнении условий

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|u_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|w_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \end{cases}$$

введем

$G^0\left[T = R^3\times\left[0,T_0\right];\lambda(t)\Omega(x,y,z)\right] \equiv G^2_{\lambda\Omega}(T) = \{(x,y,z,t)\in T : u\in C^{3,3,3,0}(T),$

$\upsilon\in C^{3,3,3,0}(T), w\in C^{3,3,3,0}(T); u_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right], \upsilon_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right],$

$w_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right]\}$, причем

$$0\le\lambda(t) : \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0, 0\le\Omega : \int\limits_{R^3}\Omega(x,y,z)dxdydz = 1.$$

Тогда норма $G^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\begin{cases} \|U\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u\|_{\tilde D^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde D^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} + \|w\|_{\tilde D^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}; \|u\|_{\tilde D^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} = \|u\|_{C^{3,0}(T)} + \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde D^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} = \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \|w\|_{\tilde D^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} = \|w\|_{C^{3,0}(T)} + \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0]: u \in C^{3,3,3,0}(T); u_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0]: \upsilon \in C^{3,3,3,0}(T); \upsilon_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0]: w \in C^{3,3,3,0}(T); w_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T). \end{cases}$$

Решение задачи для уравнений Навье-Стокса методом эквивалентного раздробления дает ответ на поставленный вопрос в $G^0(T)$.

Систему (2.1) приводим к виду

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \upsilon u_y + wu_z - \frac{1}{2}Q_x = f_1 - \frac{1}{\rho}P_x - \frac{1}{2}Q_x + \mu\Delta u, \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z - \frac{1}{2}Q_y = f_2 - \frac{1}{\rho}P_y - \frac{1}{2}Q_y + \mu\Delta\upsilon, \\ w_t + uw_x + \upsilon w_y + ww_z - \frac{1}{2}Q_z = f_3 - \frac{1}{\rho}P_z - \frac{1}{2}Q_z + \mu\Delta w, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} Q_x = (u^2 + \upsilon^2 + w^2)_x = 2(uu_x + \upsilon\upsilon_x + ww_x), \\ Q_y = 2(uu_y + \upsilon\upsilon_y + ww_y), Q_z = 2(uu_z + \upsilon\upsilon_z + ww_z). \end{cases} \quad (2.5)$$

Из системы (2.4) видно, что в систему (2.1) справа и слева введены функции: $-\frac{1}{2}Q_x, -\frac{1}{2}Q_y, -\frac{1}{2}Q_z$ так, что не нарушена эквивалентность систем (2.1) и (2.4).

На основе функций $\theta_i, (i = \overline{1,3})$ систему (2.4) преобразуем к виду

$$\begin{cases} u_t + \theta_1 + \frac{1}{2}Q_x = f_1 - \frac{1}{\rho}P_x + \mu\Delta u, \\ \upsilon_t + \theta_2 + \frac{1}{2}Q_y = f_2 - \frac{1}{\rho}P_y + \mu\Delta\upsilon, \\ w_t + \theta_3 + \frac{1}{2}Q_z = f_3 - \frac{1}{\rho}P_z + \mu\Delta w, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = uu_x + \upsilon u_y + wu_z - \frac{1}{2}Q_x, \\ \theta_2 = u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z - \frac{1}{2}Q_y, \\ \theta_3 = uw_x + \upsilon w_y + ww_z - \frac{1}{2}Q_z. \end{cases} \quad (2.7)$$

Полученные системы (2.6) и (2.7) содержат неизвестные: u, υ, w, $\theta_i, (i = \overline{1,3})$ и давление P, причем системы (2.6), (2.7) и (2.4) эквивалентны. При этом, новые неизвестные функции $\theta_i, (i=\overline{1,3})$ допускают условия

$$\begin{cases} \theta_1\big|_{t=0} = \theta_1^0 \equiv u_0 u_{0x} + \upsilon_0 u_{0y} + w_0 u_{0z} - \dfrac{1}{2} Q_{0x}, \\ \theta_2\big|_{t=0} = \theta_2^0 \equiv u_0 \upsilon_{0x} + \upsilon_0 \upsilon_{0y} + w_0 \upsilon_{0z} - \dfrac{1}{2} Q_{0y}, \\ \theta_3\big|_{t=0} = \theta_3^0 \equiv u_0 w_{0x} + \upsilon_0 w_{0y} + w_0 w_{0z} - \dfrac{1}{2} Q_{0z}, \\ Q_0 \equiv u_0^2 + \upsilon_0^2 + w_0^2, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\theta_i^0, (i=\overline{1,3})$ – известные функции, так как известны u_0, υ_0, w_0.

Рассмотрим, каким образом порождается уравнение относительно давления при условии (2.2). Для этого, в работе [3] впервые был предложен метод, который дает решение системы Навье-Стокса в $G^0(T)$. Разработанный метод решения систем (2.6) и (2.7), связан с функциями $\theta_i, (i=\overline{1,3})$, т.е.

a$_1$) $\mathrm{rot}\tilde{\theta} = 0, \tilde{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$; $\mathrm{rot}\, v \neq 0,\ v = (u, \upsilon, w)$;

или a$_2$) $\mathrm{div}\tilde{\theta} = 0$; $\mathrm{rot}\, v \neq 0,\ v = (u, \upsilon, w)$;

или: a$_3$) $\theta_i, (i=\overline{1,3})$ - произвольные функции,

если, соответственно, как необходимые условия, имеют место:

a$_{1,0}$) $\mathrm{rot}\tilde{\theta}^0 = 0, \tilde{\theta}^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0);$

a$_{2,0}$) $\mathrm{div}\tilde{\theta}^0 = 0;$

a$_{3,0}$) $\tilde{\theta}^0$ - произвольные функции.

Краткое содержание исследований задачи Навье-Стокса с условиями (a$_1$), (a$_2$) можно найти в [3,4].

Замечания 2.1.

1. В случае (a$_2$) течение рассматривается со средней величиной вязкости: $0 < \mu = \mu_0 = \mathrm{const} < +\infty$, причем $T = R^3 \times [0, T_0], T_0 = \mathrm{const} < +\infty$, а в случае (a$_1$) течение рассматривается с очень малой вязкостью: $0 < \mu < 1$ (см.§2.1, §2.2, гл. 2).

2. В общем случае (a$_3$) течение рассматривается и со средней величиной вязкости:

$0 < \mu = \mu_0 = \mathrm{const} < +\infty, T = R^3 \times R_+$ (см.§2.4.1, гл.2),

и с очень малой вязкостью:

$0 < \mu < 1, T = R^3 \times R_+$ (см.§2.4.2, гл. 2).

3. $\frac{\partial}{\partial l_j} f_i(l_1,l_2,l_3,s) \equiv f_{i,l_j}(l_1,l_2,l_3,s),(j=\overline{1,3};i=\overline{1,3}),$

$\frac{\partial}{\partial l_j} J_i(l_1,l_2,l_3,s) \equiv J_{i,l_j}(l_1,l_2,l_3,s),(j=\overline{1,3};i=\overline{1,3});l_1 = x + 2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, l_2 = y +$

$+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, l_3 = z + 2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};\mathrm{div} f \neq 0, f = (f_1,f_2,f_3)$ [см.§2.1, §2.3].

Глава 2 состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе изучаются уравнения несжимаемой жидкости с трением, т.е. нестационарная задача Навье-Стокса с вязкостью [1] с условием (a_1). При этом, для решения этой задачи применен метод эквивалентного раздробления системы [3,4]. Доказаны ограниченности функций u,υ,w в $G^2_\lambda(T)$ (или $G^2_{\lambda\Omega}(T)$).

В параграфе 2 рассматривается предельный случай очень малой вязкости в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В параграфе 3 рассматривается задача (2.1)-(2.3) с условием (a_2).

В параграфе 4 изучается задача (2.1)-(2.3), когда конвективные члены допускают условия (a_3).

§ 2.1. Задача Навье-Стокса с конвективными членами с условием (a_1)

Задача Навье-Стокса рассматривается для несжимаемой и сжимаемой жидкости. В нашем случае исследуется уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью (2.1) с условиями (2.2), (2.3). Доказательство существования и условно-гладкого решения уравнения Навье-Стокса дает метод решения задачи для уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим задачу Навье-Стокса (2.1)-(2.3). Систему (2.1) приводим к виду (2.4). Тогда с помощью функций $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ система (2.4) преобразуется к эквивалентному виду (2.6), (2.7) с условием (2.8). Системы (2.6) и (2.7) содержат неизвестные: u,υ,w, $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ и давление.

В последующих пунктах, при указанных ограничениях на входные данные, будет дано строгое обоснование совместимости систем (2.6), (2.7).

§2.1.1. Исследование с условием (a_1).

Пусть функции $\theta^0_i,(i=\overline{1,3})$ удовлетворяют условию ($a_{1,0}$). Тогда относительно $\theta_i, (i=\overline{1,3})$ допускаем условие (a_1):

$$\text{rot}\tilde{\theta}=0;\ \text{rot}\,v\neq 0,\ v=(u,\upsilon,w). \tag{2.1.1}$$

Поэтому можно требовать, чтобы

$$\theta_1=\theta_x, \theta_2=\theta_y, \theta_3=\theta_z, \tag{2.1.2}$$

где θ – новая неизвестная функция. Следовательно, из системы (2.6) и (2.7), соответственно получим следующие системы

$$\begin{cases} u_t+\theta_x=f_1-[\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q]_x+\mu\Delta u, \\ \upsilon_t+\theta_y=f_2-[\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q]_y+\mu\Delta\upsilon, \\ w_t+\theta_z=f_3-[\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q]_z+\mu\Delta w, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$$\begin{cases} \theta_x=uu_x+\upsilon u_y+wu_z-\frac{1}{2}Q_x, \\ \theta_y=u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z-\frac{1}{2}Q_y, \\ \theta_z=uw_x+\upsilon w_y+ww_z-\frac{1}{2}Q_z. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Лемма 2.1.1. Пусть выполняются условия (2.2), (2.3), (2.1.1). Тогда системы (2.1.3) и (2.1.4) эквивалентно преобразуются к виду

$$\begin{cases} \Delta J=-F_0,\ J\equiv\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q+\theta,\ F_0\equiv-(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z}),\ Q\equiv u^2+\upsilon^2+w^2, \\ u_t=f_1+\mu\Delta u-J_x, \\ \upsilon_t=f_2+\mu\Delta\upsilon-J_y, \\ w_t=f_3+\mu\Delta w-J_z, \\ \frac{1}{\rho}P=-\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2+w^2)-\theta+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}F_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \\ \Delta\theta=-\psi^0(x,y,z,t),\quad \psi^0\equiv-(\psi_{1x}+\psi_{2y}+\psi_{3z}), \\ r=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2+(z-s_3)^2}, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

причем система (2.1.5) имеет точное единственное решение в $G^0(T)$.

Доказательство. На основе математических преобразований, т.е. первое уравнение (2.1.3) дифференцируем по x, второе – по y, третье – по z и, затем, суммируя с учетом (2.2) и учитывая

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u)+\frac{\partial}{\partial y}(\Delta \upsilon)+\frac{\partial}{\partial z}(\Delta w)\right]=\mu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x+\upsilon_y+w_z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u_x+\upsilon_y+w_z)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(u_x+\upsilon_y+w_z)\right]=0, \qquad (2.1.6)$$

получаем уравнение Пуассона [5]: $\Delta(\frac{1}{2}Q+\frac{1}{\rho}P+\theta)=-(-f_{1x}-f_{1y}-f_{1z})$.

Поэтому

$$\Delta J=-F_0,\ J\equiv\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}Q+\theta,\ F_0\equiv-(f_{1x}+f_{2y}+f_{3z}). \qquad (2.1.7)$$

Вышеуказанный алгоритм, когда дифференцируя уравнения системы (2.1.3) соответственно по x,y,z и, затем, складывая, получим уравнение Пуассона (2.1.7), для краткости, называем «алгоритмом пуассонизации системы».

В работе С.Л. Соболева [5] указано, что функция

$$J=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}F_0(s_1,s_2,s_3;t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r} \qquad (2.1.8)$$

удовлетворяет уравнению (2.1.8) и называется ньютоновым потенциалом. При этом имеют место:

а) стремление к нулю функции J на бесконечности;

б) что ньютонов потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона;

в) существование непрерывных первых производных у ньютонового потенциала.

Чтобы доказать существование и непрерывность вторых производных, учитывая новые переменные: $s_1-x=\xi,\ s_2-y=\eta,\ s_3-z=\tau,$ из интеграла

$$J_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}F_0\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}\right)=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\frac{(s_1-x)F_0(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3}{r^3} \qquad (2.1.9)$$

получим

$$J_x=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\tau_1\frac{F_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}}\equiv J_1(x,y,z,t). \qquad (2.1.10)$$

Аналогично, с учетом $J_y\equiv J_2, J_z\equiv J_3,$ имеем

$$J_i=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\tau_i\frac{F_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}},i=2,3. \qquad (2.1.11)$$

Интегралы (2.1.10), (2.1.11) допускают дифференцирование по $x,y,z,$ причем интегралы от производных сходятся равномерно.

Если $J(x,y,z,t)$ – решение уравнения (2.1.7), то

$$J_x \equiv \frac{1}{\rho}P_x + \frac{1}{2}Q_x + \theta_x, J_y \equiv \frac{1}{\rho}P_y + \frac{1}{2}Q_y + \theta_y, J_z \equiv \frac{1}{\rho}P_z + \frac{1}{2}Q_z + \theta_z. \qquad (2.1.12)$$

Это означает, что из системы (2.1.3) следует

$$\begin{cases} u_t = f_1 + \mu\Delta u - J_x, \\ \upsilon_t = f_2 + \mu\Delta\upsilon - J_y, \\ w_t = f_3 + \mu\Delta w - J_z, \end{cases} \qquad (2.1.13)$$

т.е. система (2.1.3) эквивалентно преобразуется к виду (2.1.13) линейного неоднородного уравнения теплопроводности. Линеаризация системы (2.1.3) следует с учетом тех математических преобразований, которые используем в данном параграфе с сохранением всех конвективных членов с условием (2.1.1). Уравнения систем (2.1.7), (2.1.13) – это есть первое, второе, третье и четвертое уравнения системы (2.1.5).

Решая систему (2.1.13) методом Соболева, имеем

$$\begin{cases} u = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_1(s_1,s_2,s_3,s) - J_1(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds \equiv H_1, \\ \upsilon = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_2(s_1,s_2,s_3,s) - J_2(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds \equiv H_2, \\ w = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times \\ \times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,s) - J_3(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds \equiv H_3, \end{cases} \qquad (2.1.14)$$

а $H_i = H_i(x,y,z,t), (i=\overline{1,3})$ являются известными функциями, при этом функции $u_x, u_y, u_z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, w_x, w_y, w_z$, определяются из системы (2.1.14) следующим образом:

$$u_y = H_{1y}(x,y,z,t), u_z = H_{1z}(x,y,z,t), \upsilon_x = H_{2x}(x,y,z,t), \upsilon_z = H_{2z}(x,y,z,t),$$
$$w_x = H_{3x}(x,y,z,t), w_y = H_{3y}(x,y,z,t):$$

$$H_1 \equiv \frac{1}{8\sqrt{(\pi\mu t)^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})u_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 + \int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times$$

$$\times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_1(s_1,s_2,s_3,s)-J_1(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+$$

$$+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]\times$$

$$\times d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds,$$

$$H_2\equiv\frac{1}{8\sqrt{(\pi\mu t)^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\upsilon_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3+\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times$$

$$\times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_2(s_1,s_2,s_3,s)-J_2(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\upsilon_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+$$

$$+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]\times$$

$$\times d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds,$$

$$H_3\equiv\frac{1}{8\sqrt{(\pi\mu t)^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu t})w_0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3+\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-s)})\times$$

$$\times\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-s)})^3}[f_3(s_1,s_2,s_3,s)-J_3(s_1,s_2,s_3,s)]ds_1ds_2ds_3ds\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))w_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+$$

$$+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]\times$$

$$\times d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds,$$

где учитываем новые переменные: $\frac{s_1-x}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_1,\frac{s_2-y}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_2,\frac{s_3-z}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_3,$

или $\frac{s_1-x}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_1,\frac{s_2-y}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_2,\frac{s_3-z}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_3.$

Поэтому на основе выражений (2.1.4),(2.1.14) и их частных производных по x, y, z находим

$$\begin{cases} \theta_x = H_2 \cdot H_{1y} + H_3 \cdot H_{1z} - H_2 \cdot H_{2x} - H_3 \cdot H_{3x} \equiv \psi_1(x,y,z,t), \\ \theta_y = H_1 \cdot H_{2x} + H_3 \cdot H_{2z} - H_1 \cdot H_{1y} - H_3 \cdot H_{3y} \equiv \psi_2(x,y,z,t), \\ \theta_z = H_1 \cdot H_{3x} + H_2 \cdot H_{3y} - H_1 \cdot H_{1z} - H_2 \cdot H_{2z} \equiv \psi_3(x,y,z,t). \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Так как правая сторона системы (2.1.15) определяется функциями $H_i, (i = \overline{1,3})$ и их частными производными, то $\psi_i, (i = \overline{1,3})$ становятся известными функциями. Следовательно, для определения функции $\theta(x, y, z, t)$, первое уравнение (2.1.15) дифференцируем по *x,* второе – по *y,* третье – по *z* и, суммируя, имеем уравнение Пуассона [5]

$$\Delta\theta = -\psi^0, \tag{2.1.16}$$

которое однозначно разрешимо в $C^2(T)$:

$$\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \psi^0(s_1, s_2, s_3, t) \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \psi^0 \equiv -(\psi_{1x} + \psi_{2y} + \psi_{3z}). \tag{2.1.17}$$

Уравнение (2.1.16) – это шестое уравнение системы (2.1.5). Поэтому, учитывая выражение (2.1.8), получим

$$\frac{1}{\rho} P = -\theta - \frac{1}{2} Q + \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} F_0(s_1, s_2, s_3, t) \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \tag{2.1.18}$$

а (2.1.18) – это уравнение типа Бернулли.

Теорема 2.1.1. Если выполняются условия леммы 2.1.1, то задача (2.1)-(2.3) имеет единственное решение в $G^0(T)$, которое удовлетворяет условию (2.2).

Доказательство. В самом деле, из полученных результатов следует, что функции $u, \upsilon, w \in G^0(T)$ определяются из системы (2.1.14). Единственность очевидна, так как методом от противного из (2.1.14) следует единственность решения системы (2.1). Тогда учитывая частные производные 1-го порядка

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial}{\partial x} \{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3} \displaystyle\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) u_0(x + 2\tau_1\sqrt{\mu t}, y + 2\tau_2\sqrt{\mu t}, z + 2\tau_3\sqrt{\mu t}) \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3} \displaystyle\int_0^t \int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) [f_1(x + 2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y + 2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\ z + 2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s) - J_1(x + 2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y + 2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z + 2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s)] \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \}, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\upsilon_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\upsilon_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s) - J_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\}, \\
w_z = \dfrac{\partial}{\partial z}\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))w_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s) - J_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\},
\end{cases}
\qquad (2.1.19)
$$

и суммируя (2.1.19) с учетом (2.2), имеем

$$
0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp[-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)]\{-F_0[x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+
$$
$$
+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s] - \Delta J[x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s]\}\times
$$
$$
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds = 0,
$$

так как: $\Delta J = -F_0$. Значит, система (2.1.14) удовлетворяет уравнению (2.2), что и требовалось доказать.

Примечание 2.1

§2.1.2. Для несжимаемых течений без трения [2]: $\mu = 0$ уравнения Навье-Стокса упрощаются, так как отсутствуют члены: $\Delta u, \Delta\upsilon, \Delta w$. Поэтому система (2.1) приводится к виду

$$
\begin{cases}
\overline{u}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2+\overline{\upsilon}^2+\overline{w}^2)_x = \overline{f}_1 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_x, \\
\overline{\upsilon}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2+\overline{\upsilon}^2+\overline{w}^2)_y = \overline{f}_2 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_y, \\
\overline{w}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2+\overline{\upsilon}^2+\overline{w}^2)_z = \overline{f}_3 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_z
\end{cases}
\qquad (0.1)
$$

с условиями

$$
\begin{cases}
\overline{u}(x,y,z,t)|_{t=0} = \overline{u}_0(x,y,z), \overline{\upsilon}(x,y,z,t)|_{t=0} = \overline{\upsilon}_0(x,y,z), \\
\overline{w}(x,y,z,t)|_{t=0} = \overline{w}_0(x,y,z), \forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0],
\end{cases}
\qquad (0.2)
$$

$$\overline{u}_x+\overline{\upsilon}_y+\overline{w}_z=0 \qquad (0.3)$$

с сохранением всех конвективных членов при выполнении условия Стокса (безвихревое движение): $\mathrm{rot}\overline{v}=0,(\overline{v}=(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w});\overline{f}_i\in C^{4,1}(T),i=\overline{1,3}.$

Утверждение 2.1.1. Если выполняются условия (0.2), (0.3) и условия Стокса, то система (0.1) эквивалентно преобразуется к виду

$$\begin{cases}\Delta\overline{J}=-\overline{F}_0;\ \ \overline{F}_0\equiv-(\overline{f}_{1x}+\overline{f}_{2y}+\overline{f}_{3z}),\ \overline{Q}\equiv\overline{u}^2+\overline{\upsilon}^2+\overline{w}^2,\ \ \overline{J}\equiv\dfrac{1}{\rho}\overline{P}+\dfrac{1}{2}\overline{Q},\\ \overline{u}_t=\overline{f}_1-\overline{J}_x,\\ \overline{\upsilon}_t=\overline{f}_2-\overline{J}_y,\\ \overline{w}_t=\overline{f}_3-\overline{J}_z,\\ \dfrac{1}{\rho}\overline{P}=-\dfrac{1}{2}\overline{Q}+\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\overline{F}_0(s_1,s_2,s_3,t)\dfrac{ds_1ds_2ds_3}{r},r=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2+(z-s_3)^2}.\end{cases} \qquad (0,4)$$

Следовательно, система (0.4) однозначно разрешима в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

Доказательство. На основе «алгоритма пуассонизации системы» из системы (0.1), следует

$$(\overline{u}_x+\overline{\upsilon}_y+\overline{w}_z)_t+\Delta(\frac{1}{2}\overline{Q}+\frac{1}{\rho}\overline{P})=\overline{f}_{1x}+\overline{f}_{1y}+\overline{f}_{1z}.$$

Тогда учитывая (0.3), получаем уравнение Пуассона [5]

$$\Delta\overline{J}=-\overline{F}_0,\ \ F_0\equiv-(\overline{f}_{1x}+\overline{f}_{2y}+\overline{f}_{3z}),\ \ \overline{J}\equiv\frac{1}{\rho}\overline{P}+\frac{1}{2}\overline{Q}, \qquad (0.5)$$

при этом, имеем

$$\overline{J}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\overline{F}_0(s_1,s_2,s_3;t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \qquad (0.6)$$

причем

$$\begin{cases}\overline{J}_x\equiv\overline{J}_1,\overline{J}_y\equiv\overline{J}_2,\overline{J}_z\equiv\overline{J}_3:\\ \overline{J}_i(x,y,z,t)=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\tau_i\dfrac{\overline{F}_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^{\,2}+\tau_2^{\,2}+\tau_3^2)^3}},i=\overline{1,3}.\end{cases} \qquad (0.7)$$

Значит, уравнение (0.5) есть первое уравнение системы (0.4).

Если $\overline{J}$ – решение уравнения (0.5), то

$$\frac{1}{\rho}\overline{P}_x+\frac{1}{2}\overline{Q}_x\equiv\overline{J}_x,\frac{1}{\rho}\overline{P}_y+\frac{1}{2}\overline{Q}_y\equiv\overline{J}_y,\frac{1}{\rho}\overline{P}_z+\frac{1}{2}\overline{Q}_z\equiv\overline{J}_z. \qquad (0.8)$$

Подставляя (0.8) в систему (0.1), получим

$$\begin{cases} \overline{u}_t = \overline{f}_1 - \overline{J}_x, \\ \overline{\upsilon}_t = \overline{f}_2 - \overline{J}_y, \\ \overline{w}_t = \overline{f}_3 - \overline{J}_z, \end{cases} \tag{0.9}$$

т.е. полученная система (0.9) является вторым, третьим и четвертым уравнениями системы (0.4). Интегрируя (0.9) с условием (0.2), относительно функций $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$, получим соотношение в виде

$$\begin{cases} \overline{u}(x,y,z,t) = \overline{u}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_1(x,y,z,\tau) - \overline{J}_x(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{\upsilon}(x,y,z,t) = \overline{\upsilon}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_2(x,y,z,\tau) - \overline{J}_y(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{w}(x,y,z,t) = \overline{w}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_3(x,y,z,\tau) - \overline{J}_z(x,y,z,\tau))d\tau. \end{cases} \tag{0.10}$$

Следовательно, учитывая: $\overline{J} \equiv \frac{1}{\rho}\overline{P} + \frac{1}{2}\overline{Q},$ из функции (0.6), имеем

$$\frac{1}{\rho}\overline{P} = -\frac{1}{2}\overline{Q} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3} \overline{F}_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \tag{0.11}$$

а это есть пятое уравнение системы (0.4), причем (0.11) есть уравнение типа Бернулли, сходное с (2.1.18). Что и требовалось доказать.

Замечание 2.1.2. Из результатов утверждения 2.1.1 следует, что система (0.10) удовлетворяет уравнению (0.3).

В самом деле, учитывая

$$\begin{cases} \overline{u}_x(x,y,z,t) = \overline{u}_{0x}(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_{1x}(x,y,z,\tau) - \overline{J}_{x^2}(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{\upsilon}_y(x,y,z,t) = \overline{\upsilon}_{0y}(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_{2y}(x,y,z,\tau) - \overline{J}_{y^2}(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{w}_z(x,y,z,t) = \overline{w}_{0z}(x,y,z) + \int\limits_0^t (\overline{f}_{3z}(x,y,z,\tau) - \overline{J}_{z^2}(x,y,z,\tau))d\tau \end{cases}$$

и суммируя, получим

$$\begin{cases} 0 = \int\limits_0^t (\overline{f}_{1x}(x,y,z,\tau) + \overline{f}_{2y}(x,y,z,\tau) + \overline{f}_{3z}(x,y,z,\tau) - \overline{J}_{x^2}(x,y,z,\tau) - \overline{J}_{y^2}(x,y,z,\tau) - \\ -\overline{J}_{z^2}(x,y,z,\tau))d\tau = \int\limits_0^t (-\overline{F}_0(x,y,z,\tau) - \Delta\overline{J}(x,y,z,\tau))d\tau = 0, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.1.2. При условиях утверждения 2.1.1 система (0.1) имеет гладкое единственное решение в виде (0.10) в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$, которое удовлетворяет уравнению (0.3).

