

## ГЛАВА 2. ОБРАТНЫЙ МЕТОД ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПАМЯТИ

*Движение безвихрево  
И жидкость несжимаема.  
Вдоль некой тока линии  
Плывет форель одна.  
Тогда об этой рыбине  
Заранее все знаем мы:  
Чем больше скорость жидкости,  
Тем быстрее плывет она.*

«Эврика», Кембридж

*Из предыдущего материала книги следует, что особенностью биосистем — в аспекте электродинамического анализа и синтеза — по сравнению с большинством технических систем является их разветвление, как разветвление в нейронной сети мозга, что требует принципиально нового подхода к описанию таких систем. В настоящей главе такой подход ищется в сочетании трех концептуальных положений: а) аналогии совокупности каналов распространения ЭМВ в реальных биосистемах с системой «геодезических линий»; б) использовании разработанного авторами обратного метода электродинамической аналогии, то есть, в отличие от хорошо известного прямого метода, когда гидродинамические процессы моделируются — по понятной аналогии — в терминах электродинамики, здесь электродинамические процессы в разветвленных биосистемах моделируются в терминах гидродинамики; в) использовании относительно нового и весьма эффективного математического аппарата дифференциальных форм (внешней алгебры); используется авторский опыт его применения к решению различных задач биофизики, систематизированный в книгах<sup>37, 42, 134, 147, 269</sup>. В заключении предыдущей главы подчеркивалось, что полная теория ИММП должна включать в себя физико-математическое моделирование, что в настоящей главе и делается. Причем, как было сказано во Введении, полное матописание ИММП хотя и реально, и, что называется, «под силу» авторам с участием возглавляемых ими научных школ, но не входит в задачу настоящей книги, посвященной памяти, как субъекту ноосферной феноменологии. Поэтому мы решили остановиться только на одном, но существенно важном аспекте физико-*

*математического моделирования в концепции ИММП, а именно: анализ распространения сигналов в разветвленной системе нейронной сети, что выполняет функцию доставки (и извлечения — вспоминания) информации об образах-фактах в библиотеку памяти от внешних и внутренних источников. Подчеркнем: это важнейшая задача в создании концептуальной, логически непротиворечивой и физико-математически апробированной теории ИММП. Тем более, что наш метод ОМЭГДА, базовый в настоящей главе, является универсальным с позиций резервирования (см. Введение) передачи информации в биосистемах, тем более — в нейронной сети (памяти). Согласно нашей концепции, см. Введение и предыдущие тома серии «ЖМФН», передача информации по нейронным сетям осуществляется в системе резервирования как «тихоходными» электрическими (электрохимическими) сигналами, так и СГ ЭМВ. Причем, если первые доставляют в библиотеку памяти абрис образа-факта, то СГ ЭМВ, в силу возможностей солитона-голограммы, доставляют максимально-информационный слепок образа, отображенного в СГ ЭМВ. Это опять-таки постулат, как и сама ИММП, но, во-первых, почти за двадцать лет, начиная с нашей пионерской работы<sup>42</sup>, ни одного случая опровержения концепции СГ ЭМВ в мировой литературе не наблюдалось; во-вторых, вряд ли природа, особенно в части мышления и памяти, не воспользовалась бы СГ ЭМВ для передачи сигналов-образов. Именно ОМЭГДА применим как для анализа нейронных электрических сигналов, так и СГ ЭМВ, для которых, несомненно, нейроны являются канализирующей и направляющей структурой. Глава является чисто математической, доведенной до алгоритмического уровня, а соответствующее программирование с использованием языков не столь уж и высокого уровня есть решаемая техническая задача. Последний параграф главы посвящен (см. Введение) антропоморфности в изобретении человеком средств технической памяти.*

### **2.1. Обратный метод электрогидродинамической аналогии**

Биосистемы по своим геометрическим и топологическим характеристикам чрезвычайно сложны, причем степень этой сложности на порядок превышает сложность самых функционально насыщенных технических систем. Проведем некоторую условную аналогию между биосистемой и технической электрогидродинамической системой.

В качестве последней рассмотрим достаточно сложную структуру — крестообразное соединение прямоугольных волноводов (рис. 2.1).

Крестообразные волноводные соединения являются типичными неоднородностями и важнейшими узлами сверхвысокочастотной аппаратуры, но имеют более сложную по сравнению с простыми неоднородностями структуру и относящиеся к классу разветвлений. Рассмотрим показанное на рис. 2.1, *а* крестообразное соединение, реализующее *разделитель частотных каналов* и перспективный для использования в многоканальной аппаратуре.

Для получения многомодовой матрицы рассеяния в качестве рабочего математического метода используем декомпозиционный подход — метод автономных многомодовых блоков (АМБ). При анализе структура представляется в виде совокупности простых волноводных объектов: однородных изотропных *параллелепипедов* и *стыков* однородных волноводов. Собственно декомпозиционная схема приведена на рис. 2.1, *б*; здесь 1, 2 — параллелепипеды; 3, 4, ..., 9 — стыки, соединенные между собой отрезками регулярных волноводов.

