О СУЩЕСТВОВАНПП ПРЕДЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИРТУАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

Г.С. ЕВДОКИМОВА
СмолГУ, г. Смоленск, e-mail: evgalsema@gmail.ru

УДК 519.283

Ключевые слова: *входящий поток, переменные параметры, ведущая мера, среднее значение интенсивности, порядок поступления, периодические параметры, Марковский процесс, эргодические свойства.*

В работе изучен вопрос о существовании предельного распределения виртуального времени ожидания для системы массового обслуживания с периодическим входящим потоком

При исследовании реальных систем массового обслуживания в последние годы вплотную столкнулись с необходимостью учитывать наличие зависимости интенсивности поступления требований на обслуживание от момента времени. В предлагаемой работе методами теории восстановления исследован вопрос о существовании предельного распределения виртуального времени ожидания для системы массового обслуживания $M(t)/G/1/\infty$ в следующих предположениях: входящий поток требований пуассоновский с ведущей мерой $\Lambda(\Delta)=\int\limits_{\Delta}\lambda(u)\,du$, которая имеет период τ, иными словами, для любого борелевского множества Δ на прямой $\Lambda(\Delta+\tau)=\Lambda(\Delta)$; среднее значение интенсивности $\lambda(t)$ по периоду конечно, то есть $\lambda=\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\lambda(t)\,dt<\infty$; требования обслуживаются в порядке поступления; длительности обслуживания $\{\xi_k\}$ – случайные величины с распределением $F(x)=P(\xi_k\le x)$, причем $\mathbf{0}<\mu=\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}x\,dF(x)<\infty$; длительности обслуживания $\{\xi_k\}$ не зависят друг от друга и от входящего потока; обслуживающий прибор не выходят из рабочего состояния и немедленно после окончания обслуживания одного требования приступает к обслуживанию следующего из очереди.

Время ожидания в момент *t* обозначим через $\gamma(t)$ и определим как время, необходимое для завершения обслуживания всех требований, находящихся в системе в момент *t*. Если требование поступило в момент *t*, то его время ожидания равно $\gamma(t-\mathbf{0})$.

Теорема. Если распределение $F(x)$ имеет конечный первый момент и $\lambda\mu<\mathbf{1}$, то функцию распределения $\gamma(t)$ можно представить в виде

$P\{\gamma(t) \le x\} = M_t(x) + N_t(x)$, где функция $M_t(x)$ является периодической по t с периодом τ, а $N_t(x) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$. Распределение $M_t(x)$ не зависит от начального распределения для $\gamma(t)$ и является невырожденным. В противном случае при $\lambda\mu \ge \mathbf{1}$, $\lim\limits_{t \to \infty} \{\gamma(t) \le x\} = \mathbf{0}$ для всех x.

Наряду с потоком требований, поступающих в систему, рассмотрим еще два потока, которые сконструируем следующим образом. Все требования первого из этих потоков поступают лишь в моменты $n\tau$, причем в момент $n\tau$ поступает столько требований, сколько для истинного потока поступает в полусегменте $(n-\mathbf{1})\tau < t \le n\tau$. Второй поток получается из истинного путем сдвига моментов поступления требований на величину τ вправо. Доказательство теоремы разобьем на ряд этапов – четырех лемм:

Лемма 1.Для каждого $k \ge \mathbf{1}$ с вероятностью единица

$$t_k + \omega_k \le t'_k + \omega'_k < t_k + \omega_k + \tau,$$

где ω_k – длительность ожидания начала обслуживания k-м требованием.

Лемма 2. Для каждого n с вероятностью 1

$$\gamma'(n\tau) = \gamma'(n\tau - \mathbf{0}) + \chi'(n\tau),$$

$$\gamma'((n+\mathbf{1})\tau - \mathbf{0}) \le \gamma(n\tau), \ \gamma(n\tau) \le \gamma'(n\tau),$$

где $\chi'(n\tau)$ – полное время обслуживания всех требований, прибывших в момент времени $n\tau$.

Лемма 3. Для систем с простейшим входящим потоком интенсивности λ в условиях теоремы верно следующее: каковы бы ни были начальные условия, всегда найдется требование, которое застанет систему свободной; среднее расстояние между последовательными точками перехода системы из занятого состояния в свободное конечно.

Лемма 4. Для любого $l \ge \mathbf{1}$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} P_n^l = P^l$, который не зависит от начального состояния системы $\sum\limits_{l=\mathbf{1}}^{\infty} P^l = \mathbf{1}$.

На основании теоремы можно сделать вывод: системы описанного типа из любого начального состояния с течением времени входят в режим работы, при котором распределения характеристик являются периодическими функциями. Поэтому очередной и достаточно трудной является следующая задача: как зная исходные распределения длительности обслуживания и потока требований найти «стационарные решения», существование которых доказано.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

G.S. Evdokimova

The Existence of Extreme Distribution of the Virtual Queuing time

Key words: *incoming flow*, *variables, leading measure*, *mean intensity, order of admission, periodic parameters, Markovian process. ergodic properties.*

In paper arremployed to study the existence of extreme distribution of the virtual waiting time for service system with a periodic input flow.