Предложение 2.1.1. В условиях: $\mathrm{rot}\,\bar{v}=0$ и $\mathrm{div}\,\bar{v}=0$ функции $\bar{v}=(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$, найденные в виде (0.10) удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. являются гармоническими функциями в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

§2.1.3. Ограниченность функций (u,υ,w) в $G^2_{\lambda}(T), G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Результаты §2.1.1 с условием (a_1:(2.1.1)) получены в

$G^0\left[T=R^3\times\left[0,T_0\right];\lambda(t)\right]\equiv G^2_{\lambda}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: u\in C^{3,3,3,0}(T),$ $\upsilon\in C^{3,3,3,0}(T), w\in C^{3,3,3,0}(T); u_t\in L^2_{\lambda}(0,T_0), \upsilon_t\in L^2_{\lambda}(0,T_0), w_t\in L^2_{\lambda}(0,T_0)$ – непрерывные и ограниченные функции по $(x,y,z)\in R^3\}$, если

$$\begin{cases} \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\left|u_t(x,y,z,t)\right|^2dt\le K<+\infty, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)\right|^2dt\le K<+\infty, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\left|w_t(x,y,z,t)\right|^2dt\le K<+\infty, \end{cases} \tag{2.1.20}$$

и в

$G^0\left[T=R^3\times\left[0,T_0\right];\lambda(t)\Omega(x,y,z)\right]\equiv G^2_{\lambda\Omega}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: u\in C^{3,3,3,0}(T),$ $\upsilon\in C^{3,3,3,0}(T), w\in C^{3,3,3,0}(T); u_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right], \upsilon_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right],$ $w_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right]\}$ при условии

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|u_t(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\le K<+\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\le K<+\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|w_t(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\le K<+\infty. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

I. В этом пункте рассмотрим $G^2_{\lambda}(T)$, где гладкость функций u,υ,w в $G^2_{\lambda}(T)$, требуется только по *x,y,z*, так как производная 1-го порядка во времени имеет особенность в *t=0*. Поэтому функции u_t,υ_t,w_t, рассматриваем в $L^2_{\lambda}(0,T_0)$ при заданных условиях (2.2), (2.3) с нормой

$$
\begin{cases}
\|U\|_{G^2_\lambda(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda)}(T)}, \\
\|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda)}(T)} = \|u\|_{C^{3,0}(T)} + \|u_t\|_{L^2_\lambda}, \\
\|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda)}(T)} = \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_\lambda}, \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda)}(T)} = \|w\|_{C^{3,0}(T)} + \|w_t\|_{L^2_\lambda}, \\
\|u_t\|_{L^2_\lambda} = (\sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)|u_t(x,y,z,t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}, \\
\|\upsilon_t\|_{L^2_\lambda} = (\sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}, \\
\|w_t\|_{L^2_\lambda} = (\sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)|w_t(x,y,z,t)|^2\,dt)^{\frac{1}{2}}, C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T).
\end{cases}
\tag{2.1.22}
$$

При оценках ограниченности функции u,υ,w в $G^2_\lambda(T)$ будет показано, что вырождается выражение вида: $(\int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt)^{\frac{1}{2}}$. Так как

$$
\int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt \le \int\limits_0^{\infty} \lambda(t)\frac{1}{t}dt \le M_0 < +\infty, \tag{2.1.23}
$$

то при условии: $\lambda(t) \equiv (t^{\frac{1}{m}}\lambda_1^*(t))^2, m \ge 1$, (2.1.23) является условием Лорентца. Для доказательства ограниченности функции u,υ,w в $G^2_\lambda(T)$ учитываем результаты теоремы 2.1.1. В этом случае, система Навье-Стокса имеет единственное решение в виде (2.1.14), которое удовлетворяет (2.2) и (2.3). При этом

$$
\begin{cases}
\beta_1 = \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} |D^k u_0(x,y,z)|, \beta_2 = \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} |D^k \upsilon_0(x,y,z)|, \beta_3 = \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3} |D^k w_0(x,y,z)|, \\
\beta_4 = \sup\limits_{(x,y,z,t)\in T} |u_{0,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})|, (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}); \\
\sup\limits_{(x,y,z,t)\in T} |\upsilon_{0,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})| = \beta_5, (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}); \\
\sup\limits_{(x,y,z,t)\in T} |w_{0,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})| = \beta_6, (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}); \\
\sup\limits_{(x,y,z,t,\tau)\in T\times[0,T_0]} |D^k f_i(x,y,z,t)| = \beta_7, \sup\limits_{(x,y,z,t,\tau)\in T\times[0,T_0]} |D^k J_i(x,y,z,t)| = \beta_8, (i=\overline{1,3}); \\
\sup\limits_{(x,y,z,t,\tau)\in T\times[0,T_0]} |f_{i,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s)| \le \\
\le \beta_9, (i=\overline{1,3}; j=0,1); \\
\sup\limits_{(x,y,z,t,\tau)\in T\times[0,T_0]} |J_{i,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s)| \le
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\le \beta_{10},(i=\overline{1,3};\ j=0,1);\dfrac{\partial}{\partial l_j}f_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+\\
+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\equiv f_{i,l_i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+\\
+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s),(i=\overline{1,3};\ j=0,1),\\
l_1=x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},l_2=y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},l_3=z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};\\
\dfrac{\partial}{\partial l_j}J_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\equiv J_{i,l_i}(x+\\
+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s),(i=\overline{1,3};\ j=0,1);\\
\beta_0=\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5,\beta_6,\beta_7,\beta_8,\beta_9,\beta_{10});\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}\,|\xi|d\xi\le 1,\\
\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_{R^3}e^{-(\xi^2+\tau^2+\eta^2)}d\xi d\tau d\eta=1,\int_0^{T_0}\lambda(t)\dfrac{1}{t}dt=q_0,\int_0^{T_0}\lambda(t)tdt=q_1,\int_0^{T_0}\lambda(t)dt=q_2,\\
\tilde{q}=\max(q_0,q_1,q_2).
\end{cases}
\qquad (2.1.24)
$$

Чтобы оценить u,υ,w, учитывая новые переменные:

$$\frac{s_1-x}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_1,\frac{s_2-y}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_2,\frac{s_3-z}{2\sqrt{\mu t}}=\tau_3,$$

или

$$\frac{s_1-x}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_1,\frac{s_2-y}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_2,\frac{s_3-z}{2\sqrt{\mu(t-s)}}=\tau_3,$$

систему (2.1.14) преобразуем к виду

$$
\begin{cases}
u=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times\\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+\\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},\\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds,\\
\upsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\upsilon_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times\\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds, \\
w=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))w_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds,
\end{cases}
\tag{2.1.25}
$$

где $J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3$:

$$
J_i(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\tau_i\frac{F_0(x+\tau_1, y+\tau_2, z+\tau_3;t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2+\tau_3^2)^3}}, i=\overline{1,3}. \tag{2.1.26}
$$

Предложение 2.2.1. В условиях, когда функции $u,\upsilon,w\in C^{3,3,3,0}(T)$, то очевидно, имеют место

$$
\|u\|_{C^{3,0}}\le N_1, \|\upsilon\|_{C^{3,0}}\le N_1, \|w\|_{C^{3,0}}\le N_1, 0<N_1=\text{const}; C^{3,0}(T)\equiv C^{3,3,3,0}(T). \tag{2.1.27}
$$

Доказательство. В самом деле, оценивая (2.1.25), имеем

$$
\begin{cases}
|u|=\Big|\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\
z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+ \\
+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\,s\Big|\le\dfrac{\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+ \\
+\dfrac{2\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\le\beta_0(1+2T_0)=k_1; \\
|\upsilon|\le\dfrac{\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{2\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\
\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\le\beta_0(1+2T_0)=k_1; |w|\le\dfrac{\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+ \\
+\dfrac{2\beta_0}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\le\beta_0(1+2T_0)=k_1
\end{cases}
\tag{2.1.28}
$$

или: $\|u\|_{C(T)}\le k_1, \|\upsilon\|_{C(T)}\le k_1, \|w\|_{C(T)}\le k_1$.

Аналогично, оценивая частные производные с 1-го до 3-го порядка, включительно, и учитывая

$$\begin{cases} \|v\|_{C^{3,0}(T)} = \|u\|_{C^{3,0}(T)} + \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} + \|w\|_{C^{3,0}(T)};\|u\|_{C^{3,0}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le3}\|D^k u\|_{C(T)}, \\ \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le3}\|D^k \upsilon\|_{C(T)}, \|w\|_{C^{3,0}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le3}\|D^k w\|_{C(T)}; k=0: D^0u(x,y,z,t)\equiv u, \\ D^0\upsilon(x,y,z,t)\equiv\upsilon, D^0w(x,y,z,t)\equiv w; k\neq0: D^ku=\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, \\ D^k\upsilon=\dfrac{\partial^{|k|}\upsilon}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^kw=\dfrac{\partial^{|k|}w}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, |k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i, (\alpha_i=0,1,2,3; i=\overline{1,3}), \end{cases}$$

получим (2.1.27), где $N_1=20k_1$.

Поэтому основным фактором являются оценки: u_t,υ_t,w_t в $L^2_\lambda(0,T_0)$. С этой целью, дифференцируя (2.1.25) по t для $t>0$, далее, оценивая и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)$, и, затем интегрируя $(0,T_0)$, получим

$$\begin{cases} \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int_0^{T_0}\lambda(t)|u_t(x,y,z,t)|^2dt \le \beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+2(6\sqrt{\mu t}+1)]^2dt, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int_0^{T_0}\lambda(t)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2dt \le \beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+2(6\sqrt{\mu t}+1)]^2dt, \\ \sup\limits_{(x,y,z)\in R^3}\int_0^{T_0}\lambda(t)|w_t(x,y,z,t)|^2dt \le \beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+2(6\sqrt{\mu t}+1)]^2dt. \end{cases} \qquad (2.1.29)$$

Значит,

$$\begin{cases} \|u_t\|_{L^2_\lambda} \le (\beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+12\sqrt{\mu t}+2]^2dt)^{\frac{1}{2}} \le 60\beta_0\sqrt{\tilde{q}}(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}) = \\ = M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}), M^*=60\beta_0\sqrt{\tilde{q}}, \\ \|\upsilon_t\|_{L^2_\lambda} \le (\beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+12\sqrt{\mu t}+2]^2dt)^{\frac{1}{2}} \le M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}), \\ \|w_t\|_{L^2_\lambda} \le (\beta_0^2\int_0^{T_0}\lambda(t)[3\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}}+12\sqrt{\mu t}+2]^2dt)^{\frac{1}{2}} \le M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}). \end{cases} \qquad (2.1.30)$$

Отсюда, учитывая норму $G^2_\lambda(T)$ с учетом (2.1.27), (2.1.30) и (2.1.22), имеем

$$\|U\|_{G^2_\lambda(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda)}(T)} \le 3[N_1+M^*(\sqrt{\mu}+\frac{2}{15})].$$

Лемма 2.2.1. Если выполняются условия теоремы 2.1.1 и (2.1.20), то функции u, υ, w ограничены в смысле нормы $G^2_{\lambda}(T)$.

II. Рассмотрим $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, когда выполняется (2.1.21). При этом

$$\begin{cases} \|U\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}; \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} = \|u\|_{C^{3,0}(T)} + \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} = \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} = \|w\|_{C^{3,0}(T)} + \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|u_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt)^{\frac{1}{2}}, \\ \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|w_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{2.1.31}$$

Далее, докажем ограниченность функций u, υ, w в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ с учетом результатов теоремы 2.1.1, т.е. когда решение системы Навье-Стокса представляется в виде (2.1.25), которое удовлетворяет условиям (2.2), (2.3) и (2.1.1). При этом очевидно, что функции u, υ, w ограничены в $C^{3,3,3,0}(T)$, т.е. имеет место (2.1.27). Поэтому, чтобы оценить функции u, υ, w в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, в свою очередь, надо оценить функции u_t, υ_t, w_t в $L^2_{\lambda\Omega}$.

Для этого, (2.1.25) дифференцируя по t для $t>0$ и учитывая весовые функции $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, имеем

$$\begin{cases} \int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|u_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt \le \beta_0^2 \int_0^{T_0}\int_{R^3} \Omega(x,y,z)\lambda(t)\times \\ \times[3\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}} + 12\sqrt{\mu t} + 2]^2 dxdydzdt \le \beta_0^2 \int_0^{T_0} \lambda(t)[3\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}} + 12\sqrt{\mu t} + 2]^2 dt, \\ \int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt \le \beta_0^2 \int_0^{T_0}\int_{R^3} \Omega(x,y,z)\lambda(t)\times \\ \times[3\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}} + 12\sqrt{\mu t} + 2]^2 dxdydzdt \le \beta_0^2 \int_0^{T_0} \lambda(t)[3\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}} + 12\sqrt{\mu t} + 2]^2 dt, \\ \int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|w_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt \le \beta_0^2 \int_0^{T_0} \lambda(t)[3\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{t}} + 12\sqrt{\mu t} + 2]^2 dt. \end{cases} \tag{2.1.32}$$

Тогда (2.1.32) оценивая в смысле нормы $L^2_{\lambda\Omega}(T)$, получим

$$\begin{cases} \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}), \\ \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}),\ \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le M^*(\sqrt{\mu}+\dfrac{2}{15}), M^* = 60\beta_0\sqrt{\tilde{q}}. \end{cases} \quad (2.1.33)$$

Отсюда, учитывая (2.1.27), (2.1.31) и (2.1.33), следует

$$\|U\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} \le 3[N_1 + M^*(\sqrt{\mu}+\frac{2}{15})].$$

Лемма 2.2.2. При условиях теоремы 2.1.1 и (2.1.21) функции u,υ,w ограничены в смысле нормы $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§2.2. Предельный случай очень малой вязкости

Известно, что предельный переход к очень малой вязкости следует выполнить не в уравнениях Навье-Стокса, а в решении этих уравнений путем приближения коэффициента вязкости к нулю [2].

Предельный же случай, который рассмотрим в этом параграфе, относится к результатам теоремы 2.1.1.

Пусть выполняются результаты теоремы 2.1.1.Тогда имеем [см. §2.1.1, (2.1.25)]:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s) - J_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\ z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds, \\ \upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\upsilon_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\big[f_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s) - J_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\ z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\big]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds, \\ w = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))w_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \end{cases}$$

$$\begin{cases}\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\left[f_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+\right.\\ +2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},\\ \left.z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau\end{cases} \quad (2.2.1)$$

с условиями (2.2), (2.3) и

$$\begin{cases}J_x\equiv J_1, J_y\equiv J_2, J_z\equiv J_3:\\ J_i(x,y,z,t)=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\tau_i\dfrac{F_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2+\tau_3^2)^3}}, i=\overline{1,3}.\end{cases} \quad (2.2.2)$$

С другой стороны, для идеальной несжимаемой жидкости ($\mu=0$) с условием Стокса, решение получено в виде (0.10), т.е.

$$\begin{cases}\overline{u}(x,y,z,t)=\overline{u}_0(x,y,z)+\int\limits_0^t(\overline{f}_1(x,y,z,\tau)-\overline{J}_x(x,y,z,\tau))d\tau,\\ \overline{\upsilon}(x,y,z,t)=\overline{\upsilon}_0(x,y,z)+\int\limits_0^t(\overline{f}_2(x,y,z,\tau)-\overline{J}_y(x,y,z,\tau))d\tau,\\ \overline{w}(x,y,z,t)=\overline{w}_0(x,y,z)+\int\limits_0^t(\overline{f}_3(x,y,z,\tau)-\overline{J}_z(x,y,z,\tau))d\tau\end{cases} \quad (2.2.3)$$

с условиями

$$\overline{u}_x+\overline{\upsilon}_y+\overline{w}_z=0, \quad (2.2.4)$$

$$\begin{cases}\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}\in\tilde{C}^{3,3,3,1}(T):\overline{u}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{u}_0(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{\upsilon}_0(x,y,z),\\ \overline{w}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{w}_0(x,y,z),\forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0].\end{cases} \quad (2.2.5)$$

Чтобы оценить близости решений (2.2.1), (2.2.3) в смысле $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, когда $\mu\to 0$,и $u_0,\upsilon_0,w_0,\overline{u}_0,\overline{\upsilon}_0,\overline{w}_0\in C^{3,3,3}(R^3)$, $f_i,\overline{f}_i\in C^{4,0}(T),J_i,\overline{J}_i\in C^{3,0}(T),(i=\overline{1,3})$, требуются условия:

1) $\left|D^k(u_0-\overline{u}_0)\right|,\left|D^k(\upsilon_0-\overline{\upsilon}_0)\right|,\left|D^k(w_0-\overline{w}_0)\right|<\delta_{1\mu},\forall(x,y,z)\in R^3,$

$$\left.\begin{array}{l}\left|D^k[u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})-u_0(x,y,z)]\right|\\ \left|D^k[\upsilon_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})-\upsilon_0(x,y,z)]\right|\\ \left|D^k[w_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})-w_0(x,y,z)]\right|\end{array}\right\}\le \quad (2.2.6)$$

$$\le N_{01}\sqrt{\mu}(|\tau_1|+|\tau_2|+|\tau_3|),\forall(x,y,z)\in R^3;$$

2) $\int\limits_0^{T_0}\{\left|D^k[f_i(x,y,z,\tau)-\overline{f}_i(x,y,z,\tau)]\right|+\left|D^k[J_i(x,y,z,\tau)-\overline{J}_i(x,y,z,\tau)]\right|\}d\tau<$

$<\delta_{2\mu},\forall(x,y,z,\tau)\in T;\left|D^k[f_i-\overline{f}_i]\right|+\left|D^k[J_i-\overline{J}_i]\right|<\delta_{3\mu},\forall(x,y,z,t)\in T,$

$\left|D^k[f_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-f_i(x,y,z;s)]\right|\le$

$\le N_{02}(t,s)\sqrt{\mu}(|\tau_1|+|\tau_2|+|\tau_3|),i=\overline{1,3},$

$\left|f_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right|\le N_{03},$

$i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3},\forall(x,y,z,t)\in T,$

$\left|D^k[J_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_i(x,y,z;s)]\right|\le$

$\le N_{04}(t,s)\sqrt{\mu}(|\tau_1|+|\tau_2|+|\tau_3|),i=\overline{1,3},\forall(x,y,z,t)\in T,$

$\left|J_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right|\le N_{05},$

$i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3},\forall(x,y,z,t)\in T;\int\limits_0^{T_0}N_{0i}(t,s)ds\le N_{06},(i=2,4),\forall t\in[0,T_0];$

$$N_0=\max(N_{01},N_{03},N_{05},N_{06});\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\frac{1}{\sqrt{t}}+12N_0\sqrt{t}]^2dt\le\tilde{q}. \qquad (2.2.7)$$

Здесь, например $k=0:D^0\psi(x,y,z,t)\equiv\psi;k\ne0:D^k\psi=\dfrac{\partial^{|k|}\psi}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}};$

$$|k|=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i,(0\le|k|\le3,\alpha_i=0,1,2,3;i=\overline{1,3}).$$

Очевидно, что оценки относительно $\|u-\overline{u}\|_{C^{3,0}(T)},\|\upsilon-\overline{\upsilon}\|_{C^{3,0}(T)},\|w-\overline{w}\|_{C^{3,0}(T)}$ будут порядка $O(\sqrt{\mu})$.

В самом деле, оценивая (2.2.1), (2.2.3), имеем

$$|u-\overline{u}|\le\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))[|u_0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})-$$

$$-u_0(x,y,z)|+|u_0(x,y,z)-\overline{u}_0(x,y,z)|]d\tau_1d\tau_2d\tau_3+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times$$

$$\times[|f_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-f_1(x,y,z;s)|+$$

$$+|f_1(x,y,z;s)-\overline{f}_1(x,y,z;s)|+|J_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+$$

$$+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)-J_1(x,y,z;s)|+|J_1(x,y,z;t-s)-\overline{J}_1(x,y,z;s)|]d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\le$$

$$\le\delta_{1\mu}+\delta_{2\mu}+9N_0\sqrt{\mu}\le\delta_\mu+9N_0\sqrt{\mu},\delta_\mu=\sum_{i=1}^{3}\delta_{i\mu}.$$

Аналогично, имеем

$$\begin{cases} |\upsilon-\bar{\upsilon}| \le \delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}, \\ |w-\bar{w}| \le \delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}. \end{cases}$$

Следовательно, получим

$$\begin{cases} \|u-\bar{u}\|_{C(T)} \le \delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}, \\ \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{C(T)} \le \delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}, \\ \|w-\bar{w}\|_{C(T)} \le \delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}. \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Аналогичным образом, получим и оценки относительно выражений, где содержатся частные производные функции u,υ,w и $\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}$ до третьего порядка, включительно, т.е.

$$\begin{cases} \|u-\bar{u}\|_{C^{3,0}(T)} \le \gamma_1(\delta_\mu,\mu), \\ \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{C^{3,0}(T)} \le \gamma_1(\delta_\mu,\mu), \\ \|w-\bar{w}\|_{C^{3,0}(T)} \le \gamma_1(\delta_\mu,\mu), \gamma_1(\delta_\mu,\mu) = 20(\delta_\mu + 9N_0\sqrt{\mu}). \end{cases} \qquad (2.2.9)$$

Отсюда видно

$$\|u-\bar{u}\|_{C^{3,0}(T)}, \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{C^{3,0}(T)}, \|w-\bar{w}\|_{C^{3,0}(T)} \le O(\sqrt{\mu}), \qquad (2.2.10)$$

если $\delta = \sqrt{\mu}$.

Далее, чтобы оценить

$$\|u-\bar{u}\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}, \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}, \|w-\bar{w}\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)},$$

необходимо получить оценки: $\|u_t-\bar{u}_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)}, \|\upsilon_t-\bar{\upsilon}_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)}, \|w_t-\bar{w}_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)}$.

Для этого, учитывая производную (2.2.1) по t для $t>0$ и

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \bar{f}_1(x,y,z,t) - \bar{J}_1(x,y,z,t), \\ \bar{\upsilon}_t = f_2(x,y,z,t) - J_2(x,y,z,t), \\ \bar{w}_t = f_3(x,y,z,t) - J_3(x,y,z,t), \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

и оценивая их разность, и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, а, затем, интегрируя по области $R^3\times(0,T_0)$ с учетом (2.2.9), имеем

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|u_t(x,y,z,t)-\bar{u}_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt \le \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\frac{1}{\sqrt{t}} + \\ +12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt \le 4\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[(3\beta_1\sqrt{\mu}\frac{1}{\sqrt{t}}+12N_0\sqrt{\mu t})^2+\delta^2_{3\mu}]dt \le 4[\mu\tilde{q}+\delta^2_{3\mu}\tilde{q}], \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)-\bar{\upsilon}_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{t}}+ \\
+12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt \le 4[\mu\tilde{q}+\delta_{3\mu}^2\tilde{q}], \\
\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|w_t(x,y,z,t)-\bar{w}_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{t}}+ \\
+12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt \le 4[\mu\tilde{q}+\delta_{3\mu}^2\tilde{q}].
\end{cases}
$$

Отсюда получим

$$
\begin{cases}
\left\|u_t-\bar{u}_t\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le (\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{t}}+12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt)^{\frac{1}{2}} \le \\
\le (4[\mu\tilde{q}+\delta_{3\mu}^2\tilde{q}])^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{k^*\mu}, k^*=8\tilde{q}, \delta_\mu=\sum\limits_{i=1}^{3}\delta_{i\mu}=\sqrt{\mu}; \\
\left\|\upsilon_t-\bar{\upsilon}_t\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le (\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{t}}+12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{k^*\mu}; \\
\left\|w_t-\bar{w}_t\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le (\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[3\beta_1\sqrt{\mu}\dfrac{1}{\sqrt{t}}+12N_0\sqrt{\mu t}+\delta_{3\mu}]^2 dt)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{k^*\mu}.
\end{cases} \tag{2.2.12}
$$

Тогда с учетом (2.2.10), (2.2.12), имеем

$$
\begin{cases}
\left\|u-\bar{u}\right\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} \le \gamma_2(\delta_\mu,\mu), \\
\left\|\upsilon-\bar{\upsilon}\right\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} \le \gamma_2(\delta_\mu,\mu),\ \left\|w-\bar{w}\right\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} \le \gamma_2(\delta_\mu,\mu); \\
\gamma_2(\delta_\mu,\mu)=C^*\sqrt{\mu}+20\delta_\mu, C^*=\sqrt{k^*}+180N_0.
\end{cases} \tag{2.2.13}
$$

Поэтому учитывая (2.2.13), получим

$$
\left\|\bar{U}\right\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\left\|u-\bar{u}\right\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}+\left\|\upsilon-\bar{\upsilon}\right\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}+\left\|w-\bar{w}\right\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} \le 3\gamma_2(\delta_\mu,\mu). \tag{2.2.14}
$$

Лемма 2.2.1. Если выполняются условия теоремы 2.1.1 и (2.2.6), (2.2.7), то относительно решений (2.2.1) и (2.2.3) в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ при $\mu\to 0$ допускается оценка (2.2.14).

Утверждение 2.2.1. При условиях леммы 2.2.1, когда $\delta=\sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Заключение 2.1. В условиях леммы 2.2.1 при обращении параметра $\mu\to 0$ доказано, что решение системы Навье-Стокса с вязкостью (2.2.1) сходится к решению вырожденной системы (2.2.3) в смысле $G^2_{\lambda\Omega}(T)$. При этом система (2.2.1) имеет единственное условно-гладкое решение в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§2.3. Решение задачи Навье-Стокса с условием (a_2)

Разработанный метод решения системы (2.1) связан с функциями $\theta_i, (i=\overline{1,3})$, где эти функции преобразуют (2.1) к системам (2.6), (2.7) с условием (2.8).

При условии

a_1) $\mathrm{rot}\tilde{\theta}=0$; $\mathrm{rot}\nu\neq 0,\ \nu=(u,\upsilon,w)$

система (2.1) изучена в параграфах §2.1, §2.2. Здесь рассмотрим случай

a_2) $\mathrm{div}\tilde{\theta}=0$; $\mathrm{rot}\nu\neq 0,\ \nu=(u,\upsilon,w)$,

когда, как необходимое условие, имеет место

$a_{2,0}$) $\mathrm{div}\tilde{\theta}^0=0.$

С другой стороны, в случае (a_2) течение рассматривается со средней величиной вязкости

$0<\mu=\mu_0=\mathrm{const}<+\infty$, $t\in[0,T_0], T_0<+\infty$,

так как относительно функций $\theta_i, (i=\overline{1,3})$ порождаются нелинейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода по переменной $t\in[0,T_0]$.

Если входные данные:

1) $f_i\in C^{4,1}(T=R^3\times[0,T_0]), C^{4,1}(T)\equiv C^{4,4,4,1}(T), i=\overline{1,3};$

2) $u_0\in C^4(R^3), \upsilon_0\in C^4(R^3), w_0\in C^4(R^3); C^4(R^3)\equiv C^{4,4,4}(R^3)$,

то решение системы (2.1) ищем в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$:

$$\begin{cases}
\|\nu\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}=\|u\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}+\|\upsilon\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}+\|w\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}; \|u\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le 3}\left\|D^k u\right\|_{C(T)}+\|u_t\|_{C(T)},\\
\|\upsilon\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le 3}\left\|D^k \upsilon\right\|_{C(T)}+\|\upsilon_t\|_{C(T)}, \|w\|_{\tilde{C}^{3,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le 3}\left\|D^k w\right\|_{C(T)}+\|w_t\|_{C(T)},\\
\tilde{C}^{3,1}(T)\equiv\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: D^k u, D^k\upsilon, D^k w\in C(T); u_t,\upsilon_t,w_t\in C(T)\},\\
k=0: D^0u(x,y,z,t)\equiv u, D^0\upsilon(x,y,z,t)\equiv\upsilon, D^0w(x,y,z,t)\equiv w;\\
k\neq 0: D^k u=\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k\upsilon=\dfrac{\partial^{|k|}\upsilon}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k w=\dfrac{\partial^{|k|}w}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},\\
|k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i, (\alpha_i=0,1,2,3; i=\overline{1,3}).
\end{cases}$$

Пространство $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$ отличается от $C^{3,3,3,1}(T)$ тем, что не содержит члены со смешанными производными, учитывающие производные 1-го порядка по *t*. Введение такого пространства достаточно для доказательства гладкости решений задачи (2.1)-(2.3) с условием (a_2).

Пусть функции $\tilde{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \nu = (u, \upsilon, w)$ допускают условия

$$\begin{cases} \operatorname{div}\tilde{\theta} = 0, \operatorname{rot}\nu \neq 0, \operatorname{div}\nu = 0, \\ 0 < \mu = \mu_0 = \text{const} < +\infty, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

тогда имеем следующее утверждение.

Утверждение 2.3.1. Системы (2.6), (2.7) эквивалентно преобразуются к виду

$$\begin{cases} \Delta J = -F_0,\ J \equiv \dfrac{1}{\rho}P + \dfrac{1}{2}Q,\ F_0 \equiv -(f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}),\ Q \equiv u^2 + \upsilon^2 + w^2, \\ u_t = f_1 + \mu\Delta u - J_x, \\ \upsilon_t = f_2 + \mu\Delta\upsilon - J_y, \\ w_t = f_3 + \mu\Delta w - J_z, \\ \theta_i = D_i\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right], i = \overline{1,3}, \\ \dfrac{1}{\rho}P = -\dfrac{1}{2}Q + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{R^3} F_0(s_1, s_2, s_3, t)\dfrac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, r = \sqrt{(x - s_1)^2 + (y - s_2)^2 + (z - s_3)^2}, \end{cases} \tag{2.3.2}$$

когда выполняются условия (2.2), (2.3), (2.3.1) и при этом система (2.3.2) разрешима в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

Доказательство. Воспользуемся преобразованием системы (2.6), которое приводит систему к уравнению Пуассона [см. «алгоритм пуассонизации системы» (2.1.3), §2.1], т.е. дифференцируя в системе (2.6) первое уравнение по x, второе – по y, третье – по z, а, затем, суммируя их с учетом (2.2) и (2.3.1), получим

$$\Delta J = -F_0, \tag{2.3.3}$$

где учитываются

$$\begin{cases} \mu\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(\Delta u) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\Delta\upsilon) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\Delta w)\right] = \mu\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u_x + \upsilon_y + w_z) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(u_x + \upsilon_y + w_z) + \right. \\ \left. + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}(u_x + \upsilon_y + w_z)\right] = 0, \\ \Delta(\dfrac{1}{2}Q + \dfrac{1}{\rho}P) = -(-f_{1x} - f_{1y} - f_{1z}), F_0 \equiv -(f_{1x} + f_{2y} + f_{3z}),\ J \equiv \dfrac{1}{\rho}P + \dfrac{1}{2}Q. \end{cases}$$

Поэтому имеем

$$J = \frac{1}{4\pi}\int_{R^3} F_0(s_1, s_2, s_3, t)\frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \tag{2.3.4}$$

причем $J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3$:

$$J_i(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\tau_i\frac{F_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}},i=\overline{1,3}.$$

Если J – решение уравнения (2.3.3), то подставляя

$$J_x\equiv\frac{1}{\rho}P_x+\frac{1}{2}Q_x,J_y\equiv\frac{1}{\rho}P_y+\frac{1}{2}Q_y,J_z\equiv\frac{1}{\rho}P_z+\frac{1}{2}Q_z, \qquad (2.3.5)$$

в систему (2.6), получим

$$\begin{cases}u_t=f_1+\mu\Delta u-J_x-\theta_1,\\ \upsilon_t=f_2+\mu\Delta\upsilon-J_y-\theta_2,\\ w_t=f_3+\mu\Delta w-J_z-\theta_3,\end{cases} \qquad (2.3.6)$$

т.е. уравнения полученных систем (2.3.3), (2.3.6) являются первым, вторым, третьим и четвертым уравнениями системы (2.3.2).