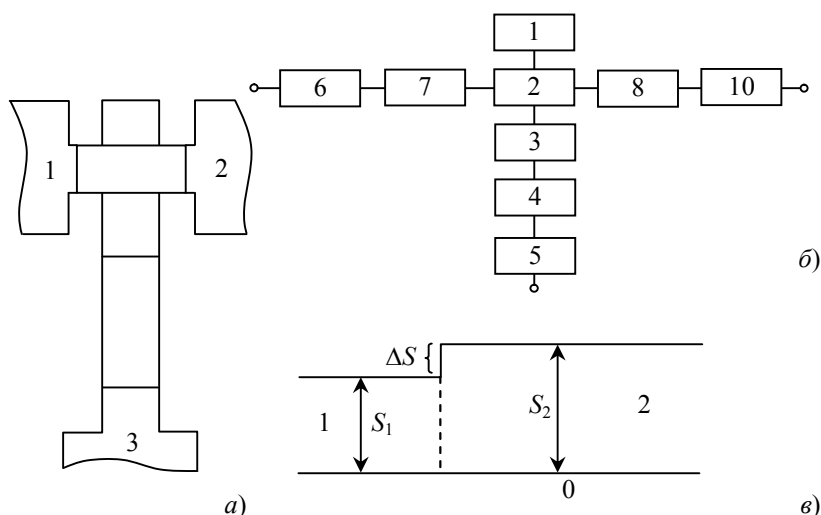


Рис. 2.1. Крестообразное соединение прямоугольных волноводов (*а*), его декомпозиционная схема (*б*) и элементарная расчетная ступенька (*в*)

Вначале определяются матрицы рассеяния для каждого АМБ, а для вычисления матрицы рассеяния  $S$  стыков волноводов используется проекционный метод Бубнова-Галеркина. Уравнения для определения элементов матрицы получаем из граничных условий на границе стыка двух волново-

дов: равенство нулю тангенциальной составляющей  $E_\tau$  на металлической части границы и непрерывность  $E_\tau, H_\tau$  на общей части границы. Рассматриваем для конкретности вариант  $S_1 > S_2$  (для  $S_1 < S_2$  алгоритм формируется аналогично). Используем также нормировку и выбор амплитуд:

$$E_{\tau_{-n}} = E_{\tau_n}; \quad H_{\tau_{-n}} = -H_{\tau_n}. \quad (2.1)$$

Эти уравнения сводятся к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) проецированием на собственные волны рассматриваемых волноводов. Для этого уравнения, описывающие матрицу рассеяния для стыка волноводов, умножаются векторно справа на  $H_n^{2*}$ ,  $n = \overline{1, N/2}$  и интегрируются по  $S_2$ . В результате получим СЛАУ вида  $A \cdot S = B$ , которая решается с использованием стандартной подпрограммы CGAUS.

Для определения матрицы рассеяния параллелепипеда необходимо построить многомодовую матрицу проводимости  $Y$ . Из последней, используя соотношение  $S = (I + Y)^{-1}(I - Y)$ , и получим искомую матрицу рассеяния ( $I$  — единичная матрица).

Элементы матрицы  $Y$  определяются как коэффициенты Фурье разложения магнитной составляющей поля  $H_\tau$  на каждом из входов АМБ по собственным волнам каждого из виртуальных волноводов, примыкающих к стенкам параллелепипеда:

$$H_{\tau(\alpha)} = \sum_n b_{n(\alpha)} h_{n(\alpha)}, \quad (2.2)$$

где  $\alpha$  — соответствующий вход;  $\alpha_{\max} = Y_{kn}^{\alpha\beta}$ . Как следует отсюда,  $b = Ya$ ;  $(a, b)$  — векторы коэффициентов,

$$E_{\tau(\alpha)} = \sum_n a_{n(\alpha)} I_{n(\alpha)}; \quad H_{\tau(\alpha)} = \sum_n b_{n(\alpha)} h_{n(\alpha)}. \quad (2.3)$$

Здесь используется нормировка:  $(I_{p(\alpha)}, I_{k(\alpha)}) = \delta_{pk}$ .

После того, как определены матрицы  $S$  каждого АМБ, находится объединенная матрица рассеяния модели с использованием алгоритма последовательного объединения двух элементов. При этом учитывается, что матрица рассеяния отрезка длиной  $l$  регулярного волновода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\Gamma l} \\ e^{-i\Gamma l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В программах при исследовании крестообразных соединений, построенных по данному алгоритму, использовался базис из 5 элементов:  $H_{10}, H_{11}, H_{12}, E_{11}, E_{12}$ .

Таким образом, используя соотношения (2.1)—(2.4) и метод декомпозиции, в принципе любую, сколь угодно сложную техническую электродинамическую систему можно свести к базовым элементарным структурам типа стыка волноводов, решения волнового уравнения для которых хорошо известны. Далее, объединяя эти решения согласно геометрии и топологии узла (см. рис. 2.1, *a*), выполняем его *рекомпозицию*, то есть получаем решение волнового уравнения для сколь угодно сложного по конфигурации узла и далее — системы.

Теперь обратимся к биосистемам, которые, начиная от клетки и далее, вплоть до автономных (в структуре биосферы) объектов, построены по единому принципу: источник → разветвление → схождение, далее этот процесс замыкается: схождение → источник.

С точки зрения системотехники, здесь аналогия с техническими системами передачи и обработки информации достаточно убедительная: в технических системах канал передачи замыкается через эфир на приемник, в биосистемах, в конечном итоге, такая замкнутость еще более выражена. Для примера рассмотрим сердечно-сосудистую систему (рис. 2.2, *a*) и растение (рис. 2.2, *b*). Поэтому анализ процессов распространения ЭМВ здесь также может быть основан на декомпозиции. Но, в отличие от технических систем, здесь постановка граничных задач невероятно сложна как для «АМБ» — участков сосуда, ствола или ветки дерева и т.п., — так и для целостной разветвляющейся-сходящейся системы. В работе<sup>134</sup> нами выдвинуто и аргументированно доказано — на примере сердечно-сосудистой системы — положение: разветвленно-сходящиеся биосистемы строятся по принципу геодезических линий, что обеспечивает минимизацию каналов передачи информации (через биологические жидкости, биохимические цепные реакции, ЭМП) при максимальном охвате объема ареала действенности системы.