Далее, учитывая

$$\begin{cases}u=u_0+U_1,\upsilon=\upsilon_0+U_2,w=w_0+U_3,\forall(x,y,z,t)\in T;\\ U_i\Big|_{t=0}=0,i=\overline{1,3};u_{0x}+\upsilon_{0y}+w_{0z}=0;U_{1x}+U_{2y}+U_{3z}=0\end{cases} \qquad (2.3.7)$$

получим систему

$$\begin{cases}U_{it}=f_i-J_i-\theta_i+\mu\Delta U_i+\mu\psi_i,i=\overline{1,3},\\ \psi_1\equiv\Delta u_0,\psi_2\equiv\Delta\upsilon_0,\psi_3\equiv\Delta w_0;\psi_i=\psi_i(x,y,z)\in C^2(R^3)\equiv C^{2,2,2}(R^3).\end{cases} \qquad (2.3.8)$$

Следовательно, из системы (2.3.8), имеем

$$\begin{cases}U_i=H_i^0-\int_0^t\int_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\theta_i(s_1,s_2,s_3,\tau)ds_1ds_2ds_3d\tau\equiv B_i\theta_i,\\ H_i^0=\int_0^t\int_{R^3}\exp(-\frac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}[f_i(s_1,s_2,s_3,\tau)-J_i(s_1,s_2,s_3,\tau)+\\ +\mu\psi_i(s_1,s_2,s_3)]ds_1ds_2ds_3d\tau=\frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))[f_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+\\ +2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)-J_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)+\\ +\mu\psi_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s})]d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds,i=\overline{1,3},\end{cases} \qquad (2.3.9)$$

учитывая новые переменные:

$$\frac{s_1-x}{2\sqrt{\mu(t-\tau)}}=\tau_1,\frac{s_2-y}{2\sqrt{\mu(t-\tau)}}=\tau_2,\frac{s_3-z}{2\sqrt{\mu(t-\tau)}}=\tau_3,(t-\tau=s).$$

Поэтому решение задачи (2.1)-(2.3) представляется в виде

$$
\begin{cases}
u=-\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\theta_1(s_1,s_2,s_3,\tau)\times \\
\times ds_1ds_2ds_3d\tau+u_0+H_1^0\equiv\Phi_1\theta_1, \\
\upsilon=-\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\theta_2(s_1,s_2,s_3,\tau)\times \\
\times ds_1ds_2ds_3d\tau+\upsilon_0+H_2^0\equiv\Phi_2\theta_2, \\
w=-\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-\tau)})\dfrac{1}{8(\sqrt{\pi\mu(t-\tau)})^3}\theta_3(s_1,s_2,s_3,\tau)\times \\
\times ds_1ds_2ds_3d\tau+w_0+H_3^0\equiv\Phi_3\theta_3,
\end{cases}
\qquad (2.3.10)
$$

где относительно функций $\theta_i, (i=\overline{1,3})$, получим

$$
\begin{cases}
\theta_1=(\Phi_2\theta_2)(\Phi_1\theta_1)_y+(\Phi_3\theta_3)(\Phi_1\theta_1)_z-(\Phi_2\theta_2)(\Phi_2\theta_2)_x-(\Phi_3\theta_3)(\Phi_3\theta_3)_x\equiv \\
\equiv D_1[\theta_1,\theta_2,\theta_3], \\
\theta_2=(\Phi_1\theta_1)(\Phi_2\theta_2)_x+(\Phi_3\theta_3)(\Phi_2\theta_2)_z-(\Phi_1\theta_1)(\Phi_1\theta_1)_y-(\Phi_3\theta_3)(\Phi_3\theta_3)_y\equiv \\
\equiv D_2[\theta_1,\theta_2,\theta_3], \\
\theta_3=(\Phi_1\theta_1)(\Phi_3\theta_3)_x+(\Phi_2\theta_2)(\Phi_3\theta_3)_y-(\Phi_1\theta_1)(\Phi_1\theta_1)_z-(\Phi_2\theta_2)(\Phi_2\theta_2)_z\equiv \\
\equiv D_3[\theta_1,\theta_2,\theta_3].
\end{cases}
\qquad (2.3.11)
$$

Частные производные функций u,υ,w:

$$
\begin{cases}
u_x=u_{0x}+H_{1x}^0(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{\tau_1}{\sqrt{\mu s}}\theta_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv(\Phi_1\theta_1)_x, \\
u_y=u_{0y}+H_{1y}^0(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{\tau_2}{\sqrt{\mu s}}\theta_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv(\Phi_1\theta_1)_y, \\
u_z=u_{0z}+H_{1z}^0(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{\tau_3}{\sqrt{\mu s}}\theta_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv(\Phi_1\theta_1)_z, \\
\upsilon_x=\upsilon_{0x}+H_{2x}^0(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{\tau_1}{\sqrt{\mu s}}\theta_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu s},y+ \\
+2\tau_2\sqrt{\mu s},z+2\tau_3\sqrt{\mu s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv(\Phi_2\theta_2)_x,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \upsilon_y = \upsilon_{0y} + H^0_{2y}(x,y,z,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\tau_2}{\sqrt{\mu s}}\theta_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv (\Phi_2\theta_2)_y, \\ \upsilon_z = \upsilon_{0z} + H^0_{2z}(x,y,z,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\tau_3}{\sqrt{\mu s}}\theta_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv (\Phi_2\theta_2)_z, \\ w_x = w_{0x} + H^0_{3x}(x,y,z,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\tau_1}{\sqrt{\mu s}}\theta_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv (\Phi_3\theta_3)_x, \\ w_y = w_{0y} + H^0_{3y}(x,y,z,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\tau_2}{\sqrt{\mu s}}\theta_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv (\Phi_3\theta_3)_y, \\ w_z = w_{0z} + H^0_{3z}(x,y,z,t) - \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\tau_3}{\sqrt{\mu s}}\theta_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv (\Phi_3\theta_3)_z, \end{cases}$$

т.е.

$(\Phi_1\theta_1)_x, (\Phi_1\theta_1)_y, (\Phi_1\theta_1)_z, (\Phi_2\theta_2)_x, (\Phi_2\theta_2)_y, (\Phi_2\theta_2)_z, (\Phi_3\theta_3)_x, (\Phi_3\theta_3)_y, (\Phi_3\theta_3)_z$

являются интегральными выражениями, которые содержат: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, а (2.3.11) – система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\theta_i \in \tilde{C}^{2,1}(T),\ i=\overline{1,3}$ по переменной t.

Лемма 2.3.1. При условии (2.3.1) система (2.3.11) имеет единственное решение $\theta_i = \phi_i \in \tilde{C}^{2,1}(T),\ i=\overline{1,3}.$

Из полученных результатов следует, что функции $(u,\upsilon,w) \in \tilde{C}^{3,1}(T),\ \theta_i \in \tilde{C}^{2,1}(T),\ i=\overline{1,3},$ определяются из системы (2.3.10) и (2.3.11). Следовательно, на основе (2.3.3), (2.3.4), получим

$$\frac{1}{\rho}P = -\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2+w^2) + \frac{1}{4\pi}\int_{R^3} F_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}. \qquad (2.3.12)$$

Отсюда видно, что (2.3.12) есть уравнение типа Бернулли, причем (2.3.11), (2.3.12) – это пятое, шестое уравнения системы (2.3.2).

Замечание 2.3.1. Согласно результатам утверждения 2.3.1, функции u,υ,w определяются из системы (2.3.10). Поэтому, учитывая (2.2), (2.3.1), (2.3.7) и

$$\begin{cases} u_x = u_{0x} + H^0_{1x}(x,y,z,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times\theta_1(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds], \\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + H^0_{2y}(x,y,z,t) - \dfrac{\partial}{\partial y}[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times\theta_2(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds], \\ w_z = w_{0z} + H^0_{3z}(x,y,z,t) - \dfrac{\partial}{\partial z}[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times\theta_3(x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds], \end{cases} \qquad (2.3.13)$$

и суммируя (2.3.13), имеем

$$0 = H^0_{1x} + H^0_{2y} + H^0_{3z} = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\{-F_0[x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+$$

$$+2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s] - \Delta J[x+2\tau_1\sqrt{\mu s}, y+2\tau_2\sqrt{\mu s}, z+2\tau_3\sqrt{\mu s}; t-s]\}\times$$

$$\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds = 0,$$

так как

$$\Delta J = -F_0.$$

Таким образом, система (2.3.10) удовлетворяет уравнению (2.2).

Теорема 2.3.1. При условиях (2.2), (2.3), (2.3.1) нестационарная задача Навье-Стокса (2.1)-(2.3) имеет единственное решение в $\tilde{C}^{3,3,3,1}(T)$.

Примечание 2.2. Если

1) $f_i \in C^{\infty,1}(T = R^3\times[0,T_0]), i=\overline{1,3};$

2) $u_0,\upsilon_0,w_0 \in C^\infty(R^3) : \psi_1 \equiv \Delta u_0, \psi_2 \equiv \Delta\upsilon_0, \psi_3 \equiv \Delta w_0; \psi_i = \psi_i(x,y,z) \in C^\infty(R^3);$

3) $0 < \mu = \mu_0 = \mathrm{const} < +\infty$, $t \in [0,T_0], T_0 < +\infty,$

и при этом выполняются условия (2.2), (2.3), (2.3.1), то система (2.3.2) разрешима в $\tilde{C}^{\infty,1}(T)$, причем имеют место (2.3.10)-(2.3.12), $u,v,w,\theta_i,P \in \tilde{C}^{\infty,1}(T)$.

§2.4. Задача Навье-Стокса с произвольными конвективными членами

В предыдущих параграфах задача Навье-Стокса (2.1)-(2.3) исследована с учетом условий (a_1), (a_2). При этом, соответственно было доказано существование условной гладкости и гладкость решения изучаемой задачи в определенных пространствах. Здесь исследуем случай, когда конвективные члены задачи Навье-Стокса произвольны.

Пусть функции $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ преобразуют (2.1) к системам вида (2.6), (2.7) с условием (2.8).

Замечание 2.4.1. В случае (a_3), параметр жидкости можно рассматривать со средней величиной вязкости

$$0<\mu=\mu_0=\text{const}<+\infty,((x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+), \tag{2.4.1}$$

и с очень малой вязкостью

$$0<\mu<1,((x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+). \tag{2.4.2}$$

В случае (2.4.1), найденное решение задачи (2.1)-(2.3) обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,1}(T)$. Но, когда параметр вязкости: $0<\mu<1,$ то решение задачи (2.1)-(2.3) ищем в пространстве $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ и в этом случае, решение задачи Навье-Стокса обладает свойством условной гладкости в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Эти факты устанавливаются при точных гладких входных данных:

1) $f_i\in C^{3,0}(T=R^3\times R_+),C^{3,0}(T)\equiv C^{3,3,3,0}(T),i=\overline{1,3},$

2) $u_0\in C^2(R^3),\upsilon_0\in C^2(R^3),w_0\in C^2(R^3);C^2(R^3)\equiv C^{2,2,2}(R^3),$

которые требуются, как необходимые условия решения системы Навье-Стокса с трением в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\begin{cases}\|v\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}=\|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}+\|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}+\|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)};\|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}=\|u\|_{C^{2,0}(T)}+\|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}},\\ \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}=\|\upsilon\|_{C^{2,0}(T)}+\|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}},\|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}=\|w\|_{C^{2,0}(T)}+\|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}},\\ \int\limits_{R_+}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)|u_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K<+\infty,\\ \int\limits_{R_+}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K<+\infty,\\ \int\limits_{R_+}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)|w_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K<+\infty,\\ \tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)=\{(x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+:u\in C^{2,2,2,0}(T);u_t\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,\infty)]\},\end{cases} \tag{2.4.3}$$

$$\begin{cases} \tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)=\{(x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+ : \upsilon\in C^{2,2,2,0}(T);\upsilon_t\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,\infty)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)=\{(x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+ : w\in C^{2,2,2,0}(T);w_t\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,\infty)]\}, \\ 0\le\lambda(t):\int\limits_0^\infty \lambda(t)\frac{1}{t}dt=q_0;0\le\Omega:\int\limits_{R^3}\Omega(x,y,z)dxdydz=1,C^{2,0}(T)\equiv C^{2,2,2,0}(T). \end{cases}$$

Результаты §2.4 получены, когда $\text{div} f=0, f=(f_1,f_2,f_3)$ [$\text{div} f\neq 0$, см. §2.1, §2.3].

Если система (2.1) приводится к системам (2.6), (2.7), а эти системы эквивалентно преобразуются:

$$\begin{cases} u_t+\theta_1=f_1-J_x+\mu\Delta u, \\ \upsilon_t+\theta_2=f_2-J_y+\mu\Delta\upsilon, \\ w_t+\theta_3=f_3-J_z+\mu\Delta w, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

$$J\equiv\frac{1}{2}Q+\frac{1}{\rho}P\ ,Q\equiv u^2+\upsilon^2+w^2,\ \text{div} v=0,\ [\text{rot} v\neq 0, v=(u,\upsilon,w)], \tag{2.4.5}$$

$$\begin{cases} \theta_1=uu_x+\upsilon u_y+wu_z-\frac{1}{2}Q_x, \\ \theta_2=u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z-\frac{1}{2}Q_y, \\ \theta_3=uw_x+\upsilon w_y+ww_z-\frac{1}{2}Q_z, \end{cases} \tag{2.4.6}$$

то в системах (2.4.4)-(2.4.6) содержатся неизвестные функции (u,υ,w), $J,\theta_i,(i=\overline{1,3}),P$.

Рассмотрим описание необходимых и достаточных условий совместимости этих систем в определенных пространствах.

Могут быть различные аналитические методы решения системы (2.4.4). Разработанные алгоритмы в предыдущих параграфах не применимы, так как $\theta_i,(i=\overline{1,3})$ – произвольные функции. Здесь предлагаем один из способов решения этой системы.

Исследуем систему (2.4.4). С этой целью, введем обозначения

$$\begin{cases} u=U_1(x,y,z,t)+C_1(x,y,z,t), \\ \upsilon=U_2(x,y,z,t)+C_2(x,y,z,t), \\ w=U_3(x,y,z,t)+C_3(x,y,z,t), \\ C_i(x,y,z,t)=\int\limits_0^t [\theta_i(x,y,z,\tau)+J_i(x,y,z,\tau)]d\tau, i=\overline{1,3} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

с условиями

$$\begin{cases} U_i\big|_{t=0} = U_{0i}, C_i\big|_{t=0} = 0, (i=\overline{1,3}), \forall (x,y,z) \in R^3; \\ U_{01}(x,y,z) \equiv u_0(x,y,z), U_{02}(x,y,z) \equiv \upsilon_0(x,y,z), U_{03}(x,y,z) \equiv w_0(x,y,z); \end{cases} \tag{2.4.8}$$

$$\begin{cases} \theta_i(x,y,z,t) = -J_i(x,y,z,t) + C_{it}(x,y,z,t), (i=\overline{1,3}), \\ J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3; J_i = J_i(x,y,z,t), (i=\overline{1,3}), \end{cases} \tag{2.4.9}$$

где U_i, C_i - новые неизвестные функции. При этом имеет место теорема.

Теорема 2.4.1. Пусть функции $U_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} U_{it} = \mu \Delta U_i, i=\overline{1,3}, \\ 2C_{it} = f_i + \mu \Delta C_i, i=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{2.4.10}$$

Тогда (2.4.7) является решением системы (2.4.4).

Доказательство. В самом деле, учитывая частные производные по совокупности пространственных аргументов и по t при $t>0$, т.е.

$$\begin{cases} u_t = U_{1t}(x,y,z,t) + C_{1t}(x,y,z,t), \upsilon_t = U_{2t}(x,y,z,t) + C_{2t}(x,y,z,t), \\ w_t = U_{3t}(x,y,z,t) + C_{3t}(x,y,z,t); \Delta u = \Delta U_1(x,y,z,t) + \Delta C_1(x,y,z,t), \\ \Delta \upsilon = \Delta U_2(x,y,z,t) + \Delta C_2(x,y,z,t), \Delta w = \Delta U_3(x,y,z,t) + \Delta C_3(x,y,z,t); \\ \theta_i(x,y,z,\tau) = -J_i(x,y,z,\tau) + C_{it}(x,y,z,t), i=\overline{1,3} \end{cases}$$

и подставляя эти значения в (2.4.4), имеем

$$\begin{cases} U_{1t} + 2C_{1t} - J_x = f_1 - J_x + \mu(\Delta U_1 + \Delta C_1), \\ U_{2t} + 2C_{2t} - J_y = f_2 - J_y + \mu(\Delta U_2 + \Delta C_2), \\ U_{3t} + 2C_{3t} - J_z = f_3 - J_z + \mu(\Delta U_3 + \Delta C_3). \end{cases} \tag{*}$$

Далее, учитывая (2.4.10) из системы (*) получим тождество. Это означает, что, действительно, если $U_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями уравнений системы (2.4.10), то (2.4.7) является решением системы (2.4.4). Что и требовалось доказать.

§2.4.1. Решение системы (2.4.10) зависит от параметра вязкости. Поэтому рассмотрим систему (2.4.10), когда параметр вязкости имеет различные значения.

Если имеет место (2.4.1): $0 < \mu = \mu_0 = \text{const} < +\infty$, и

$$\begin{cases} f_i \in C^{3,1}(T = R^3 \times R_+), C^{3,1}(T) \equiv C^{3,3,3,1}(T), i=\overline{1,3}, \\ u_0 \in C^2(R^3), \upsilon_0 \in C^2(R^3), w_0 \in C^2(R^3); C^2(R^3) \equiv C^{2,2,2}(R^3), \end{cases}$$

то система (2.1) имеет гладкое решение в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,1}(T)$:

$$\begin{cases} \|v\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\|u\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(u;T)}}+\|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon;T)}}+\|w\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(w;T)}};\|u\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(u;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k u\|_{C(T)}+\|u_t\|_{C(T)}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k\upsilon\|_{C(T)}+\|\upsilon_t\|_{C(T)},\|w\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(w;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k w\|_{C(T)}+\|w_t\|_{C(T)}, \\ \tilde{C}^{2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: D^k u, D^k\upsilon, D^k w\in C(T); u_t,\upsilon_t,w_t\in C(T)\}, \\ k=0: D^0u(x,y,z,t)\equiv u, D^0\upsilon(x,y,z,t)\equiv\upsilon, D^0w(x,y,z,t)\equiv w; \\ k\ne 0: D^k u=\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k\upsilon=\dfrac{\partial^{|k|}\upsilon}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k w=\dfrac{\partial^{|k|}w}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, \\ |k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i,(\alpha_i=0,1,2; i=\overline{1,3}). \end{cases}$$

Введение пространства $\tilde{C}^{2,1}(T)$ достаточно для доказательства гладкости решений задачи (2.1)-(2.3). При изучении стационарных задач $\tilde{C}^{2,1}(T)$ переходит в $C^{2,2,2}(R^3)$:

$$\|u\|_{C^2(R^3)}=\sum_{0\le|k|\le 2}\|D^k u\|_{C(R^3)}.$$

В самом деле, так как в условиях (2.4.1), (2.2), (2.3), (2.4.8) первое уравнение системы (2.4.10):

$$\begin{cases} U_{jt}=\mu\Delta U_j, j=\overline{1,3}, \\ U_j\big|_{t=0}=U_{0j},(j=\overline{1,3}), \end{cases} \tag{2.4.11}$$

имеет гладкое решение в $\tilde{C}^{2,1}(T)$, то решение системы (2.4.11) можем найти на основе преобразования Фурье [5]

$$\begin{cases} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)=\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3}e^{i(xs_1+ys_2+zs_3)}U_{0j}(x,y,z)dxdydz, j=\overline{1,3}, \\ U_{0j}(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3}e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

Тогда искомая функция $U_j(x,y,z,t)$ представима в виде

$$U_j(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int_{R^3}e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_j(s_1,s_2,s_3,t)\times$$

$$\times ds_1ds_2ds_3, \tag{2.4.12}$$

где Z_j – новая неизвестная функция, причем

$$Z_j\Big|_{t=0} = 1,\ j=\overline{1,3}.$$

При этом ставится задача нахождения функций $U_j, Z_j, j=\overline{1,3}$.

Из (2.4.12) получим

$$\begin{cases} U_{jx^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} s_1^2 \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) Z_j(s_1,s_2,s_3,t) ds_1 ds_2 ds_3, \\ U_{jy^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} s_2^2 \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) Z_j(s_1,s_2,s_3,t) ds_1 ds_2 ds_3, \\ U_{jz^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} s_3^2 \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) Z_j(s_1,s_2,s_3,t) ds_1 ds_2 ds_3, \\ U_{jt} = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) Z_{jt}(s_1,s_2,s_3,t) ds_1 ds_2 ds_3, \\ U_j = U_j(x,y,z,t),\ j=\overline{1,3}. \end{cases} \tag{2.4.13}$$

Следовательно, подставляя (2.4.13) в (2.4.11), имеем

$$Z_{jt}(s_1,s_2,s_3,t) = -\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2) Z_j(s_1,s_2,s_3,t),$$

т.е.

$$Z_j(s_1,s_2,s_3,t) = e^{-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t},\ j=\overline{1,3}. \tag{2.4.14}$$

Поэтому на основе (2.4.14) и (2.4.12) из (2.4.11), получим

$$U_j(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) e^{-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t} \times \tag{2.4.15}$$

$$\times ds_1 ds_2 ds_3,\ j=\overline{1,3}.$$

Пусть выполняются условия

$$\begin{cases} \left|D^k U_{0j}\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} \left|D^k e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\right| \times \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| ds_1 ds_2 ds_3 \le N_0 < +\infty, \\ \left|Z_{jt}\right| \le \mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\left|Z_j\right| \le \mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2), t\in[0,T_0], j=\overline{1,3}, (0\le|k|\le 2), \\ \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\displaystyle\int_{R^3} \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| (s_1^2+s_2^2+s_3^2) ds_1 ds_2 ds_3 \le N_1 < +\infty, j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

Тогда для искомой функции U_i и для частных производных:

$$U_{jx}, U_{jy}, U_{jz}, U_{jx^2}, U_{jy^2}, U_{jz^2}, U_{jxy}, U_{jxz}, U_{jyz}, U_{jt},$$

получим

$$\left|D^k U_j\right| \le \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int_{R^3} \left|D^k e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\right| \times \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| e^{-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t} \times$$

$$\times ds_1 ds_2 ds_3 \le N_0,$$

$$\left|U_{jt}\right| \le \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \mu \int_{R^3} \left|e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\right| \times \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| (s_1^2+s_2^2+s_3^2) \times$$

$$\times ds_1 ds_2 ds_3 \le \mu N_1, \forall (x,y,z,t) \in T, j = \overline{1,3}. \qquad (2.4.16)$$

Поэтому можем сделать выводы, что эти функции равномерно ограничены в области T, причем они определены единственным образом (связаны с единственностью Z_j).

С другой стороны, из (2.4.10) относительно функции $C_i, i = \overline{1,3}$,

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int_0^t \int_{R^3} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right) \frac{1}{8(\sqrt{\alpha(t-\tau)})^3} \frac{1}{2} f_i(s_1,s_2,s_3,\tau) ds_1 ds_2 ds_3 d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int_0^t \int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \frac{1}{2} f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s) \times$$

$$\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds, i = \overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\mu, \qquad (2.4.17)$$

при этом функции $C_i, i = \overline{1,3}$ допускают ограничения

$$\begin{cases} \|\Psi\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|C_i\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(C_i;T)}(T)} \le M_0 = 3\tilde{M}, \\ \Psi = (C_1,C_2,C_3), \|C_i\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(C_i;T)}(T)} = \|C_i\|_{C^{2,0}(T)} + \|C_{it}\|_{C(T)} \le \tilde{M}, (i = \overline{1,3}); \\ \left|D^k f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)\right| \le M_{02}(t,s), (i = \overline{1,3}), \\ \left|f_{it}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)\right| \le M_{03}(t,s), (i = \overline{1,3}), \\ \left|f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha t}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha t}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha t}; 0)\right| \le M_{04}, \\ \forall (x,y,z,t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,s) \in T \times T; \\ \sup_{R_+} \int_0^t M_{02}(t,s) ds = M_{05}, \sup_{R_+} \int_0^t M_{03}(t,s) ds = M_{06}, \\ M_{01} = \max(M_{04}, M_{05}, M_{06}), \tilde{M} = \frac{1}{2}(10M_{05} + M_{06} + M_{04}) \le 6M_{01}. \end{cases} \qquad (2.4.18)$$

Тогда с учетом (2.4.7), имеем

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{01}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_1(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_1(x,y,z,t), \\ \upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{02}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_2(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_2(x,y,z,t), \\ w = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{03}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_3(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_3(x,y,z,t), \\ s_1 - x = 2\tau_1\sqrt{\alpha s}, s_2 - y = 2\tau_2\sqrt{\alpha s}, s_3 - z = 2\tau_3\sqrt{\alpha s}, t-\tau = s. \end{cases} \qquad (2.4.19)$$

H_i – известные функции, причем функции u, υ, w ограничены в $\tilde{C}^{2,1}(T)$:

$$\|v\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \|u\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(u;T)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon;T)}(T)} + \|w\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(w;T)}(T)} \le M_1. \qquad (2.4.20)$$

Следовательно, с учетом (2.4.6), (2.4.9), получим

$$\begin{cases} \theta_1 = H_1\cdot H_{1x} + H_2\cdot H_{1y} + H_3\cdot H_{1z} - (H_1H_{1x} + H_2H_{2x} + H_3H_{3x}) \equiv \psi_1, \\ \theta_2 = H_1\cdot H_{2x} + H_2\cdot H_{2y} + H_3\cdot H_{2z} - (H_1H_{1y} + H_2H_{2y} + H_3H_{3y}) \equiv \psi_2, \\ \theta_3 = H_1\cdot H_{3x} + H_2\cdot H_{3y} + H_3\cdot H_{3z} - (H_1H_{1z} + H_2H_{2z} + H_3H_{3z}) \equiv \psi_3, \end{cases} \qquad (2.4.21)$$

$$\begin{cases} J_i = -\theta_i + C_{it} \equiv -\psi_i(x,y,z,t) + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))f_{it}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))f_i(x+ \\ +2\tau_1\sqrt{\alpha t}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha t}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha t}; 0)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \equiv \phi_i, i=\overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\mu, \end{cases} \qquad (2.4.22)$$

где в формулах (2.4.21), (2.4.22) все функции с правой стороны ψ_i, ϕ_i- известные функции. Тогда из (2.4.22) следует

$$J_x=\phi_1(x,y,z,t),J_y=\phi_2(x,y,z,t),J_z=\phi_3(x,y,z,t),J_x\equiv J_1,J_y\equiv J_2,J_z\equiv J_3. \quad (2.4.23)$$

Дифференцируя (2.4.23) по $x,y,z,$ соответственно, и суммируя, получим уравнение Пуассона [5]

$$\Delta J=-\Phi_0,\Phi_0\equiv-(\phi_{1x}+\phi_{2y}+\phi_{3z}) \quad (2.4.24)$$

при этом

$$J=\frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\Phi_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r},J=\frac{1}{2}Q+\frac{1}{\rho}P,Q\equiv u^2+\upsilon^2+w^2. \quad (2.4.25)$$

Утверждение 2.4.1. Если имеют место условия (2.2), (2.3), (2.4.1), то система Навье-Стокса (2.1) имеет единственное гладкое решение вида (2.4.19) в $\tilde{C}^{2,1}(T)$.