Однако сложность граничных условий для структур биосистем при постановке электродинамических задач реально не позволяет использовать традиционный векторный анализ Максвелла. Естественным выходом из ситуации является использование аппарата дифференциальных форм (внешней алгебры); достаточно убедительно показано<sup>42, 269</sup>, что такой подход позволяет построить модели теоретического анализа для любых, сколь угодно сложных в части граничных условий систем.

Наконец, как нам представляется, даже при использовании аппарата дифференциальных форм, прямое решение электродинамических задач для биосистем (рис. 2.2) задача малореальная, в связи с чем и предложен обратный метод электрогидродинамической аналогии. Метод аналогий давно и плодотворно используются в электротехнике, электродинамике, радио-

физике<sup>184</sup> и основан на математической аналогии гидродинамических и электродинамических процессов, причем однозначно гидродинамические явления моделируются в терминах электродинамики<sup>184</sup>. Именно в силу исторической традиции мы называем этот метод *прямым*.

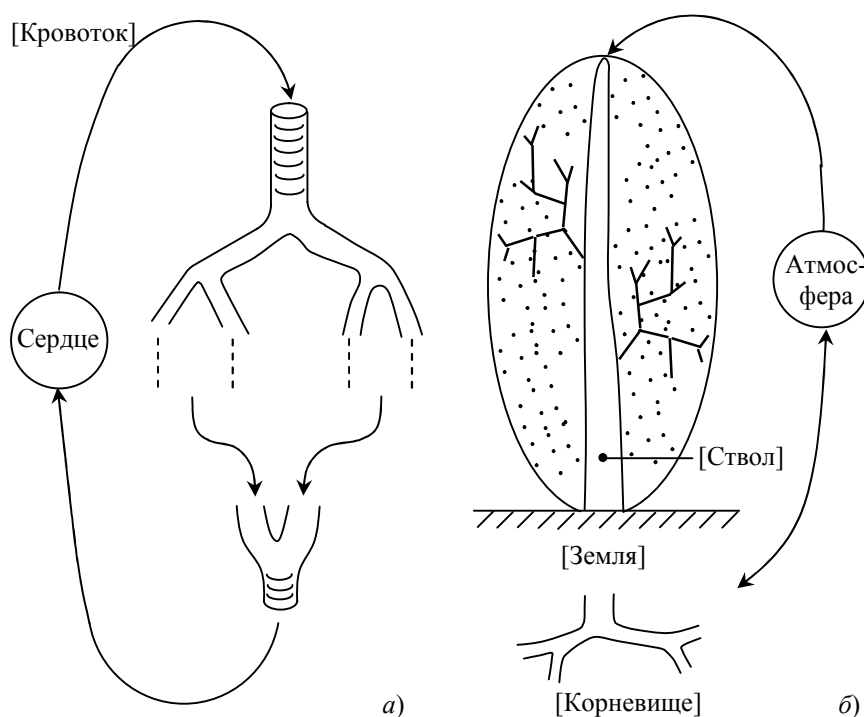


Рис. 2.2. Примеры разветвленных биосистем: сердечно-сосудистая система (а); растение (б)

Метод математической аналогии динамических процессов был интуитивно подготовлен Фарадеем и Томсоном (лордом Кельвиным). Однако именно Максвелл дал строгое научное обоснование метода под влиянием впечатления, полученного при чтении «*Experimental Researches*» («Экспериментальные исследования») Фарадея: «...будучи одаренным физическим воображением сродни воображению Фарадея, он получил очень сильное впечатление от теории силовых линий. В то же время он был силен в математике; и отличительная черта почти всех его исследований состояла в объединении способностей воображения с аналитическими способно-

стями для получения результатов, отражающих двойственную природу. Этот первый научный труд можно рассматривать как попытку связать идеи Фарадея с математическими аналогиями, созданными Томсоном»<sup>204</sup> (С. 290).

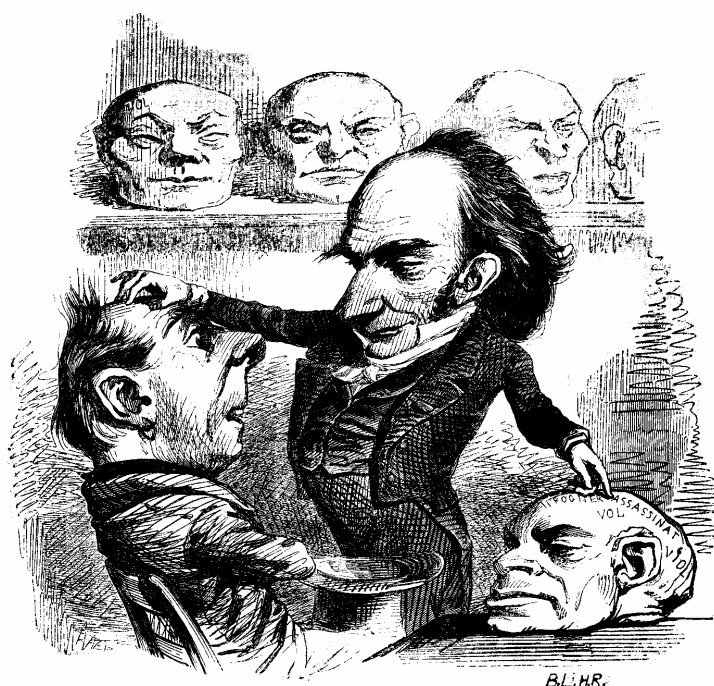
Максвелл за основу аналогии взял силовые линии Фарадея, представляющие линии течения жидкости, причем силовые линии суть направление вектора, величина которого обратно пропорциональна поперечному сечению образуемой линиями трубки. Отметим, что любой вихревой вектор обладает связью между величиной и направлением, в том числе вектор, представляющий скорость в любой области (точке) несжимаемой жидкости. То есть можно ассоциировать вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  со скоростью такой жидкости. (Здесь и далее теорию Максвелла в части аналогий излагаем по Э. Уиттекеру<sup>204</sup>.)

В то же время линии течения жидкости можно ассоциировать и с электрическими силовыми линиями, то есть когда скорости жидкости соответствуют (в свободном эфире) вектору  $\vec{E}$ . Однако, когда в поле присутствуют диэлектрики, электрическая сила  $\vec{E}$  не есть вихревой вектор; в этом случае уравнение  $\text{div } \vec{E} = 0$  заменяется уравнением  $\text{div}(\epsilon \vec{E}) = 0$ . Из последнего следует, что вектор  $\epsilon \vec{E}$  является вихревым, то есть вектор  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  и представляется электрическими силовыми линиями Фарадея, то есть по аналогии соответствует скорости несжимаемой жидкости.

При аналогии электрического поля и движения жидкости необходимо ввести источники и стоки, соответствующие электрическим зарядам, ибо вектор  $\vec{D}$  не является вихревым в том месте, где находится свободный заряд.

В развитие понятия электрогидродинамической аналогии большой вклад внес и Гельмгольц, пришедший к выводу (1858 г.), что «если магнитное поле, созданное электрическими токами, сравнить с потоком несжимаемой жидкости, так что скорость жидкости представляет магнитный вектор, то электрические токи соответствуют вихревым нитям в жидкости. Эта аналогия связывает многие теоремы гидродинамики и электричества; например, теорема о том, что вновь входящая вихревая нить эквивалентна равномерному распределению диполей по любой поверхности, которую она ограничивает, соответствует теореме Ампера об эквивалентности электрических токов и магнитных листов»<sup>204</sup>, (С. 293).

В 1861—62 гг. Максвелл создал полную механическую концепцию ЭМП, наиболее существенным моментом которой является утверждение о



*Если следовать учению Ломброзо о врожденной преступности, угадываемой по строению черепа, то страшно сейчас включать телевизор. Вообще говоря, животное тоже что-то знает, но только человек знает, что он знает (Джулиан Хаксли). А что касается промежуточного состояния, то здесь биология отдыхает... Даже булгаковский профессор Преображенский не мог объяснить творение рук своих. Может именно от таких преображенских природа и сохраняет тайну эволюционного скачка от предгоминидов к homo sapiens?*



вихревой природе магнетизма. За основу он взял идею Фарадея: силовые трубки стремятся сжиматься в продольном направлении и расширяться в поперечном; это обусловлено центробежной силой, приняв, что каждая силовая трубка содержит жидкость, вращающуюся вокруг оси этой трубки. Поэтому, по аналогии, Максвелл утверждал: в любом магнитном поле среда вращается вокруг магнитных силовых линий, а каждая единичная силовая трубка представляется на данный момент как изолированный вихрь. А Томсон еще раньше показал, что энергия любого магнитного поля (неважно, создано оно магнитом или электрическим током) равна<sup>204</sup>

$$E_{\mu} = \frac{1}{8\pi} \iiint \mu \overline{H}^2 dx dy dz, \quad (2.5)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из (2.5) следует: плотность среды в любой точке отождествляется с параметром  $\mu$ , а окружная скорость вихрей — с магнитной силой  $\overline{H}$ .

Возникающее здесь противоречие проиллюстрировано на рис. 2.3, *a*. Очевидно, что в модели Томсона (рис. 2.3, *a*) вихри на своей окружности движутся противоположно, что делает общее движение прерывистым. Максвелл же прибег к известному механическому устройству с колесом сателлитом (2.3, *b*); кстати, эта модель встречается уже у Бернулли (1736 г.). Это условие аналитически представляется как<sup>204</sup>

$$4\pi s = \text{rot} \overline{H}, \quad (2.6)$$

где вектор  $s$  обозначает поток частиц, так что проекция  $s_x$  суть число частиц, переданных за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению  $x$ .



Рис. 2.3. Модель вращающихся вихрей Томсона (*a*) и Максвелла (*b*)

Согласно теории Эрстеда, поток  $s$  движущихся частиц, помещенных между соседними вихрями, аналогичен электрическому току.

В современных моделях различают две формы электрогидродинамической аналогии<sup>184</sup>: математическим аналогом поля скорости в потоке идеальной жидкости может служить как стационарное электрическое поле в

обтекаемой током однородной проводящей среде (аналогия:  $v \Leftrightarrow E$ ), так и связанное с ним поле плотности тока, то есть аналогия:  $v \Leftrightarrow j$ . Причем последняя аналогия является наиболее полной.

В табл. 2.1 проведено соответствие электро- и гидродинамических параметров<sup>184</sup>.

На поверхности проводника с током касательная составляющая вектора  $\bar{E}$  является непрерывной; то есть здесь распределены только источники электрического поля, а на границе движущейся жидкости непрерывна нормальная составляющая скорости; здесь распределены вихри вектора. То есть (см. табл. 2.1 и<sup>184</sup>), реальным поверхностным вихрям вектора  $\bar{v}$  на границе потока соответствуют только фиктивные вихри вектора  $\bar{E}$  второго рода на поверхности обтекаемого током проводника. А вот поле плотности тока (это наиболее интересующий нас момент) *полностью* локализовано в объеме проводника, на поверхности которого существуют реальные вихри вектора  $\bar{j}$ , аналогичные вихрям вектора  $\bar{v}$ .

Для более адекватного понимания излагаемой в последующих разделах главы теории обратной электрогидродинамической аналогии читатель может получить пояснения из табл. 2.2 и 2.3<sup>184</sup>. Далее в качестве основного гидродинамического параметра используем скорость  $\bar{v}$ .