Примечание 2.4. Если $\mathrm{div}f\neq 0$, то $C_i,i=\overline{1,3}$ определяются в виде

$$\begin{cases} C_1(x,y,z,t)=\int\limits_0^t[\theta_1(x,y,z,\tau)+J_1(x,y,z,\tau)-f_1(x,y,z,\tau)+e^{-\beta\tau}u(x,y,z,\tau)]d\tau,\\ C_2(x,y,z,t)=\int\limits_0^t[\theta_2(x,y,z,\tau)+J_2(x,y,z,\tau)-f_2(x,y,z,\tau)+e^{-\beta\tau}\upsilon(x,y,z,\tau)]d\tau,\\ C_3(x,y,z,t)=\int\limits_0^t[\theta_3(x,y,z,\tau)+J_3(x,y,z,\tau)-f_3(x,y,z,\tau)+e^{-\beta\tau}w(x,y,z,\tau)]d\tau. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} U_{it}=\mu\Delta U_i,i=\overline{1,3},\\ 2C_{1t}=e^{-\beta t}u+\mu\Delta C_1,\ \ 2C_{2t}=e^{-\beta t}\upsilon+\mu\Delta C_2,\ \ 2C_{3t}=e^{-\beta t}w+\mu\Delta C_3,\beta>\frac{1}{2},\\ U_{1x}+U_{2y}+U_{2z}=0,C_{1x}+C_{2y}+C_{3z}=0. \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно, с учетом (2.4.7), получим

$$\begin{cases} u=U_1+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}\exp(-\beta(t-s))u(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s},y+\\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv D_1u,\\ \upsilon=U_2+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}\exp(-\beta(t-s))\upsilon(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s},y+\\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv D_2\upsilon,\\ w=U_3+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}\exp(-\beta(t-s))w(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s},y+\\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\equiv D_3w, \end{cases} \quad (3)$$

где: $U_j = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3,\ j=\overline{1,3},$

D_i - сжимающие операторы: $q=(2\beta)^{-1}<1$. Поэтому, на основе метода Пикара: $u_{n+1}=D_1u_n, \upsilon_{n+1}=D_2\upsilon_n, w_{n+1}=D_3w_n, n=0,1,...,$ соответственно, имеем: $(u_n,\upsilon_n,w_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}(u,\upsilon,w), \forall(x,y,z,t)\in T$, где u_0,υ_0,w_0 - начальные приближения. Тогда $u=H_1, \upsilon=H_2, w=H_3; H_i=H_i(x,y,z,t)$ - известные функции.

Далее, с учетом [(2.4.21): $\theta_i=\psi_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$] и

$$\begin{cases} J_i=-\theta_i+f_i-e^{-\beta t}H_i+C_{it}\equiv-\psi_i+f_i-e^{-\beta t}H_i+\frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times\exp(-\beta(t-s))[H_{it}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s},y+2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)-\beta H_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)]d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds+\frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))H_i(x+ \\ +2\tau_1\sqrt{\alpha t},y+2\tau_2\sqrt{\alpha t},z+2\tau_3\sqrt{\alpha t};0)d\tau_1d\tau_2d\tau_3\equiv\phi_i, i=\overline{1,3}; \alpha=2^{-1}\mu, \end{cases}$$

получим (2.4.23)-(2.4.25), т.е.: $\frac{1}{\rho}P=-\frac{1}{2}Q+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\Phi_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}.$

В этом случае, найденное решение задачи Навье-Стокса обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{2,1}(T)$, когда $\mathrm{div}f\neq0$.

§2.4.2. Пусть имеет место (2.4.2): $0<\mu<1$, и $\mathrm{div}f=0$, $f_i\in C^{3,0}(T=R^3\times R_+), i=\overline{1,3};\ u_0\in C^2(R^3), \upsilon_0\in C^2(R^3), w_0\in C^2(R^3)$.
Тогда (2.4.11) имеет решение в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, т.е.

$$U_i=\frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{0i}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times$$
$$\times d\tau_1d\tau_2d\tau_3\equiv H_i^0\in\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T), i=\overline{1,3}. \qquad (2.4.26)$$

По условию задачи (2.1)-(2.3) функции $U_{0i}, i=\overline{1,3}$ допускают условия $u_0,\upsilon_0,w_0\in C^{2,2,2}(R^3)$ и (2.4.8), то функции $U_i, i=\overline{1,3}$, найденные по формуле (2.4.26) ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, где

$$\left\|\tilde{U}\right\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}=\sum_{i=1}^{3}\left\|U_i\right\|_{\tilde{D}^2_{(U_i;\lambda\Omega)}(T)}. \qquad (2.4.27)$$

Ограниченность $U_i, i=\overline{1,3}$ по x,y,z в $C^{2,2,2,0}(T)$, очевидна

$$\begin{cases} \left\|\tilde{U}\right\|_{C^{2,0}(T)}\le\sum_{i=1}^{3}\left\|U_i\right\|_{C^{2,0}(T)}\le3M_2, C^{2,0}(T)\equiv C^{2,2,2,0}(T), \\ \left\|U_i\right\|_{C^{2,0}(T)}=\sum_{0\le|k|\le2}\left\|D^kU_i\right\|_{C(T)}\le10M_1=M_2; \left|D^kU_{0i}\right|\le M_1, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (2.4.28)$$

Поэтому проводим оценки в $L^2_{\lambda\Omega}(T)$ относительно функций $U_{it}, i=\overline{1,3}$. С этой целью, дифференцируя (2.4.26) по t для $t>0$, затем, оценивая и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, и, интегрируя по области $T=R^3\times(0,\infty)$ с учетом

$$\int_0^\infty\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|U_{it}(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, i=\overline{1,3} \qquad (2.4.29)$$

имеем: $\|U_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le 3M_1\sqrt{\mu q_0}, i=\overline{1,3}.$ Отсюда, учитывая (2.4.27), получим

$$\|\tilde{U}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(M_2+3M_1\sqrt{\mu q_0}) = M_3, q_0=\int_0^\infty \lambda(t)\frac{1}{t}dt. \qquad (2.4.30)$$

Утверждение 2.4.2. При выполнении (2.4.8), (2.4.30), функции $U_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Обсуждая, аналогично относительно $C_i, i=\overline{1,3}$ (см. (2.4.10)), имеем

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+$$
$$+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv Y_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}; \alpha=2^{-1}\mu, \qquad (2.4.31)$$

где $C_i\in\tilde{C}^{2,1}(T), i=\overline{1,3}$. Поэтому C_i допускают ограничения и в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\begin{cases}
\|\psi\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|\Psi\|_{C^{2,0}(T)} + \|\Psi_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(\tilde{M}_0+d\tilde{M}_1) = M_*, \Psi=(C_1,C_2,C_3);\\
\|\Psi_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^3 \|C_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3\tilde{M}_1 d; \|\Psi\|_{\tilde{C}^{2,0}(T)} = \sum\limits_{i=1}^3 \|C_i\|_{\tilde{C}^{2,0}_{(C_i;T)}(T)} \le M_0 = 3\tilde{M}_0;\\
\|C_i\|_{\tilde{C}^{2,0}_{(C_i;T)}(T)} \le \tilde{M}_0, (i=\overline{1,3}); \left|D^k f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+\right.\\
\left.+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right| \le M_{02}(s), \forall(x,y,z,t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,s)\in E_0 = T\times T, (i=\overline{1,3});\\
\left|f_i(x,y,z,t)\right| \le M_{03}, \forall(x,y,z,t)\in T=R^3\times R_+, (i=\overline{1,3});\\
\sup\limits_T \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t-s}}\{\sum\limits_{j=1}^3 \left|f_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+\right.\\
\left.+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right|\times\left|\tau_j\right|\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \le M_{05}, (i=\overline{1,3});\\
\sup\limits_{R_+}\int_0^t M_{02}(s)ds \le M_{04}; d=(\int_0^\infty \lambda(t)dt)^{\frac{1}{2}}, \int_{R^3}\Omega(x,y,z)dzdydx=1;\\
M_{01}=\max(M_{03},M_{04},M_{05}); \tilde{M}_0=5M_{04}\le 5M_{01}, \tilde{M}_1=\frac{1}{2}(M_{03}+M_{05})\le M_{01};\\
s_1-x=2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, s_2-y=2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, s_3-z=2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}.
\end{cases} \qquad (2.4.32)$$

Следовательно, учитывая (2.4.7), получим

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{01}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\displaystyle\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_1(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\equiv H_1, \\ \upsilon=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{02}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\displaystyle\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_2(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\equiv H_2, \\ w=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\displaystyle\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{03}(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\displaystyle\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_3(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+ \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds\equiv H_3; \\ H_i\in \bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T), i=\overline{1,3}, \end{cases} \tag{2.4.33}$$

H_i – известные функции. Так как функции $v=(u,\upsilon,w)$ по x,y,z имеют непрерывные частные производные 2-го порядка, а производные 1-го порядка по t определены для $t>0$ (т.е. $t=0$ является особой точкой для (u_t,υ_t,w_t)), то при условии (2.4.3) функции $v=(u,\upsilon,w)\in \bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Чтобы доказать ограниченность $v=(u,\upsilon,w)$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, достаточно доказать ограниченность функций $U_i, i=\overline{1,3},$ и $C_i, i=\overline{1,3}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В самом деле, так как функции $U_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ (см. (2.4.30)), а функции $C_i, i=\overline{1,3}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ (см. (2.4.32)), то относительно $v=(u,\upsilon,w)$, имеем оценку

$$\|v\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}=\|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}+\|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}+\|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}\le M_3+M_*=N_0.$$

Лемма 2.4.1. Если выполняются условия (2.2), (2.3), (2.4.8), (2.4.30), (2.4.32), то функции u,υ,w, построенные по формуле (2.4.33), ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Далее, с учетом (2.4.6), (2.4.9) получим

$$\begin{cases} \theta_1 = H_1 \cdot H_{1x} + H_2 \cdot H_{1y} + H_3 \cdot H_{1z} - (H_1 H_{1x} + H_2 H_{2x} + H_3 H_{3x}) \equiv \psi_1, \\ \theta_2 = H_1 \cdot H_{2x} + H_2 \cdot H_{2y} + H_3 \cdot H_{2z} - (H_1 H_{1y} + H_2 H_{2y} + H_3 H_{3y}) \equiv \psi_2, \\ \theta_3 = H_1 \cdot H_{3x} + H_2 \cdot H_{3y} + H_3 \cdot H_{3z} - (H_1 H_{1z} + H_2 H_{2z} + H_3 H_{3z}) \equiv \psi_3, \\ J_i = -\theta_i + C_{it} \equiv -\psi_i(x,y,z,t) + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t-s}} \times \\ \times [\sum\limits_{j=1}^{3} \tau_j f_{i,l_j}(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y + 2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)] \times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds + \dfrac{1}{2} f_i(x,y,z,t) \equiv \phi_i, (i = \overline{1,3}), \alpha = \dfrac{1}{2}\mu; \\ (l_1 = x + 2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, l_2 = y + 2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, l_3 = z + 2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}), \end{cases} \tag{2.4.34}$$

где $\psi_i, \phi_i, i = \overline{1,3}$ – известные функции. Тогда из (2.4.34) с учетом

$$J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3; J_i = J_i(x,y,z,t), (i = \overline{1,3}),$$

следует

$$\begin{cases} J_x = \phi_1(x,y,z,t), \\ J_y = \phi_2(x,y,z,t), \\ J_z = \phi_3(x,y,z,t). \end{cases} \tag{2.4.35}$$

Из (2.4.35) получим уравнение Пуассона [5]

$$\Delta J = -\Phi_0, \Phi_0 \equiv -(\phi_{1x} + \phi_{2y} + \phi_{3z}), \tag{2.4.36}$$

при этом

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \Phi_0(s_1, s_2, s_3, t) \dfrac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}; \\ J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3, J_i = J_i(x,y,z,t): \\ J_i(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \tau_i \dfrac{\Phi_0(x+\tau_1, y+\tau_2, z+\tau_3; t) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^3}}, i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Утверждение 2.4.3. Если выполняются условия (2.2), (2.3), (2.4.2), (2.4.3), то система Навье-Стокса (2.1) имеет единственное условно-гладкое решение (u, υ, w) в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, причем

$$\frac{1}{\rho} P = -\frac{1}{2}[u^2 + \upsilon^2 + w^2] + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \Phi_0(s_1, s_2, s_3, t) \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}.$$

Глава 3

Асимптотическое разложение решения уравнения Навье-Стокса с вязкостью

Теория пограничного слоя Л. Прандтля [11] положила начало восстановлению утраченной связи между теорией и практикой, поэтому оказалась чрезвычайно плодотворной. Под влиянием задач, поставленных в начале 20-го столетия, расцветом авиационной техники, новая теория быстро развилась и вскоре превратилась вместе с другими важными теориями: крыла и движения газа при больших скоростях в основу современной механики жидкости и газа.

Только на основе теории пограничного слоя могут быть объяснены явления, возникающие при достижении подъемной силой крыла максимального значения, а также, связанные с отрывом потока. Наконец, теплопередача между телом и обтекающей его жидкостью (или газом) также связана с особенностями течения в пограничном слое.

Теория устойчивости пограничного слоя позволила объяснить различие ламинарным и турбулентным течениями, также влияние других факторов (градиента давления, отсасывания, числа Маха, теплопередачи). Эта теория получила важное применение, в частности, при исследовании несущих профилей с очень малым сопротивлением (так называемых ламинаризованных профилей).

Теория пограничного слоя распространена на случай несжимаемых турбулентных течений в пограничных слоях в предположении несжимаемости среды, но все же не имеется рациональной теории вполне развившихся турбулентных течений. С развитием новых технологий возникает необходимость разрешения все более сложных задач, описывающих те или иные процессы и явления, в которых фигурируют и функции, описывающие погранслой.

В связи с этим, в этой главе изучаем задачу Навье-Стокса:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \upsilon u_y + wu_z = f_1(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_x + \mu\Delta u, \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z = f_2(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_y + \mu\Delta\upsilon, \\ w_t + uw_x + \upsilon w_y + ww_z = f_3(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_z + \mu\Delta w, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{div}\nu = \mathrm{u_x} + \upsilon_y + w_z = 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)|_{t=0} = u_0(x,y,z), \upsilon(x,y,z,t)|_{t=0} = \upsilon_0(x,y,z), \\ w(x,y,z,t)|_{t=0} = w_0(x,y,z), \forall(x,y,z) \in R^3,\ t \in [0,T_0]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Неизвестными являются скорость $\nu:(u,\upsilon,w)$ и давление P, где

1) $u_0, \upsilon_0, w_0 \in C^{2,2,2}(T)$,

2) $f_i \in C^{3,0}(T = R^3 \times [0,T_0]), C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T)$,

Возникает вопрос о разрешимости задачи (3.1)-(3.3) и условной гладкости всех его решений в классе $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. При этом необходимо обосновать справедливость асимптотического разложения [12] вида:

$$\begin{cases} u_\mu(x,y,z,t) = \bar{u}(x,y,z,t) + \xi_1(x,y,z,t) + \prod_1(x,y,z,t), \\ \upsilon_\mu(x,y,z,t) = \bar{\upsilon}(x,y,z,t) + \xi_2(x,y,z,t) + \prod_2(x,y,z,t), \\ w_\mu(x,y,z,t) = \bar{w}(x,y,z,t) + \xi_3(x,y,z,t) + \prod_3(x,y,z,t), \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{u}_0(x,y,z), \bar{\upsilon}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{\upsilon}_0(x,y,z), \\ \bar{w}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{w}_0(x,y,z); \mathrm{div}\bar{\nu} = \bar{\mathrm{u}}_\mathrm{x} + \bar{\upsilon}_y + \bar{w}_z = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} \xi_i(x,y,z,t)|_{t=0} = 0, \forall(x,y,z) \in R^3, i = \overline{1,3}; \\ \prod_i(x,y,z,t)|_{t=0} = \prod_i^0(x,y,z), \forall(x,y,z) \in R^3, i = \overline{1,3}; \\ \prod_1|_{t=0} = u_0 - \bar{u}_0 \equiv \prod_1^0, \prod_2|_{t=0} = \upsilon_0 - \bar{\upsilon}_0 \equiv \prod_2^0, \prod_3|_{t=0} = w_0 - \bar{w}_0 \equiv \prod_3^0, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $\bar{\nu} = (\bar{\mathrm{u}}, \bar{\upsilon}, \bar{w})$, $\bar{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ – новые неизвестные функции, которые удовлетворяют условиям (3.5), (3.6), а $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\begin{cases} \|\nu\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}; \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} = \|u\|_{C^{2,0}(T)} + \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} = \|\upsilon\|_{C^{2,0}(T)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} = \|w\|_{C^{2,0}(T)} + \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}; \\ 0 \le \lambda(t): \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0 < +\infty; 0 \le \Omega: \int\limits_{R^3} \Omega(x,y,z)dxdydz = 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|u_t(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|w_t(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \end{cases} \tag{3.8}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : u \in C^{2,2,2,0}(T); u_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : \upsilon \in C^{2,2,2,0}(T); \upsilon_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : w \in C^{2,2,2,0}(T); w_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}. \end{cases}$$

Поэтому, если для системы (3.1) обосновывается справедливость асимптотического разложения в виде (3.4), то построения решений $u_\mu, \upsilon_\mu, w_\mu$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ становится возможным. При этом изучены особенности и методы решений исследуемых уравнений, а также ограниченности этих решений в весовых пространствах $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Таким образом, в условиях асимптотического разложения (3.4) при обращении параметра $\mu \to 0$ доказывается, что решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ (см. результаты §3.2).

В §3.3 изучается вопрос о возможности применения асимптотического разложения (3.4) к системам Навье-Стокса для течений с трением вида

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \upsilon u_y + wu_z = f_1(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_x + \mu\Delta u + \varepsilon_\mu \Omega_1(u), \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z = f_2(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_y + \mu\Delta \upsilon + \varepsilon_\mu \Omega_2(\upsilon), \\ w_t + uw_x + \upsilon w_y + ww_z = f_3(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho}P_z + \mu\Delta w + \varepsilon_\mu \Omega_3(w) \end{cases} \tag{3.9}$$

с условиями (3.2), (3.3) и

$$\begin{cases} f_i \in C^{3,0}(T = R^3 \times [0,T_0]), C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T), i = \overline{1,3}, \\ u_0 \in C^2(R^3), \upsilon_0 \in C^2(R^3), w_0 \in C^2(R^3) \equiv C^{2,2,2}(R^3), \\ 0 \le K_i : \int\limits_{R^3} K_i(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = 1, (i = \overline{1,3}), \\ \varepsilon_\mu \in (0,1) : \varepsilon_\mu \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} \Omega_1(u) \equiv \int\limits_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)u(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \Omega_2(\upsilon) \equiv \int\limits_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\upsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \Omega_3(w) \equiv \int\limits_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)w(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{cases} \tag{3.11}$$

Неизвестными величинами являются скорость **v**: (u,v,w) и давление P.

В работе [2] были исследованы частные случаи уравнения Навье-Стокса (3.9), когда $\frac{1}{\rho}A_\tau = \varepsilon$ – кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости: $\mu = \frac{\nu}{\rho}$ ламинарного течения (A_τ-коэффициент турбулентного обмена). При этом Ω_i рассматривается, как дифференциальный оператор 2-го порядка. Результаты этих работ не применимы к полным уравнениям Навье-Стокса вида (3.9), когда Ω_i также является дифференциальным оператором 2-го порядка.

В наших исследованиях все результаты §3.1, §3.2 применяются к уравнению (3.9), где Ω_i являются интегральными операторами вида (3.11).

Замечание. Результаты параграфа 3.3 получены с учетом согласования параметров: $0 < \mu, \varepsilon_\mu < 1 : \varepsilon_\mu \xrightarrow[\mu \to 0]{} 0.$

§3.1. Асимптотическое разложение решения течения с трением

Целью параграфа §3.1 является асимптотическое разложение решения нестационарной задачи жидкости с вязкостью, описываемой уравнениями Навье-Стокса [1]. Для этого рассмотрим задачу Навье-Стокса (3.1)-(3.3), где функции u, υ, w в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§3.1.1. Пусть

$$\begin{cases} u_\mu(x,y,z,t) = \bar{u}(x,y,z,t) + \xi_1(x,y,z,t) + \prod_1(x,y,z,t), \\ \upsilon_\mu(x,y,z,t) = \bar{\upsilon}(x,y,z,t) + \xi_2(x,y,z,t) + \prod_2(x,y,z,t), \\ w_\mu(x,y,z,t) = \bar{w}(x,y,z,t) + \xi_3(x,y,z,t) + \prod_3(x,y,z,t) \end{cases} \tag{3.1.1}$$

с условиями

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{u}_0(x,y,z), \bar{\upsilon}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{\upsilon}_0(x,y,z), \\ \bar{w}(x,y,z,t)|_{t=0} = \bar{w}_0(x,y,z), \forall (x,y,z) \in R^3; \operatorname{div}\bar{v} = \bar{\mathrm{u}}_{\mathrm{x}} + \bar{\upsilon}_y + \bar{w}_z = 0, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{cases} \xi_i(x,y,z,t)|_{t=0} = 0; \prod_i(x,y,z,t)|_{t=0} = \prod_i^0(x,y,z), (i = \overline{1,3}), \forall (x,y,z) \in R^3, \\ \prod_1|_{t=0} = u_0 - \bar{u}_0 \equiv \prod_1^0, \prod_2|_{t=0} = \upsilon_0 - \bar{\upsilon}_0 \equiv \prod_2^0, \prod_3|_{t=0} = w_0 - \bar{w}_0 \equiv \prod_3^0, \end{cases} \tag{3.1.3}$$

где $\bar{v}=(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$, $\bar{\zeta}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\tilde{\Pi}=(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3)$ – новые неизвестные функции, которые удовлетворяют условию (3.1.2), (3.1.3). Тогда относительно функций: $(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}),(\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3)$, порождаются системы:

$$\begin{cases} \bar{u}_t+\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{\upsilon}^2+\bar{w}^2)_x=\bar{f}_1-\frac{1}{\rho}\bar{P}_x, \\ \bar{\upsilon}_t+\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{\upsilon}^2+\bar{w}^2)_y=\bar{f}_2-\frac{1}{\rho}\bar{P}_y, \\ \bar{w}_t+\frac{1}{2}(\bar{u}^2+\bar{\upsilon}^2+\bar{w}^2)_z=\bar{f}_3-\frac{1}{\rho}\bar{P}_z, \end{cases} \tag{3.1.4}$$

$$\Pi_{it}=\mu\Delta\Pi_i, i=\overline{1,3}, \tag{3.1.5}$$

$$\begin{cases} \xi_{1t}+\xi_1\xi_{1x}+\xi_2\xi_{1y}+\xi_3\xi_{1z}+a_1\xi_{1x}+a_2\xi_{1y}+a_3\xi_{1z}+\xi_1a_{1x}+\xi_2a_{1y}+\xi_3a_{1z}= \\ =b_1+F_1-\frac{1}{\rho}[P_x-\bar{P}_x]+\mu\Delta\xi_1, \\ \xi_{2t}+\xi_1\xi_{2x}+\xi_2\xi_{2y}+\xi_3\xi_{2z}+a_1\xi_{2x}+a_2\xi_{2y}+a_3\xi_{2z}+\xi_1a_{2x}+\xi_2a_{2y}+\xi_3a_{2z}= \\ =b_2+F_2-\frac{1}{\rho}[P_y-\bar{P}_y]+\mu\Delta\xi_2, \\ \xi_{3t}+\xi_1\xi_{3x}+\xi_2\xi_{3y}+\xi_3\xi_{3z}+a_1\xi_{3x}+a_2\xi_{3y}+a_3\xi_{3z}+\xi_1a_{3x}+\xi_2a_{3y}+\xi_3a_{3z}= \\ =b_3+F_3-\frac{1}{\rho}[P_z-\bar{P}_z]+\mu\Delta\xi_3, \\ F_i\equiv f_i-\bar{f}_i\in C^{2,0}(T), i=\overline{1,3}, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

$(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ – решение вырожденной системы ($\mu=0$, см. §2.1.2, гл.2) с условием Стокса: $\mathrm{rot}\,\bar{v}=0$. Здесь отсутствуют члены $\Delta u,\Delta\upsilon,\Delta w$, так как в этом случае получим течение без трения [2]: $\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}\in\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$.

Функции $\tilde{\Pi}=(\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3)$ - специальные функции с вязкостью, причем в функциях $\Pi_{it},(i=\overline{1,3})$ содержится особенность в точке $t=0$, т.е. $\Pi_{it},(i=\overline{1,3})$ определены для $t>0$ с условием (3.1.3) и при этом

$$\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\Pi_{it}(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\le K<+\infty, i=\overline{1,3}. \tag{3.1.7}$$

Тогда функции $\Pi_{it},(i=\overline{1,3})$ являются элементами

$\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)=\{(x,y,z,t)\in T=R^3\times[0,T_0]:\Pi_i\in C^{2,2,2,0}(T);\Pi_{it}\in L^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,T_0)],$

$0\le\lambda,\Omega\},(i=\overline{1,3}):$

$$\begin{cases} \|\tilde{\Pi}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3} \|\Pi_i\|_{\tilde{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)}, \|\Pi_i\|_{\tilde{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)} = \|\Pi_i\|_{C^{2,0}(T)} + \|\Pi_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, (i=\overline{1,3}); \\ C^{2,0}(T) \equiv C^{2,2,2,0}(T); \|\Pi_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int\limits_0^{T_0} \int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|\Pi_{it}(x,y,z,t)|^2 dxdydzdt)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Кроме того, если выполняются условия (3.1.2), (3.1.3), то в разложении (3.1.1) вырождается относительно $\bar{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ система (3.1.6), где функции $\xi_i, (i=\overline{1,3})$ играют роль остаточного члена с условием (3.1.3).

Система (3.1.6) – это система Навье-Стокса, которая состоит из дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных с переменными неизвестными коэффициентами, так как

$$\begin{cases} b_1(x,y,z,t) \equiv -(a_1 a_{1x} + a_2 a_{1y} + a_3 a_{1z}) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{\upsilon}^2 + \bar{w}^2)_x = -(\bar{u}\Pi_{1x} + \\ +\bar{\upsilon}\Pi_{1y} + \bar{w}\Pi_{1z} + \bar{u}_x\Pi_1 + \bar{u}_y\Pi_2 + \bar{u}_z\Pi_3 + \Pi_1\Pi_{1x} + \Pi_2\Pi_{1y} + \Pi_3\Pi_{1z}), \\ b_2(x,y,z,t) \equiv -(a_1 a_{2x} + a_2 a_{2y} + a_3 a_{2z}) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{\upsilon}^2 + \bar{w}^2)_y = -(\bar{u}\Pi_{2x} + \\ +\bar{\upsilon}\Pi_{2y} + \bar{w}\Pi_{2z} + \bar{\upsilon}_x\Pi_1 + \bar{\upsilon}_y\Pi_2 + \bar{\upsilon}_z\Pi_3 + \Pi_1\Pi_{2x} + \Pi_2\Pi_{2y} + \Pi_3\Pi_{2z}), \\ b_3(x,y,z,t) \equiv -(a_1 a_{3x} + a_2 a_{3y} + a_3 a_{3z}) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{\upsilon}^2 + \bar{w}^2)_z = -(\bar{u}\Pi_{3x} + \\ +\bar{\upsilon}\Pi_{3y} + \bar{w}\Pi_{3z} + \bar{w}_x\Pi_1 + \bar{w}_y\Pi_2 + \bar{w}_z\Pi_3 + \Pi_1\Pi_{3x} + \Pi_2\Pi_{3y} + \Pi_3\Pi_{3z}), \\ a_1(x,y,z,t) \equiv \bar{u} + \Pi_1, a_2(x,y,z,t) \equiv \bar{\upsilon} + \Pi_2, a_3(x,y,z,t) \equiv \bar{w} + \Pi_3 \end{cases} \tag{3.1.8}$$

в (3.1.6) содержатся функции $a_i(x,y,z,t), b_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$, которые ниже будут определены с учетом системы (3.1.4) и (3.1.5).

§3.1.2. Рассмотрим методы, которые позволяют построить функции: $\bar{v} = (\bar{u}, \bar{\upsilon}, \bar{w})$, $\bar{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$.

I. В самом деле, система (3.1.4) имеет решение (см. §2.1.2, гл.2, результаты леммы 2.1.2):

$$\begin{cases} \bar{u}(x,y,z,t) = \bar{u}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\bar{f}_1(x,y,z,\tau) - \bar{J}_x(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \bar{\upsilon}(x,y,z,t) = \bar{\upsilon}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\bar{f}_2(x,y,z,\tau) - \bar{J}_y(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \bar{w}(x,y,z,t) = \bar{w}_0(x,y,z) + \int\limits_0^t (\bar{f}_3(x,y,z,\tau) - \bar{J}_z(x,y,z,\tau))d\tau, \end{cases} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\overline{P}=-\dfrac{1}{2}\overline{Q}+\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\overline{F}_0(s_1,s_2,s_3,t)\dfrac{ds_1ds_2ds_3}{r};\overline{J}=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\overline{F}_0(s_1,s_2,s_3;t)\dfrac{ds_1ds_2ds_3}{r},\\ \overline{F}_0\equiv-(\overline{f}_{1x}+\overline{f}_{2y}+\overline{f}_{3z}),\overline{Q}\equiv\overline{u}^2+\overline{\upsilon}^2+\overline{w}^2;\overline{J}_x\equiv\overline{J}_1,\overline{J}_y\equiv\overline{J}_2,\overline{J}_z\equiv\overline{J}_3:\\ \overline{J}_i(x,y,z,t)=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\overline{F}_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)\dfrac{\tau_i d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1{}^2+\tau_2{}^2+\tau_3^2)^3}},i=\overline{1,3}.\end{cases}$$

$\overline{J}$ – удовлетворяет уравнению: $\Delta\overline{J}=-\overline{F}_0$.

При этом функции $\overline{v}=(\overline{\mathrm{u}},\overline{\upsilon},\overline{w})$ ограничены в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,1}(T)$:

$$\|\overline{v}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\|\overline{u}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}+\|\overline{\upsilon}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}+\|\overline{w}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}\le N_0, \qquad (3.1.10)$$

где

$$\begin{cases}\|\overline{u}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le2}\left\|D^k\overline{u}\right\|_{C(T)}+\|\overline{u}_t\|_{C(T)},\|\overline{\upsilon}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le2}\left\|D^k\overline{\upsilon}\right\|_{C(T)}+\|\overline{\upsilon}_t\|_{C(T)},\\ \|\overline{w}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le2}\left\|D^k\overline{w}\right\|_{C(T)}+\|\overline{w}_t\|_{C(T)};k=0:D^0\overline{u}(x,y,z,t)\equiv\overline{u},D^0\upsilon(x,y,z,t)\equiv\overline{\upsilon},\\ D^0\overline{w}(x,y,z,t)\equiv\overline{w};k\ne0:D^k\overline{u}=\dfrac{\partial^{|k|}\overline{u}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},D^k\overline{\upsilon}=\dfrac{\partial^{|k|}\overline{\upsilon}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},\\ D^k\overline{w}=\dfrac{\partial^{|k|}\overline{w}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}};|k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i,(\alpha_i=0,1,2;i=\overline{1,3}).\end{cases}$$

II. Решение системы (3.1.5) представляем в виде

$$\Pi_i=\frac{1}{8\sqrt{(\pi\mu t)^3}}\int\limits_{R^3}exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\Pi_i^0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3=\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times$$

$$\times\Pi_i^0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t},y+2\tau_2\sqrt{\mu t},z+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3\equiv N_i^0(x,y,z,t),i=\overline{1,3}, \qquad (3.1.11)$$

где N_i^0 - известные функции, $\Pi_i\in\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Если функции $\Pi_i^0,i=\overline{1,3}$ допускают условия (3.1.3), (3.1.7) и

$$\begin{cases}\left|D^k\Pi_i^0\right|\le\delta_1,\forall(x,y,z)\in R^3,i=\overline{1,3};0<\delta_1<1;(\delta_1=\sqrt{\mu});\\ k=0:D^0\Pi_i^0(x,y,z)\equiv\Pi_i^0;k\ne0:D^k\Pi_i^0=\dfrac{\partial^{|k|}\Pi_i^0}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},\\ (0\le|k|\le2);|k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i,(\alpha_i=0,1,2;i=\overline{1,3});\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2}|\xi|d\xi\le\sqrt{\pi},\int\limits_{R^3}e^{-(\xi^2+\tau^2+\eta^2)}d\xi d\tau d\eta=\sqrt{\pi^3},\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\dfrac{1}{t}dt=q_0<+\infty,\end{cases} \qquad (3.1.12)$$

то функции $\Pi_i,i=\overline{1,3}$ ограничены в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, где

$$\left\|\tilde{\Pi}\right\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \left\|\Pi_i\right\|_{\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)}. \qquad (3.1.13)$$

В самом деле, ограниченность функций $\Pi_i, i=\overline{1,3}$ в $C^{2,2,2,0}(T)$ с условиями (3.1.3), (3.1.12) очевидны (аналогичные оценки §2.2.2, гл.2):

$$\begin{cases} \left\|\tilde{\Pi}\right\|_{C^{2,0}(T)} \le \sum_{i=1}^{3} \left\|\Pi_i\right\|_{C^{2,0}(T)} \le 30\delta_1, C^{2,0}(T) \equiv C^{2,2,2,0}(T), \\ \left\|\Pi_i\right\|_{C^{2,0}(T)} = \sum_{0\le|k|\le 2} \left\|\Im^k \Pi_i\right\|_{C(T)} \le 10\delta_1, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (3.1.14)$$

Это означает, чтобы оценить функции $\Pi_i, (i=\overline{1,3})$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, необходимо, сначала оценить функции $\Pi_{it}, i=(\overline{1,3})$ в $L^2_{\lambda\Omega}$.

С этой целью, дифференцируя (3.1.11) по t для $t>0$, далее, оценивая и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, и, затем, интегрируя по области $R^3\times(0,T_0)$ с учетом (3.1.12), имеем

$$\left\|\Pi_{it}\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le 3\sqrt{\mu q_0}\,\delta_1, i=\overline{1,3}. \qquad (3.1.15)$$

Отсюда, учитывая (3.1.13), получим

$$\left\|\tilde{\Pi}\right\|_{D^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(10+3\sqrt{\mu q_0})\delta_1 \le 3(10+3\sqrt{q_0})\delta_1. \qquad (3.1.16)$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3.1.1. В условиях (3.1.3), (3.1.7), (3.1.12) система (3.1.5) имеет единственное решение в виде (3.1.11) в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Замечание 3.1.1. Отметим, что из полученных результатов следует, что функции $a_i(x,y,z,t), b_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$ в уравнениях системы (3.1.6) становятся известными. Однако, остаются неизвестными функции

$$\bar{\zeta} = (\xi_1,\xi_2,\xi_3),\ \tilde{P}_i,\ (P_x-\bar{P}_x \equiv \tilde{P}_1,\ P_y-\bar{P}_y \equiv \tilde{P}_2,\ P_z-\bar{P}_z \equiv \tilde{P}_3), i=\overline{1,3}.$$

Поэтому рассмотрим, каким образом из (3.1.6) порождаются уравнения, относительно $\tilde{P}_i$.

III. Исследуем систему (3.1.6). Здесь воспользуемся методом, который использовали в §2.4. С этой целью, введя обозначения

$$\begin{cases} \theta_1 = \xi_1\xi_{1x}+\xi_2\xi_{1y}+\xi_3\xi_{1z}+a_1\xi_{1x}+a_2\xi_{1y}+a_3\xi_{1z}+\xi_1 a_{1x}+\xi_2 a_{1y}+\xi_3 a_{1z}, \\ \theta_2 = \xi_1\xi_{2x}+\xi_2\xi_{2y}+\xi_3\xi_{2z}+a_1\xi_{2x}+a_2\xi_{2y}+a_3\xi_{2z}+\xi_1 a_{2x}+\xi_2 a_{2y}+\xi_3 a_{2z}, \\ \theta_3 = \xi_1\xi_{3x}+\xi_2\xi_{3y}+\xi_3\xi_{3z}+a_1\xi_{3x}+a_2\xi_{3y}+a_3\xi_{3z}+\xi_1 a_{3x}+\xi_2 a_{3y}+\xi_3 a_{3z} \end{cases} \qquad (3.1.17)$$

из системы (3.1.6), получим

$$\xi_{it} + \theta_i = b_i + F_i - \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i + \mu\Delta\xi_i, i = \overline{1,3} \qquad (3.1.18)$$

с условием

$$\theta_i\Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1,3}, \qquad (3.1.19)$$

где неизвестными функциями являются: $\xi_i, \theta_i, \tilde{P}_i, i = \overline{1,3}$.

Рассмотрим алгоритм для определения функции $\theta_i, \tilde{P}_i$. Для этого, введя преобразование вида

$$\begin{cases} \xi_i = \varphi_i(x,y,z,t) + C_i(x,y,z,t), i = \overline{1,3}, \\ C_i(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_i(x,y,z,\tau) + \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,\tau)]d\tau, (i = \overline{1,3}) \end{cases} \qquad (3.1.20)$$

с условиями

$$\begin{cases} \varphi_i(x,y,z,0) = 0, (i = \overline{1,3}), \\ C_i(x,y,z,0) = 0, (i = \overline{1,3}), \end{cases} \qquad (3.1.21)$$

$$\theta_i(x,y,z,t) = -\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,t) + C_{it}(x,y,z,t), (i = \overline{1,3}), \qquad (3.1.22)$$

где $\varphi_i, C_i(x,y,z,t)$ – новые неизвестные функции, имеем лемму.

Лемма 3.1.2. Если $\varphi_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \varphi_{it} = F_i + \mu\Delta\varphi_i, i = \overline{1,3}, \\ 2C_{it} = b_i + \mu\Delta C_i, i = \overline{1,3}, \end{cases} \qquad (3.1.23)$$

то (3.1.20) является решением системы (3.1.18).

Доказательство. Из (3.1.20), учитывая частные производные по совокупности пространственных аргументов и по *t*, имеем

$$\begin{cases} \xi_{it} = \varphi_{it}(x,y,z,t) + C_{it}(x,y,z,t); \Delta\xi_i = \Delta\varphi_i(x,y,z,t) + \Delta C_i(x,y,z,t); \\ \theta_i(x,y,z,\tau) = -\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,\tau) + C_{it}(x,y,z,t), i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Далее, подставляя эти значения в (2.4.4), получим

$$\varphi_{it} + 2C_{it} - \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i = b_i + F_i - \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i + \mu(\Delta\varphi_i + \Delta C_i), i = \overline{1,3}. \qquad (*)$$

Отсюда, с учетом (3.1.23) из системы (*) следует тождество. Это означает, что, действительно, если $\varphi_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями уравнений системы (3.1.23), то (3.1.20) является решением системы (3.1.18). Что и требовалось доказать.

Утверждение 3.1.1. В условиях леммы 3.1.2 решение системы (3.1.23) представляется в виде

$$\begin{cases} \varphi_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-s)})\dfrac{1}{8(\sqrt{\mu(t-s)})^3}F_i(s_1,s_2,s_3,s)\times \\ \times ds_1ds_2ds_3ds = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds, i=\overline{1,3}, \\ C_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-\dfrac{r^2}{4\alpha(t-s)})\dfrac{1}{8(\sqrt{\alpha(t-s)})^3}\dfrac{1}{2}b_i(s_1,s_2,s_3,s)\times \\ \times ds_1ds_2ds_3ds = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}b_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds, i=\overline{1,3}; \alpha=2^{-1}\mu. \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Тогда функции $\xi_i(x,y,z,t)$ определяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\xi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, \\ &z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds + \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ &\times b_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv \\ &\equiv H_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}, \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

где H_i – известные функции, $\xi_i \in \tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$.

При условиях утверждения 3.1.1 ограниченность функций $\xi_i, i=\overline{1,3},$ очевидна в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$.

В самом деле, дифференцируя (3.2.9) по *x,y,z* до второго порядка, включительно и по *t* первого порядка, и оценивая полученные выражения, имеем, что $\xi_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$. Поэтому, для удобства оценок, которые проводим относительно решений системы (3.1), ограниченность функций $\xi_i, i=\overline{1,3}$ проводим в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Учитывая результаты леммы 3.1.1 и

$$\begin{cases} F_i \in C^{3,0}(T), b_i \in C^{2,0}(T): \left|D^k F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+\right. \\ \left.+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_1, (i=\overline{1,3}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|F_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_2, \\ (i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}), \\ \left|D^k b_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_3, (i=\overline{1,3}), \\ \left|b_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_4, \\ (i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}); \forall(x,y,z,t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,s)\in T\times T;\ \delta_4=\sqrt{\mu}, \\ 0<\delta_4=\max(\tilde{\delta}_1,\tilde{\delta}_2,\tilde{\delta}_3,\tilde{\delta}_4)<1; q_1=\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)[\frac{3}{2}+\frac{6\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}\sqrt{t}]^2dt, \end{cases} \quad (3.1.26)$$

получим оценки

$$\begin{cases} \left\|\overline{\zeta}\right\|_{C^{2,0}(T)} \le 45\sqrt{\mu}, \overline{\zeta}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ \left\|\xi_{it}\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \sqrt{q_1\mu}, (i=\overline{1,3}). \end{cases} \quad (3.1.27)$$

Следовательно, учитывая норму пространства $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ для $\overline{\zeta}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, имеем

$$\left\|\overline{\zeta}\right\|_{\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(15+\sqrt{q_1})\sqrt{\mu}. \quad (3.1.28)$$

Утверждение 3.1.2. При выполнении (3.1.28), когда $\delta_4=\sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Утверждение 3.1.3. Если выполняются условия леммы 3.1.2, то имеет место

$$\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i+\theta_i=\frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t-s}}[\sum_{j=1}^3\tau_j b_{i,l_j}(x+$$
$$+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)]d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds+ \quad (3.1.29)$$
$$+\frac{1}{2}b_i(x,y,z,t)\equiv\psi_i^0(x,y,z,t), i=\overline{1,3}.$$

Далее, учитывая (3.1.17), (3.1.25), получим

$$\begin{cases} \theta_1=H_1\cdot H_{1x}+H_2\cdot H_{1y}+H_3\cdot H_{1z}+a_1H_{1x}+a_2H_{1y}+a_3H_{1z}+a_{1x}H_1+ \\ +a_{1y}H_2+a_{1z}H_3\equiv\psi_1(x,y,z,t), \\ \theta_2=H_1\cdot H_{2x}+H_2\cdot H_{2y}+H_3\cdot H_{2z}+a_1H_{2x}+a_2H_{2y}+a_3H_{2z}+a_{2x}H_1+ \\ +a_{2y}H_2+a_{2z}H_3\equiv\psi_2(x,y,z,t), \\ \theta_3=H_1\cdot H_{3x}+H_2\cdot H_{3y}+H_3\cdot H_{3z}+a_1H_{3x}+a_2H_{3y}+a_3H_{3z}+a_{3x}H_1+ \\ +a_{3y}H_2+a_{3z}H_3\equiv\psi_3(x,y,z,t), \end{cases} \quad (3.1.30)$$

где $\psi_i, i=\overline{1,3}$ – известные функции. Тогда из (3.1.29), следует

$$\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i = -\psi_i(x,y,z,t) + \psi_i^0(x,y,z,t) \equiv \phi_i, i=\overline{1,3}. \qquad (3.1.31)$$

Так как

$$P_x - \overline{P}_x \equiv \tilde{P}_1, P_y - \overline{P}_y \equiv \tilde{P}_2, P_z - \overline{P}_z \equiv \tilde{P}_3, \qquad (3.1.32)$$

то из (3.1.31) имеем

$$\frac{1}{\rho}[P_x - \overline{P}_x] = \phi_1, \frac{1}{\rho}[P_y - \overline{P}_y] = \phi_2, \frac{1}{\rho}[P_z - \overline{P}_z] = \phi_3. \qquad (3.1.33)$$

Дифференцируя (3.1.33) по x,y,z, соответственно, и, суммируя, получим уравнение Пуассона [5]

$$\Delta\frac{1}{\rho}[P - \overline{P}] = -\Phi_0, \Phi_0 \equiv -(\phi_{1x} + \phi_{2y} + \phi_{3z}). \qquad (3.1.34)$$

При этом

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}[P-\overline{P}] = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{R^3}\Phi_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \\ \dfrac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{R^3}\tau_i\frac{\Phi_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}}, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (3.1.35)$$

Теорема 3.1.1. Если функции $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}),\Pi_i,\xi_i, i=\overline{1,3}$ определяются единственным образом, как решения системы (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), то (3.1.1) является решением системы (3.1) в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Доказательство. Основываясь на результатах леммы 3.1.1 и утверждении 3.1.1 с учетом (3.1.4), получим, что функции $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}),\Pi_i,\xi_i, i=\overline{1,3}$ определяются единственным образом. Тогда для системы (3.1) обосновывается справедливость асимптотического разложения в виде (3.1.1), поэтому построение решений u_μ,υ_μ,w_μ в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ становится возможным. Что и требовалось доказать.

Утверждение 3.1.4. В условиях (3.1.10), (3.1.16), (3.1.28) функции u,υ,w, построенные по формуле (3.1.1), ограничены в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В самом деле, из обсуждений (I-III) следует, что функции (u,υ,w), построенные по формуле (3.1.1), ограничены в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, так как ограничены $\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}, \Pi_i,\xi_i, i=\overline{1,3}$ в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T),\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Следовательно, учитывая (3.1.10), (3.1.16), (3.1.28), имеем

$$\|v\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \|\bar{v}\|_{C^{2,0}(T)} + d_0\|\bar{v}_t\|_{C(T)} + \|\bar{\zeta}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le d\|\bar{v}\|_{C^{2,0}(T)} +$$

$$+\|\bar{\zeta}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le dN_0 + 3(10+3\sqrt{q_0})\sqrt{\mu} + 3(15+\sqrt{q_1})\sqrt{\mu}, \qquad (3.1.36)$$

$$d_0 = (\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)dxdydzdt)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^{T_0}\lambda(t)dt)^{\frac{1}{2}}, d = max(1,d_0),$$

$\delta_1 = \delta_4 = \delta = \sqrt{\mu}$. Что и требовалось доказать.

Замечание 3.1.2. Из результатов (3.1.16), (3.1.28) видно, что функции $\Pi_i(x,y,z,t),\xi_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$ при $\mu\to 0$ удовлетворяют $\Pi_i \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, \xi_i \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$ в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, $i=\overline{1,3}$.

§ 3.2. Поведение решения системы Навье-Стокса в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ при асимптотическом разложении, когда $\mu\to 0$

В этом параграфе доказывается, что в условиях асимптотического разложения (3.1.1) при $\mu\to 0$ решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Теорема 3.2.1. Если имеют место условия теоремы 3.1.1 и утверждение 3.1.4, то решение $v=(u,\upsilon,w)$ системы (3.1) сходится к решению $\bar{v}=(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ системы (3.1.4) при $\mu\to 0$ в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Доказательство. Пусть выполняются условия лемм 3.1.1 и 3.1.2. Тогда имеем

$$\begin{cases} \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \gamma_1\sqrt{\mu}, \\ \|\bar{\zeta}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \gamma_2\sqrt{\mu}; \gamma_2 = 3(15+\sqrt{q_1}), \gamma_1 = 3(10+3\sqrt{q_0}), \delta = \sqrt{\mu}. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Следовательно, согласно (3.1.1), получим

$$\begin{cases} u_\mu(x,y,z,t) - \bar{u}(x,y,z,t) = \xi_1(x,y,z,t) + \Pi_1(x,y,z,t), \\ \upsilon_\mu(x,y,z,t) - \bar{\upsilon}(x,y,z,t) = \xi_2(x,y,z,t) + \Pi_2(x,y,z,t), \\ w_\mu(x,y,z,t) - \bar{w}(x,y,z,t) = \xi_3(x,y,z,t) + \Pi_3(x,y,z,t) \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

и с учетом

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u-\bar{u}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|w-\bar{w}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)},$$

имеем оценку

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u-\bar{u}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|w-\bar{w}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le [3(10+3\sqrt{q_0}) +$$

$$+3(15+\sqrt{q_1})]\sqrt{\mu}. \qquad (3.2.3)$$

Отсюда следует: $u-\bar{u}\xrightarrow[\mu\to 0]{}0, \upsilon-\bar{\upsilon}\xrightarrow[\mu\to 0]{}0, w-\bar{w}\xrightarrow[\mu\to 0]{}0$ в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Что и требовалось доказать.

Замечание 3.2.1. Если $\delta=\sqrt{\mu}$, то из (3.2.3) следует

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}=\|u-\bar{u}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}+\|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}+\|w-\bar{w}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}\le O(\sqrt{\mu}). \qquad (3.2.5)$$

Утверждение 3.2.1. При условиях теоремы 3.2.1, когда $\delta=\sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§ 3.3. Интегро-дифференциальные уравнения Навье-Стокса с вязкостью

Изучим вопрос о возможности применения асимптотического разложения (3.1.1) к системам Навье-Стокса вида

$$\begin{cases} u_t+uu_x+\upsilon u_y+wu_z=f_1(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\rho}P_x+\mu\Delta u+\varepsilon_\mu\Omega_1(u), \\ \upsilon_t+u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z=f_2(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\rho}P_y+\mu\Delta\upsilon+\varepsilon_\mu\Omega_2(\upsilon), \\ w_t+uw_x+\upsilon w_y+ww_z=f_3(x,y,z,t)-\dfrac{1}{\rho}P_z+\mu\Delta w+\varepsilon_\mu\Omega_3(w) \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

с условиями

$$\mathrm{div}U=u_x+\upsilon_y+w_z=0, \qquad (3.3.2)$$

$$\begin{cases} u(x,y,z,t)|_{t=0}=u_0(x,y,z), \upsilon(x,y,z,t)|_{t=0}=\upsilon_0(x,y,z), \\ w(x,y,z,t)|_{t=0}=w_0(x,y,z), \forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0], \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

$$\begin{cases} 0\le K_i : \int\limits_{R^3}K_i(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3=1, (i=\overline{1,3}), \\ \varepsilon_\mu\in(0,1):\varepsilon_\mu\xrightarrow[\mu\to 0]{}0, \\ f_i\in C^{3,0}(T=R^3\times[0,T_0]), C^{3,0}(T)\equiv C^{3,3,3,0}(T), i=\overline{1,3}, \\ u_0\in C^2(R^3), \upsilon_0\in C^2(R^3), w_0\in C^2(R^3)\equiv C^{2,2,2}(R^3), \end{cases} \qquad (3.3.4)$$

$$\begin{cases} \Omega_1(u)\equiv\int\limits_{R^3}K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)u(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \Omega_2(\upsilon)\equiv\int\limits_{R^3}K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\upsilon(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \Omega_3(w)\equiv\int\limits_{R^3}K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)w(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \end{cases} \qquad (3.3.5)$$

а согласно [2]: $\frac{1}{\rho}A_\tau=\varepsilon$ – кинематический коэффициент «кажущейся» вязкости турбулентного течения, соответствующий коэффициенту кинематической вязкости: $\mu=\frac{\nu}{\rho}$ ламинарного течения (A_τ-коэффициент турбулентного обмена).

Отметим, что исследования устойчивости решения уравнений в определенных пространствах или устойчивость разработанных алгоритмов зависит от исходных данных задачи. Например, устойчивость в смысле Ляпунова (задача Коши) или непрерывная зависимость решений от известных функций, которые содержатся в уравнениях и т.д. Но в задаче Навье-Стокса важно влияние интегрального члена на устойчивость для асимптотического представления в пространстве $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Здесь при $\varepsilon=0$ не меняется тип уравнения, ($0<\mu,\varepsilon_\mu<1:\varepsilon_\mu\xrightarrow[\mu\to0]{}0$).

Кроме того, при $\mu=0,\ (\varepsilon_\mu=0)$ функции $\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}$ являются решением вырожденной системы (см. §2.1.2, гл.2) с условием Стокса: $\mathrm{rot}\overline{v}=0$, ($\overline{v}=(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w})$), причем отсутствуют члены: $\Delta u,\Omega_1,\Delta\upsilon,\Omega_2,\Delta w,\Omega_3$ для течений без трения [2].

Чтобы доказать справедливость асимптотического разложения (3.1.1) для системы (3.3.1), используем алгоритм, разработанный в §3.1.

§3.3.1. Если введем

$$\begin{cases}u_\mu(x,y,z,t)=\overline{u}(x,y,z,t)+\xi_1(x,y,z,t)+\prod_1(x,y,z,t),\\ \upsilon_\mu(x,y,z,t)=\overline{\upsilon}(x,y,z,t)+\xi_2(x,y,z,t)+\prod_2(x,y,z,t),\\ w_\mu(x,y,z,t)=\overline{w}(x,y,z,t)+\xi_3(x,y,z,t)+\prod_3(x,y,z,t)\end{cases}\tag{3.3.6}$$

с условиями

$$\begin{cases}\overline{u}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{u}_0(x,y,z),\overline{\upsilon}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{\upsilon}_0(x,y,z),\\ \overline{w}(x,y,z,t)|_{t=0}=\overline{w}_0(x,y,z),\forall(x,y,z)\in R^3,\\ \mathrm{div}\overline{v}=\overline{u}_x+\overline{\upsilon}_y+\overline{w}_z=0,\end{cases}\tag{3.3.7}$$

$$\begin{cases}\xi_i(x,y,z,t)|_{t=0}=0;\prod_i(x,y,z,t)|_{t=0}=\prod_i^0(x,y,z),(i=\overline{1,3}),\forall(x,y,z)\in R^3,\\ \prod_1|_{t=0}=u_0-\overline{u}_0\equiv\prod_1^0,\prod_2|_{t=0}=\upsilon_0-\overline{\upsilon}_0\equiv\prod_2^0,\prod_3|_{t=0}=w_0-\overline{w}_0\equiv\prod_3^0,\end{cases}\tag{3.3.8}$$

то относительно функций: $(\overline{u},\overline{\upsilon},\overline{w}),(\xi_1,\xi_2,\xi_3),(\prod_1,\prod_2,\prod_3),$ порождаются системы:

$$\begin{cases} \overline{u}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_x = \overline{f}_1 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_x, \\ \overline{\upsilon}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_y = \overline{f}_2 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_y, \\ \overline{w}_t + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_z = \overline{f}_3 - \dfrac{1}{\rho}\overline{P}_z, \end{cases} \tag{3.3.9}$$

$$\Pi_{it} = \mu\Delta\Pi_i, i = \overline{1,3}, \tag{3.3.10}$$

$$\begin{cases} \xi_{1t} + \xi_1\xi_{1x} + \xi_2\xi_{1y} + \xi_3\xi_{1z} + a_1\xi_{1x} + a_2\xi_{1y} + a_3\xi_{1z} + \xi_1 a_{1x} + \xi_2 a_{1y} + \xi_3 a_{1z} = \\ = b_1 + F_1 - \dfrac{1}{\rho}[P_x - \overline{P}_x] + \mu\Delta\xi_1 + \varepsilon\displaystyle\int_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \xi_{2t} + \xi_1\xi_{2x} + \xi_2\xi_{2y} + \xi_3\xi_{2z} + a_1\xi_{2x} + a_2\xi_{2y} + a_3\xi_{2z} + \xi_1 a_{2x} + \xi_2 a_{2y} + \xi_3 a_{2z} = \\ = b_2 + F_2 - \dfrac{1}{\rho}[P_y - \overline{P}_y] + \mu\Delta\xi_1 + \varepsilon\displaystyle\int_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \xi_{3t} + \xi_1\xi_{3x} + \xi_2\xi_{3y} + \xi_3\xi_{3z} + a_1\xi_{3x} + a_2\xi_{3y} + a_3\xi_{3z} + \xi_1 a_{3x} + \xi_2 a_{3y} + \xi_3 a_{3z} = \\ = b_3 + F_3 - \dfrac{1}{\rho}[P_z - \overline{P}_z] + \mu\Delta\xi_1 + \varepsilon\displaystyle\int_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)\times \\ \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3; F_i \equiv f_i - \overline{f}_i \in C^{2,0}(T), i = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{3.3.11}$$

где $\overline{v} = (\overline{u}, \overline{\upsilon}, \overline{w})$, $\tilde{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ – новые неизвестные функции, которые удовлетворяют условиям (3.3.7) и (3.3.8).

I. Функции $\overline{u}, \overline{\upsilon}, \overline{w}$ – это решение вырожденной системы (3.3.9) с условием Стокса: $\mathrm{rot}\overline{v} = 0$, ($\mu = 0, \varepsilon_\mu = 0$).