Таблица 2.1

Аналогия электро- и гидродинамических параметров (по Г. А. Рязанову<sup>184</sup>)

№ пп.	Поле скорости в идеальной жидкости	Поле плотности тока в однородной проводящей среде
1	Скорость течения жидкости $\bar{v}$	Плотность тока $j$ или линейная плотность тока $i$ : $j = \frac{1}{\rho} \bar{E}; \quad i = \frac{1}{R_s} \bar{E},$ где $\rho$ — удельное сопротивление среды; $R_s$ — удельное поверхностное сопротивление проводящего слоя (см. в [48])
2	Потенциал скорости $F$ течения жидкости	Потенциал вектора $j$ или потенциал вектора $i$ : $\varphi_j = \frac{1}{\rho} \varphi; \quad \varphi_i = \frac{1}{R_s} \varphi$
3	Соотношение между скоростью и ее потенциалом: $\bar{v} = -grad F$	Соотношение между плотностью тока и ее потенциалом: $\bar{j} = -grad \varphi_j; \quad \bar{i} = -grad \varphi_i$
4	$\Delta F = 0$	$\Delta \varphi_j = 0; \quad \Delta \varphi_i = 0$

Т а б л и ц а 2.2

Аналогия магнито- и гидродинамических параметров  
(по Г. А. Рязанову<sup>184</sup>)

№ пп.	Поле скорости в обратном потоке при поступательном движении тела в неподвижной жидкости или при обтекании неподвижного тела однородным потоком	Переменное магнитное поле при наличии проводящей модели тела и при условии, что внешнее магнитное поле однородно (приближение биосистемы)
1	Скорость течения жидкости $\bar{v}$	Индукция в соответствующей точке магнитного поля $\bar{B}$
2	Скорость набегающего потока $\bar{v}_0$	Индукция внешнего однородного магнитного поля $\bar{B}_0$
3	Потенциал скорости $F$ : $\Delta F = 0$	$B$ – потенциал в соответствующей точке магнитного поля, определенный относительно соответствующей нулевой точки $\varphi_B$ : $\Delta \varphi = 0$
4	Соотношение между скоростью и ее потенциалом: $\bar{v} = \text{grad}F$	Соотношение между величинами $B$ и $\varphi_B$ : $\bar{B} = -\text{grad}\varphi_B$
5	Безразмерная – относительная – скорость $v^0$ : $v^0 = \frac{v}{v_0}$	Безразмерный вектор $\bar{B}^0$ в соответствующей точке магнитного поля: $B^0 = \frac{B}{B_0}$
6	Безразмерный потенциал скорости: $F^0 = \frac{F}{v_0 L}$ , где $L$ — характерный линейный размер тела	Безразмерный $B$ -потенциал в соответствующей точке магнитного поля: $\varphi_B^0 = \frac{\varphi_B}{B_0 l}$ , где $l$ — соответствующий линейный размер модели тела

Т а б л и ц а 2.3

Аналогия электро- и гидродинамических параметров при вращательном движении (по Г. А. Рязанову<sup>184</sup>)

№ пп.	Поток, возникающий при вращательном движении тела в идеальной жидкости	Индукционное электрическое поле в круглом объеме, помещенном в однородное переменное магнитное поле
1	Скорость обратного движения жидкости $\bar{v}$	Напряженность индукционного электрического поля $\bar{E}$
2	Ротор вектора $\bar{v}$ : $\text{rot}\bar{v} = -2\bar{\omega}$ , где $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения тела	Ротор вектора $\bar{E}$ : $\text{rot}\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ , где $\bar{B}$ — индукция магнитного поля

Т а б л и ц а 2.3 (окончание)

3	Скорость набегающего потока: $v_0 = -[\bar{\omega} \cdot \bar{R}] = \frac{1}{2} [\text{rot} \bar{v} \bar{R}]$ , где $\bar{R}$ — расстояние данной точки потока от оси вращения тела	Напряженность вихревого электрического поля: $\bar{E}_e = \frac{1}{2} [\text{rot} \bar{E} \cdot \bar{r}]$ , где $\bar{r}$ — расстояние соответствующей точки проводящей среды от оси круглого объема
4	Скорость вызванного течения жидкости $\bar{v}'$ : $\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}'$	Напряженность поля наведенных квазистационарных зарядов $\bar{E}''$ : $\bar{E} = \bar{E}_e + \bar{E}''$
5	Граничное условие на поверхности тела в вызванном потоке, если ось вращения тела совпадает с осью z: $v'_n = -v_{0n} = [\bar{\omega} \cdot \bar{r}] \bar{n}$	Граничное условие на поверхности модели тела в наведенном потенциальном поле, если вектор $\partial \bar{B} / \partial t$ направлен по оси z: $\bar{E}''_n = -E_{en} + \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} r \cdot \cos(\bar{E}_e, \bar{n})$
6	Потенциал вызванного поля скорости $F'$	Потенциал наведенных квазистационарных зарядов $\Phi''$
7	Безразмерная скорость обращенного потока: $v^0 = \frac{v}{\omega L_0}$ , где $L_0$ — характерный линейный размер тела	Безразмерная напряженность индукционного электрического поля: $E^0 = \frac{2E}{ \text{rot} \bar{E}  l_0}$ , где $l_0$ — соответствующий характерный линейный размер на электрической модели
8	Безразмерный вызванный потенциал: $F'_\omega = \frac{F'}{\omega L_0^2}$	Безразмерный наведенный потенциал: $\Phi''^0 = \frac{z \Phi''}{ \text{rot} \bar{E}  l_0^2}$

## 2.2. Геометрическая теория стационарного движения жидкости в евклидовом пространстве

Как следует из предыдущего параграфа, объектом излагаемой ниже теории является гидродинамика (несжимаемой) жидкости в разветвленных биосистемах (см. рис. 2.2). Определив основные закономерности гидродинамики таких систем, что есть предмет этой главы книги, мы можем их перенести на электродинамику живых систем, используя формальные (см. табл. 2.1—2.3) соотношения.