Решение системы (3.3.9) представляется в виде (см. §2.1.2, гл.2):

$$\begin{cases} \overline{u}(x,y,z,t) = \overline{u}_0(x,y,z) + \displaystyle\int_0^t (\overline{f}_1(x,y,z,\tau) - \overline{J}_x(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{\upsilon}(x,y,z,t) = \overline{\upsilon}_0(x,y,z) + \displaystyle\int_0^t (\overline{f}_2(x,y,z,\tau) - \overline{J}_y(x,y,z,\tau))d\tau, \\ \overline{w}(x,y,z,t) = \overline{w}_0(x,y,z) + \displaystyle\int_0^t (\overline{f}_3(x,y,z,\tau) - \overline{J}_z(x,y,z,\tau))d\tau, \end{cases} \tag{3.3.12}$$

а при этом функции $\overline{v} = (\overline{u}, \overline{\upsilon}, \overline{w})$ ограничены в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$:

$$\|\overline{v}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} \le N_0, \tilde{C}^{2,1}(T) \equiv \tilde{C}^{2,2,2,1}(T), \tag{3.3.13}$$

где

$$
\begin{cases}
\|\bar{v}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \|\bar{u}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} + \|\bar{\upsilon}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} + \|\bar{w}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}; \|\bar{u}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le 2} \|D^k\bar{u}\|_{C(T)} + \|\bar{u}_t\|_{C(T)}, \\
\|\bar{\upsilon}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le 2} \|D^k\bar{\upsilon}\|_{C(T)} + \|\bar{\upsilon}_t\|_{C(T)}, \|\bar{w}\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum\limits_{0\le|k|\le 2} \|D^k\bar{w}\|_{C(T)} + \|\bar{w}_t\|_{C(T)}; \\
k = 0 : D^0\bar{u}(x,y,z,t) \equiv \bar{u}, D^0\upsilon(x,y,z,t) \equiv \bar{\upsilon}, D^0\bar{w}(x,y,z,t) \equiv \bar{w}; \\
k \ne 0 : D^k\bar{u} = \dfrac{\partial^{|k|}\bar{u}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k\bar{\upsilon} = \dfrac{\partial^{|k|}\bar{\upsilon}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, D^k\bar{w} = \dfrac{\partial^{|k|}\bar{w}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, \\
|k| = \sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i, (\alpha_i = 0,1,2; i = \overline{1,3}).
\end{cases}
$$

Тогда имеем

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho}\bar{P} = -\dfrac{1}{2}\bar{Q} + \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\bar{F}_0(s_1,s_2,s_3,t)\dfrac{ds_1ds_2ds_3}{r}; \bar{J} = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\bar{F}_0(s_1,s_2,s_3;t)\dfrac{ds_1ds_2ds_3}{r}, \\
\bar{F}_0 \equiv -(\bar{f}_{1x} + \bar{f}_{2y} + \bar{f}_{3z}), \bar{Q} \equiv \bar{u}^2 + \bar{\upsilon}^2 + \bar{w}^2; \bar{J}_x \equiv \bar{J}_1, \bar{J}_y \equiv \bar{J}_2, \bar{J}_z \equiv \bar{J}_3 : \\
\bar{J}_i(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\tau_i\dfrac{\bar{F}_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}}, i = \overline{1,3},
\end{cases}
$$

здесь $\bar{J}$ – удовлетворяет уравнению: $\Delta\bar{J} = -\bar{F}_0$.

II. Функции $\prod_i \in \bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, поэтому относительно функций $\tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$, учитывая

$$
\begin{cases}
\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\Pi_{it}(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, (i = \overline{1,3}); \\
\|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3}\|\Pi_i\|_{\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)}; \|\Pi_i\|_{\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)} = \|\Pi_i\|_{C^{2,0}(T)} + \|\Pi_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, (i = \overline{1,3}); \\
\|\Pi_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} = (\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\Pi_{it}(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt)^{\frac{1}{2}}, (i = \overline{1,3}); \\
\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : \Pi_i \in C^{2,0}(T) \equiv C^{2,2,2,0}(T); \\
\\
\Pi_{it} \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)], (i = \overline{1,3}),
\end{cases} \qquad (3.3.14)
$$

из (3.3.10) получим решение в виде

$$
\Pi_i = \frac{1}{8(\sqrt{\pi\mu t})^3}\int\limits_{R^3} exp(-\frac{r^2}{4\mu t})\Pi_i^0(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times
$$

$$
\times\Pi_i^0(x+2\tau_1\sqrt{\mu t}, y+2\tau_2\sqrt{\mu t}, z+2\tau_3\sqrt{\mu t})d\tau_1d\tau_2d\tau_3 \equiv N_i^0(x,y,z,t), i = \overline{1,3}, \qquad (3.1.15)
$$

где $N_i^0(x,y,z,t),(i=\overline{1,3})$ - известные функции.

Если функции $\Pi_i^0, i=\overline{1,3}$ допускают условия (3.3.8), (3.3.14) и

$$\begin{cases} \left|D^k\Pi_i^0\right| \le \delta_1, \forall(x,y,z)\in R^3, i=\overline{1,3}; 0<\delta_1<1; (\delta_1=\sqrt{\mu}); \\ k=0: D^0\Pi_i^0(x,y,z)\equiv\Pi_i^0; k\ne 0: D^k\Pi_i^0=\dfrac{\partial^{|k|}\Pi_i^0}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, (0\le|k|\le 2), \\ |k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i, (\alpha_i=0,1,2; i=\overline{1,3}); \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}|\xi|d\xi\le\sqrt{\pi}, \int\limits_{R^3} e^{-(\xi^2+\tau^2+\eta^2)}d\xi d\tau d\eta=\sqrt{\pi^3}, \int\limits_0^{T_0}\lambda(t)\dfrac{1}{t}dt=q_0<+\infty, \end{cases} \qquad (3.3.16)$$

то имеем

$$\left\|\tilde{\Pi}\right\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}=\sum_{i=1}^{3}\left\|\Pi_i\right\|_{\bar{D}^2_{(\Pi_i;\lambda\Omega)}(T)}\le O(\sqrt{\mu}). \qquad (3.3.17)$$

Это означает, что функции $\Pi_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В самом деле, ограниченность функций $\Pi_i, i=\overline{1,3}$ в $C^{2,2,2,0}(T)$ с условиями (3.3.8), (3.3.16) очевидна (аналогичные оценки см. в § 2.2.2):

$$\begin{cases} \left\|\tilde{\Pi}\right\|_{C^{2,0}(T)}\le\sum\limits_{i=1}^{3}\left\|\Pi_i\right\|_{C^{2,0}(T)}\le 30\delta_1, \\ \left\|\Pi_i\right\|_{C^{2,0}(T)}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\left\|D^k\Pi_i\right\|_{C(T)}\le 10\delta_1, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (3.3.18)$$

Следовательно, чтобы оценить функции $\Pi_i, i=\overline{1,3}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, необходимо, сначала, оценить функции $\Pi_{it}, i=\overline{1,3}$ в $L^2_{\lambda\Omega}$. Поэтому, дифференцируя (3.3.15) по t для $t>0$, далее, оценивая и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, и, интегрируя по области $R^3\times(0,T_0)$ с учетом (3.3.16), имеем

$$\left\|\Pi_{it}\right\|_{L^2_{\lambda\Omega}}\le 3\sqrt{\mu q_0}\delta_1, i=\overline{1,3}.$$

Тогда, учитывая (3.3.14), получим

$$\left\|\tilde{\Pi}\right\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)}\le 3(10+3\sqrt{q_0})\delta_1, (\delta_1=\sqrt{\mu}). \qquad (3.3.19)$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 3.3.1. В условиях (3.3.8), (3.3.14), (3.3.16) система (3.3.10) имеет единственное решение в виде (3.3.15) в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Замечание 3.3.1. Из полученных результатов следует, что функции $a_i(x,y,z,t)$, $b_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$ в уравнениях системы (3.3.11) становятся известными. Неизвестными функциями являются

$$\xi_i,\ \tilde{P}_i,\ (P_x - \overline{P}_x \equiv \tilde{P}_1,\ P_y - \overline{P}_y \equiv \tilde{P}_2,\ P_z - \overline{P}_z \equiv \tilde{P}_3), i = \overline{1,3}. \qquad (3.3.20)$$

III. Система (3.3.11) – это система Навье-Стокса с интегро-дифференциальными уравнениями, где содержатся переменные коэффициенты, так как

$$\begin{cases} b_1(x,y,z,t) \equiv -(a_1a_{1x} + a_2a_{1y} + a_3a_{1z}) + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_x + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3) \times \\ \times a_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = -(\overline{u}\Pi_{1x} + \overline{\upsilon}\Pi_{1y} + \overline{w}\Pi_{1z} + \overline{u}_x\Pi_1 + \overline{u}_y\Pi_2 + \overline{u}_z\Pi_3 + \\ + \Pi_1\Pi_{1x} + \Pi_2\Pi_{1y} + \Pi_3\Pi_{1z}) + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)a_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ b_2(x,y,z,t) \equiv -(a_1a_{2x} + a_2a_{2y} + a_3a_{2z}) + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_y + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3) \times \\ \times a_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = -(\overline{u}\Pi_{2x} + \overline{\upsilon}\Pi_{2y} + \overline{w}\Pi_{2z} + \overline{\upsilon}_x\Pi_1 + \overline{\upsilon}_y\Pi_2 + \overline{\upsilon}_z\Pi_3 + \\ + \Pi_1\Pi_{2x} + \Pi_2\Pi_{2y} + \Pi_3\Pi_{2z}) + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)a_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ b_3(x,y,z,t) \equiv -(a_1a_{3x} + a_2a_{3y} + a_3a_{3z}) + \dfrac{1}{2}(\overline{u}^2 + \overline{\upsilon}^2 + \overline{w}^2)_z + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3) \times \\ \times a_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = -(\overline{u}\Pi_{3x} + \overline{\upsilon}\Pi_{3y} + \overline{w}\Pi_{3z} + \overline{w}_x\Pi_1 + \overline{w}_y\Pi_2 + \overline{w}_z\Pi_3 + \\ + \Pi_1\Pi_{3x} + \Pi_2\Pi_{3y} + \Pi_3\Pi_{3z}) + \varepsilon \int\limits_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)a_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ a_1(x,y,z,t) \equiv \overline{u} + \Pi_1, a_2(x,y,z,t) \equiv \overline{\upsilon} + \Pi_2, a_3(x,y,z,t) \equiv \overline{w} + \Pi_3. \end{cases} \qquad (3.3.21)$$

Для решения системы (3.3.11) воспользуемся методом, который использовали в параграфе 2.4.

Пусть

$$\begin{cases} \theta_1 = \xi_1\xi_{1x} + \xi_2\xi_{1y} + \xi_3\xi_{1z} + a_1\xi_{1x} + a_2\xi_{1y} + a_3\xi_{1z} + \xi_1a_{1x} + \xi_2a_{1y} + \xi_3a_{1z} - \\ -\varepsilon \int\limits_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \theta_2 = \xi_1\xi_{2x} + \xi_2\xi_{2y} + \xi_3\xi_{2z} + a_1\xi_{2x} + a_2\xi_{2y} + a_3\xi_{2z} + \xi_1a_{2x} + \xi_2a_{2y} + \xi_3a_{2z} - \\ -\varepsilon \int\limits_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \\ \theta_3 = \xi_1\xi_{3x} + \xi_2\xi_{3y} + \xi_3\xi_{3z} + a_1\xi_{3x} + a_2\xi_{3y} + a_3\xi_{3z} + \xi_1a_{3x} + \xi_2a_{3y} + \xi_3a_{3z} - \\ -\varepsilon \int\limits_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\xi_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3; \theta_i\Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1,3}, \end{cases} \qquad (3.3.22)$$

тогда из системы (3.3.11), получим

$$\begin{cases} \xi_{it} + \theta_i = b_i + F_i - \dfrac{1}{\rho}\tilde{P}_i + \mu\Delta\xi_i, i = \overline{1,3}, \\ \theta_i\Big|_{t=0} = 0, i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{3.3.23}$$

Система (3.3.23) содержит неизвестные $\xi_i, \theta_i, \tilde{P}_i, i = \overline{1,3}$.

Для доказательства разрешимости систем (3.3.22), (3.3.23) поступим следующим образом.

Введя преобразование вида

$$\begin{cases} \xi_i = \varphi_i(x,y,z,t) + C_i(x,y,z,t), i = \overline{1,3}, \\ C_i(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_i(x,y,z,\tau) + \dfrac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,\tau)]d\tau, (i = \overline{1,3}) \end{cases} \tag{3.3.24}$$

с условиями

$$\begin{cases} \varphi_i(x,y,z,0) = 0, (i = \overline{1,3}), \\ C_i(x,y,z,0) = 0, (i = \overline{1,3}), \end{cases} \tag{3.3.25}$$

$$\theta_i(x,y,z,\tau) = -\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,\tau) + C_{it}(x,y,z,t), (i = \overline{1,3}), \tag{3.3.26}$$

где $\varphi_i, C_i(x,y,z,t)$ - новые неизвестные функции, имеем лемму.

Лемма 3.3.2. При условии (3.3.25), когда функции $\varphi_i(x,y,z,t), C_i(x,y,z,t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} \varphi_{it} = F_i + \mu\Delta\varphi_i, i = \overline{1,3}, \\ 2C_{it} = b_i + \mu\Delta C_i, i = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{3.3.27}$$

то (3.3.24) является решением системы (3.3.23).

Далее, в условиях леммы 3.3.2 получим

$$\begin{cases} \varphi_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-\dfrac{r^2}{4\mu(t-s)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\mu(t-s)})^3} F_i(s_1,s_2,s_3,s)ds_1ds_2ds_3ds = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2))F_i(x + 2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)}, y + 2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)}, z + \\ +2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)}; s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds, i = \overline{1,3}, \\ C_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-\dfrac{r^2}{4\alpha(t-s)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\alpha(t-s)})^3} \dfrac{1}{2} b_i(s_1,s_2,s_3,s)ds_1ds_2ds_3ds = \\ = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2))\dfrac{1}{2} b_i(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y + 2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z + \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds, i = \overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\mu. \end{cases} \tag{3.3.28}$$

Тогда функции $\xi_i(x,y,z,t)$ определяются следующим образом

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},$$

$$z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds+\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}b_i(x+ \qquad (3.3.29)$$

$$+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv H_i, i=\overline{1,3},$$

а $\xi_i, i=\overline{1,3}$ ограничена в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$, где H_i – известные функции.

В самом деле, дифференцируя (3.3.29) по *(x,y,z)* до 2-го порядка, включительно, и по *t* первого порядка, и, оценивая в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$, получим, что функции $\xi_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$. Поэтому, для удобства оценок относительно решений системы (3.3.1), ограниченность функций $\xi_i, i=\overline{1,3}$ проводим в $\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Учитывая результаты леммы 3.3.2 и

$$\begin{cases} F_i \in C^{3,0}(T), b_i \in C^{2,0}(T): \left|D^k F_i(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},\right. \\ \left. z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_1, (i=\overline{1,3}), \\ \left|F_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\mu(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\mu(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\mu(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_2, \\ (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}), \\ \left|D^k b_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_3, \\ (i=\overline{1,3}), \\ \left|b_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)\right| \le \tilde{\delta}_4, \\ (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}); \forall(x,y,z,t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,s) \in T\times T;\ \delta_4=\sqrt{\mu}, \\ 0<\delta_4=\max(\tilde{\delta}_1,\tilde{\delta}_2,\tilde{\delta}_3,\tilde{\delta}_4)<1; q_1=\int_0^{T_0}\lambda(t)[\frac{3}{2}+\frac{6\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}\sqrt{t}]^2 dt, \end{cases} \qquad (3.3.30)$$

получим оценки

$$\begin{cases} \|\overline{\zeta}\|_{C^{2,2,2,0}(T)} \le 45\sqrt{\mu}, \overline{\zeta}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ \|\xi_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \sqrt{q_1\mu}, (i=\overline{1,3}). \end{cases} \qquad (3.3.31)$$

Следовательно, имеем

$$\|\overline{\zeta}\|_{\overline{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(15+\sqrt{q_1})\sqrt{\mu}. \qquad (3.3.32)$$

Утверждение 3.3.1. При выполнении (3.3.32), когда $\delta_4 = \sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

IV. Если выполняются условия леммы 3.3.2, то из (3.3.26) следует

$$\frac{1}{\rho}\tilde{P}_i + \theta_i = \frac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t-s}}[\sum_{j=1}^{3}\tau_j b_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, \quad (3.3.33)$$

$$y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds + \frac{1}{2}b_i(x,y,z,t) \equiv \psi_i^0, i=\overline{1,3}.$$

Тогда на основе (3.3.28), (3.3.29), (3.3.33), получим

$$\begin{cases} \theta_1 = H_1\cdot H_{1x} + H_2\cdot H_{1y} + H_3\cdot H_{1z} + a_1H_{1x} + a_2H_{1y} + a_3H_{1z} + a_{1x}H_1 + \\ +a_{1y}H_2 + a_{1z}H_3 - \varepsilon\int_{R^3} K_1(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)H_1(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \equiv \psi_1, \\ \theta_2 = H_1\cdot H_{2x} + H_2\cdot H_{2y} + H_3\cdot H_{2z} + a_1H_{2x} + a_2H_{2y} + a_3H_{2z} + a_{2x}H_1 + \\ +a_{2y}H_2 + a_{2z}H_3 - \varepsilon\int_{R^3} K_2(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)H_2(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \equiv \psi_2, \\ \theta_3 = H_1\cdot H_{3x} + H_2\cdot H_{3y} + H_3\cdot H_{3z} + a_1H_{3x} + a_2H_{3y} + a_3H_{3z} + a_{3x}H_1 + \\ +a_{3y}H_2 + a_{3z}H_3 - \varepsilon\int_{R^3} K_3(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)H_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \equiv \psi_3, \end{cases} \quad (3.3.34)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}[P_x - \bar{P}_x] = \phi_1, \\ \frac{1}{\rho}[P_y - \bar{P}_y] = \phi_2, \\ \frac{1}{\rho}[P_z - \bar{P}_z] = \phi_3; \phi_i \equiv -\psi_i(x,y,z,t) + \psi_i^0(x,y,z,t), i=\overline{1,3}, \end{cases} \quad (3.3.35)$$

где $\psi_i, \psi_i^0, \phi_i, i=\overline{1,3}$ – известные функции. Дифференцируя (3.3.35) по x, y, z, соответственно, и, суммируя, получим уравнение Пуассона [5]

$$\Delta\frac{1}{\rho}[P-\bar{P}] = -\Phi_0, \Phi_0 \equiv -(\phi_{1x}+\phi_{2y}+\phi_{3z}), \quad (3.3.36)$$

причем

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}[P-\bar{P}] = \frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\Phi_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \\ \frac{1}{\rho}\tilde{P}_i(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{R^3}\tau_i\frac{\Phi_0(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}}, i=\overline{1,3}. \end{cases} \quad (3.3.37)$$

Теорема 3.3.1. При условиях, когда функции $(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}),\Pi_i,\xi_i,i=\overline{1,3}$ единственным образом определяются, как решения системы (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11), то (3.3.6) является решением системы (3.3.1) в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Доказательство. Из условий (I-III) следует, что функции $(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w}),\Pi_i,\xi_i,i=\overline{1,3}$ определяются единственным образом. Тогда для системы (3.3.1) обосновывается справедливость асимптотического разложения в виде (3.3.6). Поэтому, построение решений u_μ,υ_μ,w_μ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ существует единственным образом. Что и требовалось доказать.

Утверждение 3.3.2. В условиях теоремы 3.3.1 функции u,υ,w, построенные по формуле (3.3.6), ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В самом деле, из обсуждений (I-III) следует, что функции u,υ,w, построенные по формуле (3.3.6), ограничены в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, так как ограничены $\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w},\Pi_i,\xi_i,i=\overline{1,3}$ в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T),\ \bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$. Следовательно, имеем

$$\|v\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \|\bar{v}\|_{C^{2,0}(T)} + d_0\|\bar{v}_t\|_{C(T)} + \|\zeta\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le d\|\bar{v}\|_{C^{2,0}(T)} +$$
$$+\|\zeta\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le dN_0 + 3(10+3\sqrt{q_0})\sqrt{\mu} + 3(15+\sqrt{q_1})\sqrt{\mu}, \tag{3.3.38}$$
$$(\delta_1=\delta_4=\delta=\sqrt{\mu}),\ d_0=\left(\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)dxdydzdt\right)^{\frac{1}{2}},\ d=max(1,d_0).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание 3.3.2. Из полученных результатов видно, что функции $\Pi_i,\xi_i,i=\overline{1,3}$ при $\mu\to 0$ удовлетворяют: $\Pi_i \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0,\ \xi_i \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$ в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, $i=\overline{1,3}$.

§3.3.2. Докажем, что в условиях асимптотического разложения (3.3.6) при $\mu\to 0$ решение системы Навье-Стокса с вязкостью сходится к решению вырожденной системы в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Теорема 3.3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.3.1. Тогда решение $v=(u,\upsilon,w)$ системы (3.3.1) сходится к решению $\bar{v}=(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{w})$ системы (3.3.9) в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, когда $\mu\to 0$, т.е.

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0. \tag{3.3.39}$$

Доказательство. В условиях теоремы 3.3.1, имеем

$$\begin{cases} \|\tilde{\Pi}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \gamma_1\sqrt{\mu}, \\ \|\bar{\zeta}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \gamma_2\sqrt{\mu}, \gamma_2 = 3(15+\sqrt{q_1}), \gamma_1 = 3(10+3\sqrt{q_0}), \delta = \sqrt{\mu}. \end{cases} \tag{3.3.40}$$

Согласно (3.3.6), получим

$$\begin{cases} u_\mu(x,y,z,t) - \bar{u}(x,y,z,t) = \xi_1(x,y,z,t) + \prod_1(x,y,z,t), \\ \upsilon_\mu(x,y,z,t) - \bar{\upsilon}(x,y,z,t) = \xi_2(x,y,z,t) + \prod_2(x,y,z,t), \\ w_\mu(x,y,z,t) - \bar{w}(x,y,z,t) = \xi_3(x,y,z,t) + \prod_3(x,y,z,t). \end{cases} \tag{3.3.41}$$

Следовательно, с учетом

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u-\bar{u}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|w-\bar{w}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)},$$

получим оценку

$$\begin{aligned} &\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u-\bar{u}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|w-\bar{w}\|_{\tilde{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le \\ &\le [3(10+3\sqrt{q_0}) + 3(15+\sqrt{q_1})]\sqrt{\mu}. \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Отсюда следует

$$u-\bar{u} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, \upsilon-\bar{\upsilon} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0, w-\bar{w} \xrightarrow[\mu\to 0]{} 0$$

в смысле $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$, что и требовалось доказать.

Замечание 3.3.3. Если $\delta = \sqrt{\mu}$, то из (3.3.42) следует

$$\|v-\bar{v}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u-\bar{u}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|\upsilon-\bar{\upsilon}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} + \|w-\bar{w}\|_{\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)} \le O(\sqrt{\mu}). \tag{3.3.43}$$

Утверждение 3.3.3. При условиях теоремы 3.3.2, когда $\delta = \sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Примечание 3.1

§3.3.3. Рассмотрим жидкость со средней вязкостью

$$0 < \mu = \mu_0 = \text{const} < +\infty,\ t \in [0,T_0], T_0 < +\infty. \tag{1}$$

При этом параметр $(0,1) \in \varepsilon$ не может определяться в виде: $\rho^{-1}A_\tau = \varepsilon$, так как в этом случае ε меняется, как произвольный малый параметр вне зависимости от μ. Поэтому, исследование системы (3.3.1) отличается от полученных результатов §3.3.

Пусть имеют место

1) $f_i \in C^{3,1}(T = R^3 \times [0,T_0]), C^{3,1}(T) \equiv C^{3,3,3,1}(T), i = \overline{1,3}; \text{div} f = 0, f = (f_1, f_2, f_3),$
2) $u_0 \in C^2(R^3), \upsilon_0 \in C^2(R^3), w_0 \in C^2(R^3) \equiv C^{2,2,2}(R^3),$
3) $0 \le K_i : \int\limits_{R^3} K_i(x,y,z,\tau_1,\tau_2,\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = 1, (i = \overline{1,3}); K_{1x} + K_{2y} + K_{3z} = 0$

и (3.3.2), (3.3.3), (3.3.5). Решение задачи (3.3.1)-(3.3.3) ищем в $\tilde{C}^{2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)$ – специальное пространство, где не содержатся члены со смешанными производными, учитывающие производные 1-го порядка по *t,* причем

$$\begin{cases} \|v\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)}=\|u\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(u;T)}}+\|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon;T)}}+\|w\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(w;T)}};\|u\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(u;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k u\|_{C(T)}+\|u_t\|_{C(T)}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(\upsilon;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k \upsilon\|_{C(T)}+\|\upsilon_t\|_{C(T)},\|w\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(w;T)}}=\sum\limits_{0\le|k|\le 2}\|D^k w\|_{C(T)}+\|w_t\|_{C(T)}, \\ \tilde{C}^{2,2,2,1}(T)=\{(x,y,z,t)\in T: D^k u,D^k\upsilon,D^k w\in C(T);u_t,\upsilon_t,w_t\in C(T)\}; \\ k=0: D^0u(x,y,z,t)\equiv u,D^0\upsilon(x,y,z,t)\equiv\upsilon,D^0w(x,y,z,t)\equiv w; \\ k\ne 0: D^k u=\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},D^k\upsilon=\dfrac{\partial^{|k|}\upsilon}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}},D^k w=\dfrac{\partial^{|k|}w}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}\partial z^{\alpha_3}}, \\ |k|=\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i,(\alpha_i=0,1,2;i=\overline{1,3}). \end{cases}$$

Если система (3.3.1) эквивалентно преобразуется (см. §2.4):

$$\begin{cases} u_t+\theta_1=f_1-J_x+\mu\Delta u, \\ \upsilon_t+\theta_2=f_2-J_y+\mu\Delta\upsilon, \\ w_t+\theta_3=f_3-J_z+\mu\Delta w, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} J\equiv\dfrac{1}{2}Q+\dfrac{1}{\rho}P\ ,Q\equiv u^2+\upsilon^2+w^2, \\ \mathrm{rot}\,v\ne 0,v=(u,\upsilon,w), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \theta_1=uu_x+\upsilon u_y+wu_z-\dfrac{1}{2}Q_x-\varepsilon\Omega_1(u), \\ \theta_2=u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z-\dfrac{1}{2}Q_y-\varepsilon\Omega_2(\upsilon), \\ \theta_3=uw_x+\upsilon w_y+ww_z-\dfrac{1}{2}Q_z-\varepsilon\Omega_3(w), \end{cases} \tag{4}$$

где $(u,\upsilon,w),J,\theta_i,(i=\overline{1,3}),P$ – неизвестные функции, то для решения системы (1), введя обозначения

$$\begin{cases} u=U_1(x,y,z,t)+C_1(x,y,z,t), \\ \upsilon=U_2(x,y,z,t)+C_2(x,y,z,t), \\ w=U_3(x,y,z,t)+C_3(x,y,z,t),\forall(x,y,z,t)\in T; \\ C_i(x,y,z,t)=\int\limits_0^t[\theta_i(x,y,z,\tau)+J_i(x,y,z,\tau)]d\tau,i=\overline{1,3}; \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
U_i\Big|_{t=0} = U_{0i}, (i=\overline{1,3}), \forall(x,y,z)\in R^3;\\
C_i\Big|_{t=0} = 0, (i=\overline{1,3}), \forall(x,y,z)\in R^3;\\
U_{01}(x,y,z)\equiv u_0(x,y,z), U_{02}(x,y,z)\equiv \upsilon_0(x,y,z), U_{03}(x,y,z)\equiv w_0(x,y,z);\\
\theta_i(x,y,z,t) = -J_i(x,y,z,\tau) + C_{it}(x,y,z,t), (i=\overline{1,3});\\
J_x\equiv J_1, J_y\equiv J_2, J_z\equiv J_3,
\end{cases}
\qquad (5)
$$

из системы (2), получим

$$
\begin{cases}
U_{it} = \mu\Delta U_i, i=\overline{1,3},\\
2C_{it} = f_i + \mu\Delta C_i, i=\overline{1,3},
\end{cases}
\qquad (6)
$$

U_i, C_i – новые неизвестные функции.