Гидродинамическая аналогия характерна еще и тем, что дает полезную и наглядную геометрическую интерпретацию, хотя в значительной степени формализованную и абстрагированную. Так, в настоящей главе используются самые современные достижения дифференциальной геометрии, связанные как с задачами, касающимися вопросов дифференциальной геометрии дифференцируемых отображений между различными пространствами, так и с приложениями полученных результатов при описании геометрии движущейся жидкости, а именно для описания геометрии пространства, в котором происходит движение, а также геометрии линий тока векторного поля скорости в рассматриваемой точке системы и ее окрестности.

При таком подходе, когда рассматривается геометрия линий тока скорости, огромная роль принадлежит развитой теории дифференциальной геометрии, основанной на использовании аппарата внешних дифференциальных форм, а также геометрической интуиции, которая играет огромную роль не только в геометрических исследованиях, но и в исследованиях, связанных с применением геометрических теорий при изучении объектов как неживого, так и живого мира.

Рассмотрение геометрии линий тока вектора скорости представляет интерес не только с точки зрения геометрии, но и в исследованиях, которые проводятся по моделированию деятельности как всей биосистемы, так и ее отдельных частей. Описание движения частицы жидкости, а также описание траектории, по которой она движется, позволит оценить состояние как всей системы в целом, так и движение по отдельному сосуду. При этом можно, в некоторой степени, по изменению траектории движения, а также вида движения (турбулентное или ламинарное) рассматривать и состояние сосуда на наличие у него патологических изменений.

При описании геометрии линий тока скорости жидкости важное значение имеет вид пространства, которое соотносится с системой и в котором происходит описание. Здесь следует отметить, что реальная биосистема представляет собой определенное пространство, геометрия которого соотносится с геометрией пространства, которое будем называть пространственной моделью системы и геометрия которого рассматривается в качестве геометрии системы и в котором описывается геометрия линий тока скорости. Следует также отметить, что модельное пространство предлагается исследователем, опираясь на современные знания биосистемы и на знания геометрии данной системы, а также основывается на его владении определенным математическим аппаратом, который используется для решения поставленных задач.

Рассматривая небольшой участок сосуда, можно вести исследования в евклидовом пространстве, так как достаточно малый участок сосуда по сво-

им свойствам близок к данному пространству (нет кривизны и геодезические линии представляют собой прямые линии). Однако уже при рассмотрении довольно большого участка сосуда, а также всей биосистемы, уже не обойтись евклидовым пространством и надо использовать пространство, геометрия которого была бы близка к геометрии реальной системы.

В данной работе рассматривается геометрия системы, которая основывается на основополагающих положениях по геометрии потока идеальной несжимаемой жидкости с использованием аппарата дифференциальных форм (внешней алгебры). Аппарат внешних дифференциальных форм показал свою высокую эффективность в кристаллооптике, механике твердого тела, теории калибровочных полей в квантовой механике и, наконец, в электродинамике.

Моделирование работы биосистемы человека требует определенных аппроксимаций. Адекватность модели при ее использовании в теоретических или практических исследованиях влечет за собой систему допущений. Но последние не должны сводить на нет моделируемые отношения. Для этого существенные свойства и отношения выделяются и при моделировании того или иного процесса или системы должны быть учтены. Не последняя роль при изучении систем должна отводиться и их геометрическим характеристикам. Геометрия изучаемой системы позволит описать не только определенные связи между составляющими частями системы, но и отразить строение и принципы деятельности данной системы.

При моделировании биосистемы человека следует исходить из определенных физиологических предпосылок. Для этого представляем систему как анатомо-физиологическую подсистему организма, выполняющую в совокупности с другими системами следующие основные функции: перенос кислорода, питательных веществ, тепла, углекислого газа, гормонов, передачу колебательных движений и пр. Из существенных функций кровообращения выделяем следующие: транспортные, распределение крови и поддержания определенного уровня давления. В последнее время к транспортным функциям относят и передачу информации непосредственно частицами жидкости, крови, например. Поэтому, например, одной из посылок, которая подвела к исследованию геометрии кровеносной системы человека и отдельных сосудов, послужила важность при исследовании движения крови знание того пути, по которому движутся частицы, переносящие информацию, а также знание свойств того пространства, в котором происходит перенос информации, которая осуществляется кровеносной системой. Перенос информации в организме человека осуществляется тремя основными путями: электромагнитным, с помощью биохимических реакций и, наконец, самый надежный путь — непосредственно передача информации

при взаимодействии веществ. Роль каждого из этих трех путей важна по-своему, но наиболее надежный путь — это третий, когда происходит не только передача информации при взаимодействии веществ, но и подтверждение ранее полученной информации, осуществленной первыми двумя, более быстрыми, путями. Роль кровеносной системы в осуществлении передачи информации третьим путем, безусловно, одна из важнейших. Сущность такой передачи информации состоит в следующем. Частица крови, на какой-либо стадии своего движения, получает информацию, которая может носить самый различный характер. Продвигаясь по кровеносной системе, она взаимодействует с другими частицами, со стенками сосуда и им передает либо часть имеющейся у нее информации, либо может отдать всю информацию. Информация может переноситься частицей крови в виде вещества, энергии, типа движения самой частицы. При этом, различные частицы могут нести одну и ту же информацию, что позволяет ее дублировать и организм имеет возможность реагировать на нее также определенное время и в нужном направлении. Следует также отметить, что информация, передаваемая первыми двумя способами, как правило, подтверждается третьим способом.

В любой сложной биосистеме, имеющей сложно организованную внутреннюю структуру, возможно расщепление системы на две связанные друг с другом подсистемы. Одну из таких подсистем принято называть динамической или силовой, а вторую называют информационной или управляющей подсистемой. Под динамикой понимается обмен импульсом и энергией, а под информатикой подразумевается обмен символами между партнерами, участвующих в процессе информационного взаимодействия. При этом структурные элементы, которые довольно-таки малыми возмущениями (сигналами) значительно влияют на динамику системы, выделяются в структуру уравнениями. Тем самым сложные динамические системы самостоятельно могут выделять в себе две подсистемы. Описание каждой из подсистем будет более полным, если изучено пространство, в котором происходит взаимодействие между подсистемами, а также рассмотрена геометрия линий, по которым осуществляется это взаимодействие.

Таким образом, все вышесказанное говорит о том, что в биосистеме происходит не только внутренняя регуляция ее деятельности, но, в виду того, что эта система связана со всеми частями и системами организма происходит регуляция деятельности всего организма. При этом возникают вопросы, связанные с описанием геометрии тех линий, по которым происходит движение частиц жидкости, переносящих не только энергию и кислород, а также являющихся носителями информации в организме. Таким образом, встает задача о рассмотрении или моделировании геометрии

биосистемы человека. Следует также иметь в виду, что в зависимости от решаемой задачи, будем пользоваться либо евклидовым, либо одним из видов риманова пространства — субпроективным.

Деятельность биосистемы обуславливается деятельностью организма в целом, но в то же время она может быть представлена как независимая, функционально целостная подсистема. Будем также придерживаться следующих допущений: плотность жидкости постоянна ( $\rho = const$ ), что адекватно утверждению: жидкость несжимаема; вязкость ее линейно зависит от скорости, а толщина стенки сосуда мала по сравнению с его внутренним радиусом; стенка сосуда предполагается закрепленной в продольном направлении; толщина и радиус сосуда в нерастянutom состоянии постоянны по длине рассматриваемого участка. Там, где потребуются дополнительные требования или будет нужно более свободное рассмотрение (с меньшими требованиями) будет оговариваться особо (см. рис. 2.2).

Для дальнейших исследований рассмотрим ряд вспомогательных понятий, которые как-то будут характеризовать основные и позволят проследить некоторую аналогию с другими процессами.

Каждый сосуд системы содержит некоторый объем жидкости. Для удобства данный объем обозначим  $Q_i(t)$ , где индекс  $i$  указывает на то, что рассматривается  $i$ -ый участок сосуда. Тогда объем определяется  $(n-1)$ -им потоком из всех участков в выделенный  $i$ -ый ( $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $n$ ):

$$Q_i(t) = Q_i(0) + \int_0^t \sum_{j=1}^n q_{ji}(t) dt, j \neq i, \quad (2.7)$$

где  $Q_i(0)$  — начальный объем при  $t = 0$ . Поток  $q_{ji}$  имеет положительное направление, что формализовано в последовательности индексов: вначале  $j$ , а потом  $i$ .

Стационарное движение жидкости в  $i$ -ом участке сосуда можно описать посредством векторного поля  $\vec{v}(\vec{r})$ , где вектор  $\vec{r}$  имеет координаты  $(x, y, z)$  в выбранной прямоугольной системе координат. Векторное поле  $\vec{v}(\vec{r})$  в каждой точке сосуда определяет скорость частицы жидкости, проходящей через эту точку. Интегральной кривой векторного поля  $\vec{v}$  называется кривая:

$$l: R \rightarrow Q_i: t \rightarrow l(t), \quad (2.8)$$

для которой выполняется



$$\partial_t l(t) = \vec{v}(l(t)). \quad (2.9)$$

Пусть  $\vec{v}(\vec{r})$  имеет достаточную гладкость. Тогда в каждой точке  $\vec{r}$  участка сосуда, то есть при  $\vec{r} \in Q_i$ , можно найти интегральную кривую  $l(t, \vec{r})$ , причем такую, что

$$l(\cdot, \vec{r}) : I \rightarrow Q_i : t \rightarrow l(t, \vec{r}), \quad (2.10)$$

где  $I$  — отрезок из  $\mathbb{R}$ , который содержит точку  $t = 0$ .

Отображение

$$l(t, \cdot) : Q_i \rightarrow Q_i : \vec{r} \rightarrow l(t, \vec{r}) \quad (2.11)$$

определяет поток, связанный с векторным полем  $\vec{v}$ . Чтобы показать, что жидкость движется из  $j$ -го участка в  $i$ -ый, поток принято обозначать  $q_{ji}(t)$ .

Потоком в  $i$ -ом участке сосуда называется сумма всех потоков из  $j$ -ых участков, то есть

$$q_i = \sum_{j=1}^n q_{ji}(t), \quad j \neq i. \quad (2.12)$$

Дифференцируя выражение для  $Q_i$  из (2.7), получим уравнение для скорости изменения объема:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \sum_{j=1}^n q_{ji}(t), \quad j \neq i. \quad (2.13)$$

Из равенств (2.13) можно сделать вывод: скорость изменения объема в  $i$ -ом участке сосуда равна потоку в  $i$ -ом участке.

Пусть сосуд имеет форму цилиндра. Для описания медленного течения в таком сосуде гидродинамическое сопротивление —  $r_i$  ассоциируют с законом Пуазейля, связывающим величину гемодинамического сопротивления  $r_i$  сосуда длиной  $l_i$  и радиусом  $R_i$  с вязкостью  $\eta$  жидкости:

$$r_i = \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4}.$$

В сосуде с объемным расходом жидкости  $\frac{dQ_i}{dt}$  гидродинамическое сопротивление  $r_i$  рассеивает мощность:

$$W_i = \left(\frac{dQ_i}{dt}\right)^2 r_i = \left(\sum_{j=1}^n q_{ji}(t)\right)^2 \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} = q_i^2 \cdot \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4}. \quad (2.14)$$

Гидродинамическое сопротивление характеризует способность участка рассеивать энергию потока, причем тем больше, чем больше поток в участке и чем больше длина участка.