Так как выполняется (1), тогда из системы (6), учитывая преобразование Фурье [5], имеем

$$
\begin{cases}
U_j(x,y,z,t) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_j(s_1,s_2,s_3,t)\times\\
\times ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3},\\
U_{0j}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3},\\
\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{i(xs_1+ys_2+zs_3)}U_{0j}(x,y,z)dxdydz, j=\overline{1,3},\\
U_{jx^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}s_1^2\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_j(s_1,s_2,s_3,t)\times\\
\times ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3},\\
U_{jy^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}s_2^2\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_j(s_1,s_2,s_3,t)\times\\
\times ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3},\\
U_{jz^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}s_3^2\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_j(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3,\\
j=\overline{1,3},\\
U_{jt} = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}}\int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)Z_{jt}(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3,
\end{cases}
\qquad (7)
$$

где Z_j – новая неизвестная функция. Тогда подставляя (7) в (6), имеем

$$\begin{cases} Z_{jt}(s_1,s_2,s_3,t) = -\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)Z_j(s_1,s_2,s_3,t), \\ Z_j\big|_{t=0} = 1, j=\overline{1,3}, \end{cases} \tag{8}$$

т.е.

$$Z_j(s_1,s_2,s_3,t) = \exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t), j=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Следовательно, с учетом (5), (6), (7) и (9), получим

$$\begin{cases} U_j(x,y,z,t) = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) \times \\ \times\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3, j=\overline{1,3}, \\ C_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-\dfrac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}) \dfrac{1}{8(\sqrt{\alpha(t-\tau)})^3} \dfrac{1}{2} f_i(s_1,s_2,s_3,\tau) \times \\ \times ds_1ds_2ds_3d\tau = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \dfrac{1}{2} f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds, i=\overline{1,3}; \alpha=2^{-1}\mu, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{01}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \dfrac{1}{2} f_1(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_1(x,y,z,t), \\ \upsilon = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{02}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \dfrac{1}{2} f_2(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_2(x,y,z,t), \\ w = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \displaystyle\int_{R^3} e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)} \hat{U}_{03}(s_1,s_2,s_3)\exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t)ds_1ds_2ds_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \displaystyle\int_0^t\int_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \dfrac{1}{2} f_3(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s)d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds \equiv H_3(x,y,z,t), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases}\theta_1 = H_2 \cdot H_{1y} + H_3 \cdot H_{1z} - (H_2 H_{2x} + H_3 H_{3x}) - \varepsilon\Omega_1(H_1) \equiv \psi_1(x,y,z,t), \\ \theta_2 = H_1 \cdot H_{2x} + H_3 \cdot H_{2z} - (H_1 H_{1y} + H_3 H_{3y}) - \varepsilon\Omega_2(H_2) \equiv \psi_2(x,y,z,t), \\ \theta_3 = H_1 \cdot H_{3x} + H_2 \cdot H_{3y} - (H_1 H_{1z} + H_2 H_{2z}) - \varepsilon\Omega_3(H_3) \equiv \psi_3(x,y,z,t), \\ J_i = -\theta_i + C_{it} \equiv -\psi_i(x,y,z,t) + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) f_{it}(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha s}, \\ y + 2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t - s) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds + \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}} \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) \times \\ \times f_i(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha t}, y + 2\tau_2\sqrt{\alpha t}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha t}; 0) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \equiv \phi_i, i = \overline{1,3}; \alpha = \dfrac{\mu}{2}, \end{cases} \quad (12)$$

где $H_i, \psi_i, \phi_i, i = \overline{1,3}$ – известные функции. Так как

$$J_x \equiv J_1, J_y \equiv J_2, J_z \equiv J_3; J_i = J_i(x,y,z,t), (i = \overline{1,3}),$$

то из (12) следует

$$\Delta J = -\Phi_0, \Phi_0 \equiv -(\phi_{1x} + \phi_{2y} + \phi_{3z}), \quad (13)$$

причем

$$\begin{cases} J = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \Phi_0(s_1, s_2, s_3, t) \dfrac{ds_1 ds_2 ds_3}{r}, \\ J_i(x,y,z,t) = \dfrac{1}{4\pi} \int\limits_{R^3} \tau_i \dfrac{\Phi_0(x+\tau_1, y+\tau_2, z+\tau_3; t) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^3}}, i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (14)$$

Теорема 3.3.3. Если выполняются (1), (1-3), (3.3.2), (3.3.3), (5), (7), то система Навье-Стокса (3.3.1) имеет единственное гладкое решение в виде (11) в $\tilde{C}^{2,1}(T)$.

Доказательство. Учитывая указанные условия теоремы 3.3.3, получим (10), (11), (12). Из (10) видно, что все функции с правой стороны, известные функции. Следовательно, подставляя (10) в (5), получим решение системы (2) в виде (11), где $H_i, i = \overline{1,3}$ – известные функции, причем они ограничены в $\tilde{C}^{2,1}(T)$:

$$\forall (x,y,z,t) \in T : D^k H_i \in C(T); H_{it} \in C(T), i = \overline{1,3}); k = 0 : D^0 H_i(x,y,z,t) \equiv H_i;$$

$$k \neq 0 : D^k H_i = \frac{\partial^{|k|} H_i}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}}, |k| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i, (\alpha_i = 0,1,2). \quad (15)$$

Здесь учитываются

$$\left|U_j\right| \le \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} \left|e^{-i(xs_1+ys_2+zs_3)}\right| \times \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| \exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t) \times$$

$$\times ds_1 ds_2 ds_3 \le N_0, \forall(x,y,z,t) \in T, j=\overline{1,3}, \qquad (16)$$

$$\|\Psi\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} \le M_0, \tilde{C}^{2,1}(T) \equiv \tilde{C}^{2,2,2,1}(T), \qquad (17)$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} \left|\hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3)\right| \exp(-\mu(s_1^2+s_2^2+s_3^2)t) ds_1 ds_2 ds_3 \le N_0, j=\overline{1,3},$$

$$\|\Psi\|_{\tilde{C}^{2,1}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|C_i\|_{\tilde{C}^{2,1}_{(C_i;T)}(T)}, \Psi = (C_1,C_2,C_3).$$

Аналогично, получим и оценки относительно функций

$$U_{jx}, U_{jy}, U_{jz}, U_{jx^2}, U_{jy^2}, U_{jz^2}, U_{jxy}, U_{jxz}, U_{jyz}, U_{jt}.$$

Поэтому, можем сделать вывод, что функции u,υ,w равномерно ограничены в $\tilde{C}^{2,1}(T)$, причем функции u,υ,w определены единственным образом. Что и требовалось доказать.

Замечание 3.3.4. Если требуется $\varepsilon = 0$, то вырожденная система, относительно системы (3.3.1), имеет форму

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \upsilon u_y + wu_z = \tilde{f}_1(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_x + \mu\Delta u, \\ \upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + w\upsilon_z = \tilde{f}_2(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_y + \mu\Delta\upsilon, \\ w_t + uw_x + \upsilon w_y + ww_z = \tilde{f}_3(x,y,z,t) - \dfrac{1}{\rho} P_z + \mu\Delta w \end{cases} \qquad (18)$$

с условиями (3.3.2), (3.3.3), (1): $0 < \mu = \mu_0 = \text{const} < +\infty$, $t \in [0,T_0], T_0 < +\infty$ [течение со средней вязкостью и $\operatorname{div}\tilde{f} = 0, \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$]. При этом все результаты утверждения 2.4.1 [см. §2.4, гл. 2] имеют место для системы (18). Это означает, что решение системы (18) устойчиво в классе функций $\tilde{C}^{2,1}(T)$, т.е. решение системы (3.3.1) при условии (1), когда произвольный малый параметр $\varepsilon \to 0$ сходится к решению вырожденной системы (18), т.е.

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,y,z,t,\mu) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(x,y,z,t,\mu), \\ \upsilon_\varepsilon(x,y,z,t,\mu) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \upsilon(x,y,z,t,\mu), \\ w_\varepsilon(x,y,z,t,\mu) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} w(x,y,z,t,\mu), \forall(x,y,z,t) \in T, 0 < \mu = \mu_0 = \text{const}. \end{cases}$$

Утверждение 3.3.4. Если выполняются условия теоремы 3.3.3 и решение системы (18) определено единственным образом в $\tilde{C}^{2,1}(T)$, то при $\varepsilon \to 0$ решение системы (3.3.1) равномерно сходится к решению системы (18).

Замечание 3.3.5. Если $\mathrm{div} f \neq 0$, то $C_i, i=\overline{1,3}$ определяются в виде

$$\begin{cases} C_1(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_1(x,y,z,\tau) + J_1(x,y,z,\tau) - f_1(x,y,z,\tau) + e^{-\beta\tau} u(x,y,z,\tau)] d\tau, \\ C_2(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_2(x,y,z,\tau) + J_2(x,y,z,\tau) - f_2(x,y,z,\tau) + e^{-\beta\tau} \upsilon(x,y,z,\tau)] d\tau, \\ C_3(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_3(x,y,z,\tau) + J_3(x,y,z,\tau) - f_3(x,y,z,\tau) + e^{-\beta\tau} w(x,y,z,\tau)] d\tau. \end{cases} \tag{19}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{cases} U_{it} = \mu \Delta U_i, i=\overline{1,3}, \\ 2C_{1t} = e^{-\beta t} u + \mu \Delta C_1, \quad 2C_{2t} = e^{-\beta t} \upsilon + \mu \Delta C_2, \quad 2C_{3t} = e^{-\beta t} w + \mu \Delta C_3, \beta > \dfrac{1}{2}, \\ U_{1x} + U_{2y} + U_{2z} = 0, C_{1x} + C_{2y} + C_{3z} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Поэтому, с учетом (2.4.7), получим

$$\begin{cases} u = U_1 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) \dfrac{1}{2} \exp(-\beta(t-s)) u(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y + \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv D_1 u, \\ \upsilon = U_2 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) \dfrac{1}{2} \exp(-\beta(t-s)) \upsilon(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y + \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv D_2 \upsilon, \\ w = U_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)) \dfrac{1}{2} \exp(-\beta(t-s)) w(x + 2\tau_1\sqrt{\alpha s}, y + \\ +2\tau_2\sqrt{\alpha s}, z + 2\tau_3\sqrt{\alpha s}; t-s) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv D_3 w, \end{cases} \tag{21}$$

где: $U_j = \dfrac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int\limits_{R^3} e^{-i(xs_1 + ys_2 + zs_3)} \hat{U}_{0j}(s_1,s_2,s_3) \exp(-\mu(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)t) ds_1 ds_2 ds_3, j = \overline{1,3},$

D_i - сжимающие операторы: $q = (2\beta)^{-1} < 1$. Тогда, на основе метода Пикара: $u_{n+1} = D_1 u_n, \upsilon_{n+1} = D_2 \upsilon_n, w_{n+1} = D_3 w_n, n = 0,1,...,$ где u_0, υ_0, w_0 - начальные приближения, имеем: $(u_n, \upsilon_n, w_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (u,\upsilon,w), \forall (x,y,z,t) \in T$, т.е. $u = H_1(x,y,z,t), \upsilon = H_2(x,y,z,t), w = H_3(x,y,z,t)$ - известные функции.

Далее, с учетом [(12): $\theta_i=\psi_i(x,y,z,t), i=\overline{1,3}$] и

$$\begin{cases} J_i=-\theta_i+f_i-e^{-\beta t}H_i+C_{it}\equiv-\psi_i+f_i-e^{-\beta t}H_i+\dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times\exp(-\beta(t-s))[H_{it}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s},y+2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)-\beta H_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha s}, \\ y+2\tau_2\sqrt{\alpha s},z+2\tau_3\sqrt{\alpha s};t-s)]d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds+\dfrac{1}{2\sqrt{\pi^3}}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))H_i(x+ \\ +2\tau_1\sqrt{\alpha t},y+2\tau_2\sqrt{\alpha t},z+2\tau_3\sqrt{\alpha t};0)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\equiv\phi_i, i=\overline{1,3}; \alpha=2^{-1}\mu, \end{cases}$$

получим (13), (14), т.е.

$$\frac{1}{\rho}P=-\frac{1}{2}Q+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\Phi_0(s_1,s_2,s_3,t)\frac{ds_1ds_2ds_3}{r}.$$

В этом случае, найденное решение задачи Навье-Стокса обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{2,1}(T)$. При этом, когда $\varepsilon=0$ и $\mathrm{div}\tilde{f}\neq 0$ система (18) имеет единственное гладкое решение в $\tilde{C}^{2,1}(T)$ [см. §2.4, примечание 2.4, гл. 2]. Тогда решение системы (3.3.1) при условии (1) и $\mathrm{div}\tilde{f}\neq 0, \mathrm{div}f\neq 0$, и $\varepsilon\to 0$ сходится к решению вырожденной системы (18).

Глава 4

Нестационарная задача Навье-Стокса для сжимаемого течения изотермического изменения состояния

Из полученных результатов главы 2 можем сделать вывод, что на основе разработанного метода §2.4 можем решить и нестационарную задачу Навье-Стокса для сжимаемого течения с вязкостью [2], а точнее задачу изотермического изменения состояния, т.е. в этом случае для определения пяти неизвестных величин: скорость $v=(u,\upsilon,w)$, $P-$ давление, $\rho-$ плотность, рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\rho[u_t+uu_x+\upsilon u_y+wu_z]=f_1(x,y,z,t)-P_x+F_1(u,\upsilon,w,\mu),\\ \rho[\upsilon_t+u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z]=f_2(x,y,z,t)-P_y+F_2(u,\upsilon,w,\mu),\\ \rho[w_t+uw_x+\upsilon w_y+ww_z]=f_3(x,y,z,t)-P_z+F_3(u,\upsilon,w,\mu),\\ F_1\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(2\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div}v)]+\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x})]+\dfrac{\partial}{\partial z}[\mu(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x})],\\ F_2\equiv\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(2\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div}v)]+\dfrac{\partial}{\partial z}[\mu(\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y})]+\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x})],\\ F_3\equiv\dfrac{\partial}{\partial z}[\mu(2\dfrac{\partial w}{\partial z}-\dfrac{2}{3}\operatorname{div}v)]+\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z})]+\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y})],\end{cases}\tag{4.1}$$

$$\rho_t+(\rho u)_x+(\rho\upsilon)_y+(\rho w)_z=0,\tag{4.2}$$

$$P-\rho RT=0,\tag{4.3}$$

$$\begin{cases}u(x,y,z,t)|_{t=0}=u_0(x,y,z),\upsilon(x,y,z,t)|_{t=0}=\upsilon_0(x,y,z),\\ w(x,y,z,t)|_{t=0}=w_0(x,y,z),\forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0];\\ 0<\rho|_{t=0}=\rho_0(x,y,z),\forall(x,y,z)\in R^3,\ t\in[0,T_0],\end{cases}\tag{4.4}$$

$$\begin{cases}f_i\in C^{3,0}(T=R^3\times[0,T_0]),C^{3,0}(T)\equiv C^{3,3,3,0}(T),i=\overline{1,3},\\ u_0\in C^3(R^3),\upsilon_0\in C^3(R^3),w_0\in C^3(R^3)\equiv C^{3,3,3}(R^3),\end{cases}\tag{4.5}$$

где R – газовая постоянная, T – абсолютная температура, соотношение $\mu(T)$, связь между коэффициентом вязкости μ и температурой T (здесь зависимостью вязкости от давления обычно не учитывается, например, для капельных жидкостей вязкость почти не зависит от давления, но сильно уменьшается при повышении температуры), т.е. T, μ – считаются известными.

Сжимаемостью называется способность жидкости или газа уменьшать свой объем под действием сил внешнего давления. Для капельных жидкостей сжимаемость достаточно мала.

Отметим, что при сжимаемом течении исследование пограничного слоя требует, по сравнению со случаем несжимаемого течения, введения некоторых дополнительных параметров. Например: числа Маха; закона $\mu(T)$, устанавливающего связь между вязкостью и температурой и др.[2].

Если

$$\mu : 0 < \mu \le \tilde{\mu}, \tag{4.6}$$

где $\tilde{\mu}$ – не зависит от пространственных переменных и является как известный параметр вязкости, то задача (4.1) – (4.4) имеет единственное условно-гладкое решение (u,υ,w) в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ вида

$$\left\{\begin{aligned}
&u=\frac{1}{\gamma}[\varphi_1(x,y,z,t)+\psi_1(x,y,z,t)]\equiv H_1,\ \upsilon=\frac{1}{\gamma}[\varphi_2(x,y,z,t)+\psi_2(x,y,z,t)]\equiv H_2,\\
&w=\frac{1}{\gamma}[\varphi_3(x,y,z,t)+\psi_3(x,y,z,t)]\equiv H_3, H_i\in \bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T), i=\overline{1,3};\\
&\varphi_i\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{0i}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t},y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t},z+2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t})\times\\
&\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, i=\overline{1,3},\\
&\psi_i\equiv\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)},y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)},z+\\
&+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)};s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds, i=\overline{1,3};\ \alpha=2^{-1}\tilde{\mu};\\
&U_{01}(x,y,z)=u_0\rho_0,\ U_{02}(x,y,z)=\upsilon_0\rho_0,\ U_{03}(x,y,z)=w_0\rho_0;\\
&\rho=\rho_0-\int\limits_0^t\phi(x,y,z,s)ds\equiv\gamma(x,y,z,t);\phi\equiv[\varphi_1(x,y,z,t)+\psi_1(x,y,z,t)]_x+\\
&+[\varphi_2(x,y,z,t)+\psi_2(x,y,z,t)]_y+[\varphi_3(x,y,z,t)+\psi_3(x,y,z,t)]_z;\\
&\theta_1=-H_1\phi+\gamma[H_1H_{1x}+H_2H_{1y}+H_3H_{1z}]+\tilde{\mu}\Delta[\varphi_1(x,y,z,t)+\psi_1(x,y,z,t)]-\\
&-\{\frac{\partial}{\partial x}[\mu(2H_{1x}-\frac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})]+\frac{\partial}{\partial y}[\mu(H_{1y}+H_{2x})]+\frac{\partial}{\partial z}[\mu(H_{1z}+H_{3x})]\}-\\
&-2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_x\equiv\beta_1(x,y,z,t),\\
&\theta_2=-H_2\phi+\gamma[H_1H_{2x}+H_1H_{2y}+H_3H_{2z}]+\tilde{\mu}\Delta[\varphi_2(x,y,z,t)+\psi_2(x,y,z,t)]-
\end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

$$
\begin{cases}
-\{\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(2H_{2y}-\dfrac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})]+\dfrac{\partial}{\partial z}[\mu(H_{2z}+H_{3y})]+\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(H_{1y}+H_{2x})]\}-\\
-2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_y\equiv\beta_2(x,y,z,t),\\
\theta_3=-H_3\phi+\gamma[H_1H_{3x}+H_2H_{3y}+H_3H_{3z}]+\tilde{\mu}\Delta[\varphi_3(x,y,z,t)+\psi_3(x,y,z,t)]-\\
-\{\dfrac{\partial}{\partial z}[\mu(2H_{3z}-\dfrac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})]+\dfrac{\partial}{\partial x}[\mu(H_{3x}+H_{1z})]+\dfrac{\partial}{\partial y}[\mu(H_{2z}+H_{3y})]\}-\\
-2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_z\equiv\beta_3(x,y,z,t);\\
J=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{R^3}\dfrac{1}{r}\Phi(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3;\ J\equiv P+\dfrac{1}{2}\rho(u^2+\upsilon^2+w^2),\Phi(x,y,z,t)\equiv\\
\equiv-[\psi_{1t}-\beta_1]_x-[\psi_{2t}-\beta_2]_y-[\psi_{3t}-\beta_3]_z,r=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2+(z-s_3)^2};\\
J_x\equiv J_1,J_y\equiv J_2,J_z\equiv J_3:J_i=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{R^3}\tau_i\dfrac{\Phi(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)^3}},i=\overline{1,3}.
\end{cases}
$$

§4.1. Задача Навье-Стокса для вязкого течения изотермического изменения состояния

В этом параграфе исследуется задача Навье-Стокса для сжимаемой жидкости с вязкостью вида (4.1)-(4.4) при входных данных (4.5), (4.6). Для решения этой задачи уравнения (4.1), (4.2), (4.3) преобразуем к виду

$$
\begin{cases}
U_{1t}+\theta_1=f_1-J_1+\tilde{\mu}\Delta U_1,\\
U_{2t}+\theta_2=f_2-J_2+\tilde{\mu}\Delta U_2,\\
U_{3t}+\theta_3=f_3-J_3+\tilde{\mu}\Delta U_3,
\end{cases}
\tag{4.1.1}
$$

$$
\begin{cases}
U_1=\rho u,U_2=\rho\upsilon,U_3=\rho w,J_x\equiv J_1,J_y\equiv J_2,J_z\equiv J_3;\\
U_i\big|_{t=0}=U_{0i},i=\overline{1,3};\\
U_{01}=\rho_0u_0,U_{02}=\rho_0\upsilon_0,U_{03}=\rho_0w_0;\\
\rho_t+(U_1)_x+(U_2)_y+(U_3)_z=0;\\
P-\rho RT=0,
\end{cases}
\tag{4.1.2}
$$

$$
\begin{cases}
\theta_1=-u[U_{1x}+U_{2y}+U_{3z}]+\rho[uu_x+\upsilon u_y+wu_z]+\tilde{\mu}\Delta U_1-F_1(u,\upsilon,w,\mu)-\\
-2^{-1}(\rho[u^2+\upsilon^2+w^2])_x,\\
\theta_2=-\upsilon[U_{1x}+U_{2y}+U_{3z}]+\rho[u\upsilon_x+\upsilon\upsilon_y+w\upsilon_z]+\tilde{\mu}\Delta U_2-F_2(u,\upsilon,w,\mu)-\\
-2^{-1}(\rho[u^2+\upsilon^2+w^2])_y,
\end{cases}
\tag{4.1.3}
$$

$$\begin{cases}\theta_3 = -w[U_{1x} + U_{2y} + U_{3z}] + \rho[uw_x + \upsilon w_y + ww_z] + \tilde{\mu}\Delta U_3 - F_3(u,\upsilon,w,\mu) - \\ -2^{-1}(\rho[u^2+\upsilon^2 + w^2])_z,\end{cases}$$

где $u,\upsilon,w,U_i,\rho,P,\theta_i,(i=\overline{1,3})$ – неизвестные функции. Когда параметр вязкости μ допускает условие (4.6), то решение задачи (4.1)-(4.4) ищем в пространстве $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, т.е. решение задачи Навье-Стокса обладает свойством условной гладкости в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$:

$$\begin{cases}\int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|u_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\upsilon_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \int\limits_0^{T_0}\int\limits_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|w_t(x,y,z,t)\right|^2 dxdydzdt \le K < +\infty, \\ \|v\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} + \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} + \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}, \\ \|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)} = \|u\|_{C^{3,0}(T)} + \|u_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)} = \|\upsilon\|_{C^{3,0}(T)} + \|\upsilon_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)} = \|w\|_{C^{3,0}(T)} + \|w_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}}, \\ \tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : u \in C^{3,0}(T); u_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : \upsilon \in C^{3,0}(T); \upsilon_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ \tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T) = \{(x,y,z,t) \in T = R^3 \times [0,T_0] : w \in C^{3,0}(T); w_t \in L^2_{\lambda\Omega}[R^3 \times (0,T_0)]\}, \\ 0 \le \lambda(t) : \int\limits_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt = q_0; 0 \le \Omega : \int\limits_{R^3} \Omega(x,y,z)dxdydz = 1, C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T).\end{cases} \tag{4.1.4}$$

Докажем совместимости этих систем в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Введем обозначения

$$\begin{cases}U_i = V_i(x,y,z,t) + C_i(x,y,z,t), i = \overline{1,3}; \\ C_i(x,y,z,t) = \int\limits_0^t [\theta_i(x,y,z,\tau) + J_i(x,y,z,\tau)]d\tau, i = \overline{1,3}\end{cases} \tag{4.1.5}$$

с условиями

$$\begin{cases}V_i\big|_{t=0} = U_{0i}; C_i\big|_{t=0} = 0, (i=\overline{1,3}), \forall(x,y,z) \in R^3, \\ \theta_i(x,y,z,t) = -J_i(x,y,z,t) + C_{it}(x,y,z,t), (i=\overline{1,3}),\end{cases}$$

где V_i, C_i - новые неизвестные функции. При этом имеет место лемма.

Лемма 4.1.1. Пусть функции V_i, C_i являются решениями системы

$$\begin{cases} V_{it} = \tilde{\mu}\Delta V_i, i = \overline{1,3}, \\ 2C_{it} = f_i + \tilde{\mu}\Delta C_i, i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Тогда (4.1.5) является решением системы (4.1.1).

Доказательство. Учитывая частные производные по совокупности пространственных аргументов и по t при $t>0$, т.е.

$$\begin{cases} U_{1t} = V_{1t}(x,y,z,t) + C_{1t}(x,y,z,t), U_{2t} = V_{2t}(x,y,z,t) + C_{2t}(x,y,z,t), \\ U_{3t} = V_{3t}(x,y,z,t) + C_{3t}(x,y,z,t); \Delta U_1 = \Delta V_1(x,y,z,t) + \Delta C_1(x,y,z,t), \\ \Delta U_2 = \Delta V_2(x,y,z,t) + \Delta C_2(x,y,z,t), \Delta U_3 = \Delta V_3(x,y,z,t) + \Delta C_3(x,y,z,t); \\ \theta_i(x,y,z,\tau) = -J_i(x,y,z,\tau) + C_{it}(x,y,z,t), i = \overline{1,3} \end{cases}$$

и подставляя эти значения в (4.1.1), получим

$$\begin{cases} V_{1t} + 2C_{1t} - J_1 = f_1 - J_1 + \tilde{\mu}(\Delta V_1 + \Delta C_1), \\ V_{2t} + 2C_{2t} - J_2 = f_2 - J_2 + \tilde{\mu}(\Delta V_2 + \Delta C_2), \\ V_{3t} + 2C_{3t} - J_3 = f_3 - J_3 + \tilde{\mu}(\Delta V_3 + \Delta C_3). \end{cases} \tag{4.1.7}$$

Далее, учитывая (4.1.6) из системы (4.1.7) получим тождество, т.е. действительно, если V_i, C_i являются решениями уравнений системы (4.1.6), то (4.1.5) является решением системы (4.1.1). Что и требовалось доказать.

Далее, рассмотрим систему (4.1.6).

I. Первое уравнение системы (4.1.6) имеет единственное решение в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, т.е.

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{0i}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t}, y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t}, z+2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t})\times$$
$$\times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \equiv \varphi_i(x,y,z,t) \in G^2_{\lambda\Omega}(T), i = \overline{1,3}. \tag{4.1.8}$$

Обсуждая, аналогично относительно $C_i, i = \overline{1,3}$, имеем

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-\frac{r^2}{4\alpha(t-s)})\frac{1}{8(\sqrt{\alpha(t-s)})^3}\frac{1}{2}f_i(s_1,s_2,s_3,s)ds_1ds_2ds_3ds =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\frac{1}{2}f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+$$
$$+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv \psi_i(x,y,z,t), i = \overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\tilde{\mu}, \tag{4.1.9}$$

где $C_i, i = \overline{1,3} \in \tilde{C}^{3,1}(T)$. Поэтому $C_i, i = \overline{1,3}$ допускают ограничения и в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$ (см. §4.2). Следовательно, на основе (4.1.5), получим

$$\begin{cases} U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))U_{0i}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t}, y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t}, z+ \\ +2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t})d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_i(x+ \\ +2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds \equiv Y_i, \\ Y_i \equiv \varphi_i + \psi_i \in G^2_{\lambda\Omega}(T), i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

Y_i – известные функции и по x, y, z имеют непрерывные частные производные 3-го порядка, а производные 1-го порядка по t определены для $t>0$ (т.е. $t=0$ является особой точкой для $U_{it}, i=\overline{1,3}$). Тогда при условии (4.1.4) функции $Y_i \in G^2_{\lambda\Omega}(T)$ (ограниченность Y_i, см. §4.2).

II. Далее, из (4.1.2) имеем

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 - \int\limits_0^t \phi(x,y,z,s)ds \equiv \gamma(x,y,z,t), \\ \phi \equiv (U_1)_x + (U_2)_y + (U_3)_z = [\varphi_1(x,y,z,t)+\psi_1(x,y,z,t)]_x + \\ +[\varphi_2(x,y,z,t)+\psi_2(x,y,z,t)]_y + [\varphi_3(x,y,z,t)+\psi_3(x,y,z,t)]_z. \end{cases} \qquad (4.1.11)$$

Тогда учитывая (4.1.2), (4.1.3) и (4.1.10), получим

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{\gamma}[\varphi_1(x,y,z,t)+\psi_1(x,y,z,t)] \equiv \dfrac{1}{\gamma}[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times U_{01}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t}, y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t}, z+2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t})d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_1(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, \\ z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds] \equiv H_1, \\ \upsilon = \dfrac{1}{\gamma}[\varphi_2(x,y,z,t)+\psi_2(x,y,z,t)] \equiv \dfrac{1}{\gamma}[\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\times \\ \times U_{02}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t}, y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t}, z+2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t})d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ +\dfrac{1}{\sqrt{\pi}^3}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{1}{2}f_2(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, \\ z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds] \equiv H_2, \end{cases} \qquad (4.1.12)$$

$$\begin{cases} w = \frac{1}{\gamma}[\varphi_3(x,y,z,t) + \psi_3(x,y,z,t)] \equiv \frac{1}{\gamma}[\frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \times \\ \times U_{03}(x+2\tau_1\sqrt{\tilde{\mu}t}, y+2\tau_2\sqrt{\tilde{\mu}t}, z+2\tau_3\sqrt{\tilde{\mu}t}) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\limits_0^t \int\limits_{R^3} \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2)) \frac{1}{2} f_3(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, \\ z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 ds] \equiv H_3, H_i \in G^2_{\lambda\Omega}(T), i=\overline{1,3}; \alpha = 2^{-1}\tilde{\mu}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = -H_1\phi + \gamma[H_1H_{1x} + H_2H_{1y} + H_3H_{1z}] + \tilde{\mu}\Delta[\varphi_1(x,y,z,t) + \\ +\psi_1(x,y,z,t)] - \{\frac{\partial}{\partial x}[\mu(2H_{1x} - \frac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})] + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(H_{1y}+H_{2x})] + \\ + \frac{\partial}{\partial z}[\mu(H_{1z}+H_{3x})]\} - 2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_x \equiv \beta_1(x,y,z,t), \\ \theta_2 = -H_2\phi + \gamma[H_1H_{2x} + H_1H_{2y} + H_3H_{2z}] + \tilde{\mu}\Delta[\varphi_2(x,y,z,t) + \\ +\psi_2(x,y,z,t)] - \{\frac{\partial}{\partial y}[\mu(2H_{2y} - \frac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})] + \frac{\partial}{\partial z}[\mu(H_{2z}+H_{3y})] + \\ + \frac{\partial}{\partial x}[\mu(H_{1y}+H_{2x})]\} - 2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_y \equiv \beta_2(x,y,z,t), \\ \theta_3 = -H_3\phi + \gamma[H_1H_{3x} + H_2H_{3y} + H_3H_{3z}] + \tilde{\mu}\Delta[\varphi_3(x,y,z,t) + \\ +\psi_3(x,y,z,t)] - \{\frac{\partial}{\partial z}[\mu(2H_{3z} - \frac{2}{3}(H_{1x}+H_{2y}+H_{3z})] + \frac{\partial}{\partial x}[\mu(H_{3x}+H_{1z})] + \\ + \frac{\partial}{\partial y}[\mu(H_{2z}+H_{3y})]\} - 2^{-1}(\gamma[H_1^2+H_2^2+H_3^2])_z \equiv \beta_3(x,y,z,t), \end{cases} \quad (4.1.13)$$

где $H_i, \beta_i, i=\overline{1,3}$ - известные функции. Следовательно, на основе

$$\theta_i(x,y,z,t) = -J_i(x,y,z,t) + C_{it}(x,y,z,t), (i=\overline{1,3}),$$

имеем

$$\begin{cases} J_x = \psi_{1t} - \beta_1, \\ J_y = \psi_{2t} - \beta_2, \\ J_z = \psi_{3t} - \beta_3, \\ J_1 \equiv J_x, J_2 \equiv J_y, J_3 \equiv J_z. \end{cases} \quad (4.1.14)$$

Отсюда получим уравнение Пуассона

$$\Delta J = -\Phi(x,y,z,t), \Phi \equiv -[\psi_{1t} - \beta_1]_x - [\psi_{2t} - \beta_2]_y - [\psi_{3t} - \beta_3]_z,$$

при этом

$$\begin{cases} J=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\dfrac{1}{r}\Phi(s_1,s_2,s_3,t)ds_1ds_2ds_3; J\equiv P+\dfrac{1}{2}\rho(u^2+\upsilon^2+w^2), \\ r=\sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2+(z-s_3)^2}, \Phi(x,y,z,t)\equiv-[\psi_{1t}-\beta_1]_x- \\ -[\psi_{2t}-\beta_2]_y-[\psi_{3t}-\beta_3]_z; J_x\equiv J_1, J_y\equiv J_2, J_z\equiv J_3: \\ J_i=\dfrac{1}{4\pi}\int\limits_{R^3}\tau_i\dfrac{\Phi(x+\tau_1,y+\tau_2,z+\tau_3;t)d\tau_1d\tau_2d\tau_3}{\sqrt{(\tau_1^{\ 2}+\tau_2^{\ 2}+\tau_3^2)^3}}, i=\overline{1,3}. \end{cases} \qquad (4.1.15)$$

Из полученных результатов следует (4.7).

Утверждение 4.1.1. При условиях (4.2)-(4.6) и (4.1.4) система Навье-Стокса (4.1) имеет точное единственное условно-гладкое решение (u,υ,w) в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

§4.2. Ограниченность решения задачи Навье-Стокса для изотермического изменения состояния в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$

Чтобы доказать ограниченность $v=(u,\upsilon,w)$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$**,** достаточно доказать ограниченность функций $V_i, i=\overline{1,3},$ и $C_i, i=\overline{1,3}$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Пусть выполняются условия

$$\begin{cases} \left|D^k f_i(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)\right|\le M_{02}(s), \\ \forall(x,y,z,t,\tau_1,\tau_2,\tau_3,s)\in E_0=(R^3\times[0,T_0])\times(R^3\times[0,T_0]), (i=\overline{1,3}); \\ \left|f_i(x,y,z,t)\right|\le M_{03}, \forall(x,y,z,t)\in T=R^3\times[0,T_0], (i=\overline{1,3}); \\ \sup\limits_T\dfrac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int\limits_0^t\int\limits_{R^3}\ \exp(-(\tau_1^2+\tau_2^2+\tau_3^2))\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t-s}}\{\sum\limits_{j=1}^3\left|f_{i,l_j}(x+2\tau_1\sqrt{\alpha(t-s)}, y+\right. \\ \left.+2\tau_2\sqrt{\alpha(t-s)}, z+2\tau_3\sqrt{\alpha(t-s)}; s)\right|\times\left|\tau_j\right|\}d\tau_1d\tau_2d\tau_3ds\le M_{05}, (i=\overline{1,3}); \\ \sup\limits_{[0,T_0]}\int\limits_0^t M_{02}(s)ds\le M_{04}; M_{01}=\max(M_{03},M_{04},M_{05}); \tilde{M}_0=10M_{04}\le 10M_{01}, \\ \tilde{M}_1=\dfrac{1}{2}(M_{03}+M_{05})\le M_{01}; k=0: D^0f_i\equiv f_i; k\ne 0: D^kf_i=\dfrac{\partial^{|k|}f_i}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}, \\ |k|=\sum\limits_{m=1}^3 k_m, (k_m=\overline{0,3}; m=\overline{1,3}); d=(\int\limits_0^{T_0}\lambda(t)dt)^{\frac{1}{2}}, \int\limits_{R^3}\Omega(x,y,z)dzdydx=1. \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Тогда оценивая (4.1.9) и учитывая норму $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, получим

$$\|\psi\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\|\Psi\|_{C^{3,0}(T)}+\|\Psi_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)}\le 3(\tilde{M}_0+d\tilde{M}_1)=M_*, \qquad (4.2.2)$$

где

$$\begin{cases} \Psi = (C_1, C_2, C_3), \Psi_t = (C_{1t}, C_{2t}, C_{3t}) : \|\Psi_t\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3} \|C_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3\tilde{M}_1 d, \\ \|\Psi\|_{\tilde{C}^{3,0}(T)} = \sum\limits_{i=1}^{3} \|C_i\|_{\tilde{C}^{3,0}_{(C_i;T)}(T)} \le M_0 = 3\tilde{M}_0, \|C_i\|_{\tilde{C}^{3,0}_{(C_i;T)}(T)} \le \tilde{M}_0, (i = \overline{1,3}). \end{cases}$$

С другой стороны, так как по условию задачи (4.1)-(4.4) функции $U_{0i}, i = \overline{1,3}$ допускают условия $U_{0i} \in C^3(R^3)$, то функции $V_i\ , i = \overline{1,3},$ найденные по формуле (4.1.8) ограничены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, где

$$\|V\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} = \sum_{i=1}^{3} \|V_i\|_{\tilde{D}^2_{(V_i;\lambda\Omega)}(T)}. \tag{4.2.3}$$

Ограниченность функций $V_i, i = \overline{1,3}$ по x, y, z в $C^{3,0}(T)$, очевидна

$$\begin{cases} \|V\|_{C^{3,0}(T)} \le \sum\limits_{i=1}^{3} \|V_i\|_{C^{3,0}(T)} \le 3M_2, \\ \|V_i\|_{C^{3,0}(T)} = \sum\limits_{0 \le |k| \le 3} \|D^k V_i\|_{C(T)} \le 20M_1 = M_2, \\ |D^k U_{0i}| \le M_1, i = \overline{1,3}; C^{3,0}(T) \equiv C^{3,3,3,0}(T); V = (V_1, V_2, V_3). \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Чтобы оценить в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, сперва, $V_{it}, i = \overline{1,3}$ оценим в $L^2_{\lambda\Omega}(T)$. Для этого, дифференцируя (4.1.8) по t для $t>0$, затем, оценивая и возведя в квадрат с умножением на $\lambda(t)\Omega(x,y,z)$, и, интегрируя по области $T = R^3 \times (0, T_0)$ с учетом

$$\int_0^{T_0}\int_{R^3} \lambda(t)\Omega(x,y,z)|V_{it}(x,y,z,t)|^2\, dxdydzdt \le K < +\infty, i = \overline{1,3} \tag{4.2.5}$$

имеем

$$\|V_{it}\|_{L^2_{\lambda\Omega}} \le 3M_1\sqrt{\mu q_0}, i = \overline{1,3}, q_0 = \int_0^{T_0} \lambda(t)\frac{1}{t}dt. \tag{4.2.6}$$

Отсюда, учитывая (4.2.3), получим

$$\|V\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)} \le 3(M_2 + 3M_1\sqrt{\mu q_0}) = M_3. \tag{4.2.7}$$

Утверждение 4.2.1. Если имеют место (4.2.2), (4.2.7), то функции $V_i, C_i, i = \overline{1,3}$, следовательно, и $U_i, i = \overline{1,3}$ ограничены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$. Тогда на основе (4.1.12) и функции u, υ, w ограничены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Доказательство. Условия (4.2.2), (4.2.7) показывают ограниченности функций $V_i, C_i, i = \overline{1,3}$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$. Следовательно, с учетом (4.1.5) получим ограниченность $U = (U_1, U_2, U_3)$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

В самом деле, оценивая $U=(U_1,U_2,U_3)$, имеем

$$\|U\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\sum_{i=1}^{3}\|U_i\|_{\tilde{D}^2_{(U_i;\lambda\Omega)}(T)}\le M_3+M_*=N_0. \qquad (4.2.8)$$

Так как $0<\rho\in\tilde{C}^{3,1}(T)$ и функции $U=(U_1,U_2,U_3)$ ограничены в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, то с учетом (4.1.12) получим и ограниченность $v=(u,\upsilon,w)$ в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$, т.е.

$$\begin{gathered}\|v\|_{G^2_{\lambda\Omega}(T)}=\|u\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}+\|\upsilon\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}+\|w\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}\le\|H_1\|_{\tilde{D}^2_{(u;\lambda\Omega)}(T)}+\\+\|H_2\|_{\tilde{D}^2_{(\upsilon;\lambda\Omega)}(T)}+\|H_3\|_{\tilde{D}^2_{(w;\lambda\Omega)}(T)}.\end{gathered} \qquad (4.2.9)$$

Что и требовалось доказать.

Примечание 4.1

1) Аналогичным образом доказываются ограниченности функций $\theta_i, i=\overline{1,3}$.

2) Ограниченность решения задачи Навье-Стокса с вязкостью изотермического изменения состояния в $W^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Пусть решение задачи (4.1)-(4.4): $v=(u,\upsilon,w)$ допускает ограничения:

$$\begin{cases}\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k u(x,y,z,t)]^2dxdydzdt+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times\\ \times|u_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K_0<+\infty,\\ \int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k \upsilon(x,y,z,t)]^2dxdydzdt+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times\\ \times|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K_0<+\infty,\\ \int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k w(x,y,z,t)]^2dxdydzdt+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times\\ \times|w_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\le K_0<+\infty.\end{cases} \qquad (4.2.10)$$

Тогда

$$\begin{gathered}v=(u,\upsilon,w)\in W^2_{\lambda\Omega}(T)=\{(x,y,z,t)\in T:D^k u,u_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right];\\ D^k\upsilon,\upsilon_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right];D^k w,w_t\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right]\},\end{gathered}$$

где

$$\begin{cases} k=0: D^0u\equiv u, D^0\upsilon\equiv\upsilon, D^0w\equiv w; k\neq 0: D^ku=\dfrac{\partial^{|k|}u}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}, D^k\upsilon=\dfrac{\partial^{|k|}\upsilon}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}, \\ D^kw=\dfrac{\partial^{|k|}w}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}}, |k|=\sum_{m=1}^{3}k_m, (k_m=\overline{0,3}; m=\overline{1,3}), \end{cases}$$

причем

$$\|v\|_{W^2_{\lambda\Omega}}=\{\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^ku(x,y,z,t)]^2dxdydzdt+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\times$$

$$\times|u_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\}^{\frac{1}{2}}+\{\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k\upsilon(x,y,z,t)]^2dxdydzdt+$$

$$+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)|\upsilon_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\}^{\frac{1}{2}}+\{\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^kw(x,y,z,t)]^2\times$$

$$\times dxdydzdt+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)|w_t(x,y,z,t)|^2\,dxdydzdt\}^{\frac{1}{2}};$$

$$0\le\lambda(t):\int_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt=q_0<+\infty; 0\le\Omega:\int_{R^3}\Omega(x,y,z)dxdydz=1,$$

$W^2_{\lambda\Omega}(T)$-весовое пространство типа Соболева. При этом найденные решения системы Навье-Стокса (4.1) ограничены в $W^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Утверждение 4.2.2. В условиях (4.2)-(4.6), (4.2.10) функции $V_i, C_i, i=\overline{1,3}$, следовательно, и $U_i, i=\overline{1,3}$ ограничены в $W^2_{\lambda\Omega}(T)$. Поэтому на основе (4.1.12) и функции $v=(u,\upsilon,w)$ ограничены в $W^2_{\lambda\Omega}(T)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов работы можем сделать следующее заключение:

Критерий гладкости решений задачи для уравнений Навье-Стокса.

I. В условиях (2.2), (2.3) система (2.1) имеет условно-гладкое единственное решение в $G^2_\lambda(T)$, $G^2_{\lambda\Omega}(T)$[или $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$] тогда и только тогда, когда выполняются условия §2.1, §2.4.2 главы 2 или главы 3. При условии, когда задача Навье-Стокса рассматривается со средней величиной вязкости (2.3.1), то задача (2.1)-(2.3) имеет единственное гладкое решение в $\tilde{C}^{3,1}(T)$[см. §2.3, гл.2] и в $\tilde{C}^{2,1}(T)$ [см. §2.4.1, гл.2].

II. При условиях (4.2)-(4.6) система (4.1) имеет условно-гладкое единственное решение в $G^2_{\lambda\Omega}(T)$.

Автор с благодарностью отмечает, что именно фундаментальные работы [2,5,6,7,…] дали идею разработки настоящего метода, которая позволяет изучить задачу Навье-Стокса с вязкостью [1]. В литературной части немыслимо приводить все работы, которые посвящены этой проблеме, так как здесь решается задача, которая поставлена в работе [1]. Поэтому нет необходимости приводить обширный список трудов.

Изучая работы в этой области, можем сделать следующие заметки:

1. В работе Биркгофа [10] отмечено, что с 1790 по 1940 годы исследованы семь аналитических моделей в механике жидкостей:

1) течение Эйлера-Лагранжа;
2) вихревое течение Кельвина-Гельмгольца;
3) вязкое несжимаемое течение Навье-Стокса;
4) звуковые волны Гельмгольца-Релея;
5) сверхзвуковые потоки и ударные волны;
6) турбулентное вихревое течение;
7) диффузионная модель средней длины пробега.

Разработка эффективных численных методов для исследования этих задач весьма актуальна, но, все-таки, аналитические методы решения некоторых из этих задач в полном смысле не разработаны, так как описываются нелинейными уравнениями в частных производных.

2. В этой области отметим и работу Кантуэлла [9], которая касается уравнений Рейнольдса, которые получают путем подстановки в уравнения Навье-Стокса среднего и пульсационного параметров потока, что еще более усложняет уравнения Навье-Стокса. При этом, в полученных уравнениях в общем случае немыслимо найти аналитические решения, которые соответствовали бы работе [1].

3. В работе Ладыженской О.А. и Солонникова В.А. [8] рассматривается искусственно-линеаризованная задача Навье-Стокса в неограниченной области для несжимаемой жидкости с вязкостью, постановка задачи которой не соответствует задачи Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью, а полученные результаты не могут быть применены к задачам института Клэя [1].

Аналогичные обсуждения можно сделать и относительно многих других работ. Но это не означает, что автор в какой-то мере снижает достоинство этих и других работ, которые указаны или не приведены, поскольку найденный путь решения проблемы не связан с этими работами.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ ИЗЛОЖЕННОЙ ТЕОРИИ

1) Проверить применение разработанной теории к задачам Навье-Стокса в ограниченной области.

2) Провести исследования на основе разработанной теории и задачи Навье-Стокса, когда $u\in R^{n}$, $x\in R^{n}$, $t\in[0,\ +\infty\,)$.

3) В начале главы 1 указано, если

$$\sum_{0\le|k|\le 2}(\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k\prod_i(x,y,z,t)]^2dxdydzdt)+$$

$$+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\prod_{it}(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\le K_0<+\infty, i=\overline{1,3},$$

то

$$\prod_i\in W^2_{\lambda\Omega}(T)=\{(x,y,z,t)\in T:D^k\prod_i\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right],$$

$$\prod_{it}\in L^2_{\lambda\Omega}\left[R^3\times(0,T_0)\right]\},(i=\overline{1,3});$$

$$k=0:D^0\prod_i(x,y,z,t)\equiv\prod_i;k\ne 0:D^k\prod_i=\frac{\partial^{|k|}\prod_i}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial z^{k_3}},$$

$$|k|=\sum_{m=1}^{3}k_m,(k_m=\overline{0,2};m=\overline{1,3}),$$

причем

$$\|\prod_i\|_{W^2_{\lambda\Omega}}=\{\sum_{0\le|k|\le 2}(\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)[D^k\prod_i(x,y,z,t)]^2dxdydzdt)+$$

$$+\int_0^{T_0}\int_{R^3}\lambda(t)\Omega(x,y,z)\left|\prod_{it}(x,y,z,t)\right|^2dxdydzdt\}^{\frac{1}{2}},(i=\overline{1,3});$$

$$0\le\lambda(t):\int_0^{T_0}\lambda(t)\frac{1}{t}dt=q_0<+\infty;0\le\Omega:\int_{R^3}\Omega(x,y,z)dxdydz=1,$$

где $W^2_{\lambda\Omega}(T)$ весовое пространство типа Соболева. При этом необходимо проверить, что все результаты главы 3 реализуемы в классе функций $W^2_{\lambda\Omega}(T)$.

АННОТАЦИЯ

В данной работе предлагается метод решения задачи Навье-Стокса с вязкостью, поставленной институтом Клэя [1].

Работа состоит из четырех глав.

В первой главе приводятся краткое содержание используемых методов и пространств, которые используются для изучения задачи Навье-Стокса.

В главе 2 изучается задача Навье-Стокса с вязкостью [1,2]:

$$\upsilon_{it}+\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\upsilon_{ix_j}=f_i-\frac{1}{\rho}P_{x_i}+\mu\Delta\upsilon_i, i=\overline{1,3}, \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\vec{\upsilon}=0, \tag{1.2}$$

$$\upsilon(\vec{x},t)\big|_{t=0}=\upsilon^0(\vec{x}), x\in R^3, t\in[0,T_0]. \tag{1.3}$$

Если параметр вязкости: $0<\mu<1,$ то решение задачи (1.1)-(1.3) обладает свойством условной гладкости в $G^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,T_0)]$, $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,\infty)]$ [см. §2.1, §2.4.2, гл.2], соответственно. При этом, когда $\delta=\sqrt{\mu}$, допустимая погрешность оценки будет порядка $O(\sqrt{\mu})$ в $G^2_{\lambda\Omega}[R^3\times(0,T_0)]$.

Когда течение рассматривается со средней величиной вязкости: $0<\mu=\mu_0=\text{const}$, то найденное решение задачи (1.1)-(1.3) обладает свойством гладкости в $\tilde{C}^{2,2,2,1}(T)\equiv\tilde{C}^{2,1}(T)$ [см. §2.3, $T=R^3\times[0,T_0]$; §2.4.1, $T=R^3\times R_+$, гл.2].

Целью главы 3 является асимптотическое разложение решения задачи (1.1)-(1.3) и доказательство ограниченности решений в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}[T=R^3\times(0,T_0)]$. При условиях асимптотического разложения:

$$\upsilon_{i\mu}(x_1,x_2,x_3,t)=\bar{\upsilon}_i(x_1,x_2,x_3,t)+\xi_i(x_1,x_2,x_3,t)+\prod\nolimits_i(x_1,x_2,x_3,t), i=\overline{1,3}, \tag{1.4}$$

$$\bar{\upsilon}_i(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{t=0}=\bar{\upsilon}^0_i(x_1,x_2,x_3), i=\overline{1,3}; \text{div}\bar{\upsilon}=\sum_{i=1}^{3}\bar{\upsilon}_{ix_i}=0,$$

$$\xi_i(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{t=0}=0; \prod\nolimits_i(x_1,x_2,x_3,t)\big|_{t=0}=\prod\nolimits^0_i(x_1,x_2,x_3)\equiv\upsilon^0_i-\bar{\upsilon}^0_i, (i=\overline{1,3}),$$

когда $\mu\to 0$ доказывается, что решение системы (1.1) сходится к решению вырожденной системы: $\bar{\upsilon}_{it}+\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{3}\bar{\upsilon}^2_j)_{x_i}=\bar{f}_i-\frac{1}{\rho}\bar{P}_{x_i}$ в $\bar{D}^2_{\lambda\Omega}(T)$ с оценкой $O(\sqrt{\mu})$.

Полученные результаты обобщены к задачам Навье-Стокса вида

$$\upsilon_{it}+\sum_{j=1}^{3}\upsilon_j\upsilon_{ix_j}=f_i-\frac{1}{\rho}P_{x_i}+\mu\Delta\upsilon_i+\varepsilon_\mu\Omega_i(\upsilon_i), (i=\overline{1,3}); 0<\mu,\varepsilon_\mu<1: \varepsilon_\mu\xrightarrow[\mu\to 0]{}0,$$

$$\Omega_i(\upsilon_i)\equiv\int_{R^3}K_i(x_1,x_2,x_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\upsilon_i(\tau_1,\tau_2,\tau_3,t)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

В главе 4 исследована задача Навье-Стокса для сжимаемой жидкости с вязкостью [2], а точнее задача изотермического изменения состояния, где определяются неизвестные величины: $v=(u,\upsilon,w)$, P – давление, ρ – плотность.

Литература

1. Существование и гладкость решений уравнений Навье-Стокса /Задачи тысячелетия, сформулированные в 2000 году Математическим институтом Клея. http://www.claymath.org./prize_problems/index.htm

2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.–Москва: Наука, 1974.–712 с.

3. Омуров Т.Д. Нестационарная задача Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. – Бишкек: Изд-во КНУ им. Ж. Баласагына, 2010. – 21 с. (Регистр Кыргызпатента: авторское свидетельство №1543 от 30.07.2010 г.). www.university.kg

4. Омуров Т.Д. Нестационарная задача Навье – Стокса для несжимаемой жидкости с вязкостью / Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - Т. 10. - Вып. 1.- 2011.-URL: http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/TITL.HTM

5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1966.– 443 с.

6. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – Москва: Наука, 1970. - 288 с.

7. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О Начально-краевой задаче для линеаризованных уравнений Навье-Стокса в областях с некомпактными границами // Краевые задачи математической физики. 12, сб. работ, тр. МИАН СССР, 1983. – Т. 159. – С. 37-40.

8. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости: В 2-х т.- Москва: Мир, 1991.

9. Cantwell B.J. Organized motion in turbulent flow // Ann.Rev. Fluid Mech. – 1981. –V.13. –P.457-515. (Рус.пер.: Вихри и волны. – Москва:Мир, 1984. –С.9-79).

10.Birkhoff G.Numerical fluid dynamics // SIAM Rev. -1983. – V.25. – No1. – P. 1 – 34.

11. Prantdl L. Fuhrer durch die Stromungslehre. Изд. 6-е, Braunschweig 1965. (Имеется русский перевод с третьего немецкого издания: Прандтль Л., Гидроаэромеханика. –Москва: ИЛ, 1951. -576 с).

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1*. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – Гидродинамика: Т. 6. – Москва: Наука, 1988. -736 с.

2*. Николаевский В.Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны. Под ред. В.Н. Николаевского. – Москва: Мир, 1984. – 266-335 с.

3*. Пандольфи М. Численные эксперименты при движении воды со свободной поверхностью и ступенчатыми волнами // Численное решение задач гидромеханики. Под ред. Р. Рихтмайера. – Москва: Мир, 1973. –55-63 с.

4*. Rotta J.C. Turbulent boundary layers in incompressible flow. В книге «Progress in Aeronautical Sciences», под ред. A. Ferry, D. Kuchemann'a, L.H. Sterne'a, Pergamon Press, Oxford 1962, т. II, -с. 1-29 (Имеется русский перевод: Ротта И.К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. «Судостроение», 1967).

5*. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – Москва: Наука, 1966. -488 с.

6*. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. – Москва: Мир, 1971. -260 с.

7*. Стокер Дж. Волны на воде. – Москва: ГИЛ, 1959. -618 с.

8*. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – Москва: Мир, 1981. -403 с.

9*. Чушкин П.И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – Москва: изд-во ВЦ АН СССР, 1968. -123 с.

10*. Holt Maurice. The changing scene in computational fluid dynamics // Comput. Techn. and Appl. CTAC – 83. – Amsterdam e.a., 1984. –P. 15-30.

11*. Омуров Т.Д. Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода.- Бишкек: Илим, 2003. - 162с.

12*.Омуров Т.Д., Туганбаев М.М. Прямые и обратные задачи одно-скоростной теории переноса. – Бишкек: Илим, 2010. – 116с.

Omurov Taalaibek Dardayilovich

Nonstationary Navier-Stokes problem for fluid with viscosity
Zh.Balasagyn KNU – Bishkek, 2011.- 116p.

Existence and smooth solution of the Navier-Stokes equation is one of the most important problems in mathematics of the century stated by Clay Mathematics Institute in 2000, which describes the motion of viscous Newtonian fluid and which is a basic of hydrodynamic. The chief object of this work is to prove existence and smooth solution of nonstationary problem Navier-Stokes for fluid with viscosity.

Bibliography 11 names

The main content of the work is registered in Kyrgyzpatent: Sector of copyright objects, author's certificate No. 1543 of 2010/07/30.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Омуров Таалайбек Дардайылович

1957 года рождения, с. Карасу, Жайылского района, Кыргызская Республика, по национальности кыргыз. Доктор физико-математических наук, профессор, член кандидатского и докторского диссертационного Совета ИТиПМ НАН КР. Директор НИЦ Навье-Стокса Кыргызского Национального университета имени Ж. Баласагына. Отличник образования Кыргызской Республики. Опубликовано более 100 научных работ.

FROM PUBLISHING HOUSE

Omurov Taalaibek Dardayilovich

He was born in 1957 in Karasu village, Jayil district, Kyrgyz Republic, ethnic Kyrgyz, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Zhusup Balasagyn Kyrgyz National University. A member of Candidates' and Doctors' Dissertation Council of National Academy of Science of Kyrgyz Republic. Director of the Navier-Stokes Scientific Research Centre. He is a high achiever of Education of Kyrgyz Republic. More than 100 of his research works have been published.

E-mail: omurovtd@mail.ru

Отпечатано при финансовой поддержке Кыргызско-Китайского института КНУ им. Ж. Баласагына

Подписано в печать 16.12.2011г. Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Объем 7.25 п.л. Тираж 300 экз.
Типография «Maxprint» г. Бишкек,
ул. Курманжан Датки, 207