Рассмотрим также понятие индуктивности, которая характеризует кинетическую энергию жидкости в  $i$ -ом сосуде, а последняя, в свою очередь, выражается через линейную скорость перемещения жидкости. Пусть по  $i$ -ому участку сосуда радиуса  $R_i$  и длины  $l_i$  течет жидкость плотности  $\rho$ . Считая ее невязкой, а также при наличии в сосуде потока с объемным расходом  $\frac{dQ_i}{dt}$ , столбик жидкости объемом  $Q_i = \pi R_i^2 l_i$  имеет линейную скорость перемещения:

$$v_i = \frac{\frac{dQ_i}{dt}}{\pi R_i^2} = \frac{q_i}{\pi R_i^2}.$$

Поскольку жидкость имеет плотность  $\rho$ , то в сосуде радиуса  $R_i$  и длины  $l_i$  движется масса  $m_i = \rho Q_i$  со скоростью  $v_i$ . Тогда кинетическая энергия в  $i$ -ом участке сосуда будет равна

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{\rho l_i q_i^2}{2 S_i}. \quad (2.15)$$

Введем обозначение:

$$L_i = \frac{\rho l_i}{S_i}, \quad (2.16)$$

которое будем называть индуктивностью.

Окончательно выражение (2.15), с учетом (2.16), примет вид:

$$W_{ki} = \frac{L_i q_i^2}{2}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) выразим  $q_i$ :

$$q_i^2 = \frac{2W_{ki}}{L_i}.$$

После подстановки последнего равенства в (2.14) получим:

$$W_i' = \frac{2W_{ki}}{L_i} \cdot \frac{8\eta l_i}{\pi R_i^4} = \frac{16\eta l_i}{L_i \pi R_i^4} \cdot W_{ki}. \quad (2.18)$$

Из выражения (2.18) можно заключить, что мощность, рассеиваемая гидродинамическим сопротивлением  $r_i$ , прямо пропорциональна кинетической энергии жидкости в  $i$ -ом участке сосуда.

Введенные понятия определенным образом будут задействованы при рассмотрении геометрических свойств биосистемы, а также при исследовании геометрии участка сосуда.

**Основные понятия и уравнения геометрии биосистемы в трехмерном евклидовом пространстве.** Для рассмотрения геометрии биосистемы будем пользоваться нетрадиционными для биологии и электродинамики математическим аппаратом, основанном на методе подвижного репера и внешних дифференциальных форм. Продуктивность данного математического аппарата в других областях естествознания не раз подтверждалось и с большим успехом используется.

Начнем с рассмотрения геометрии отдельного участка некоторого сосуда, основываясь на использовании геометрии трехмерного евклидова пространства с привлечением аппарата внешних дифференциальных форм. По определению дифференциальные формы есть выражения, к которым применяется операция интегрирования. Однако они сравнительно поздно стали использоваться в физических исследованиях (после работ Э. Картана в начале XX века), до этого оставаясь лишь аппаратом дифференциальной геометрии. В самое последнее время этот аппарат привлекает все чаще внимание радиофизиков. Здесь является существенным то, что дифференциальные формы обладают естественной алгебраической структурой в рамках исчисления «расширений», которое более известно как внешняя алгебра.

Существует оператор  $D$  — внешняя производная (внешний дифференциал), результатом действия которого на дифференциальные формы являются формы, имеющие порядок на единицу больший. Другое их название — формы Пфаффа. Оператор  $D$  заменяет и, в некотором смысле, обобщает известные операторы: ротор, градиент и дивергенцию векторного анализа. В данном случае иллюстрируется возможность применения аппарата дифференциальных форм в гидродинамике, основываясь на подходе С. С. Бюшгенса (см.<sup>37, 134</sup>).

Рассмотрим аппарат исчисления дифференциальных форм в трехмерном евклидовом пространстве и выведем основные соотношения для гидродинамики. С каждой точкой рассматриваемого пространства свяжем репер и определим его относительно выбранного начала вектором  $\vec{x}$  и тремя единичными векторами  $\vec{e}_i$ . Заглавные латинские буквы будут принимать

значения от 1 до 3. Инфинитезимальные перемещения репера запишем в виде:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A; \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B. \quad (2.19)$$

Формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A; \quad D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A. \quad (2.20)$$

При условии ортогональности рассматриваемого репера ( $\omega_A^A = 0$ ,  $\omega_B^A + \omega_A^B = 0$ ) введем следующие обозначения:

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p_A \omega^A = p, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q_A \omega^A = q, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r_A \omega^A = r$$

Вектор  $\vec{\Omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$  является вектором мгновенного вращения репера для выбранного перемещения  $d\vec{x}$  его вершины. Для ортонормированного репера, с учетом введенных обозначений, уравнения (2.19) и (2.20) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3; \quad d\vec{e}_2 = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1; \quad d\vec{e}_3 = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2; \\ D\omega^1 &= r \wedge \omega^2 - q \wedge \omega^3; \quad D\omega^2 = p \wedge \omega^3 - r \wedge \omega^1; \quad D\omega^3 = q \wedge \omega^1 - p \wedge \omega^2; \\ Dp &= r \wedge q; \quad Dq = p \wedge r; \quad Dr = q \wedge p. \end{aligned}$$

Если градиент функции  $\varphi$  представить по взаимным векторам  $\vec{e}^{-A}$  выбранной основной тройки в виде:

$$\text{grad}\varphi = A_A \vec{e}^{-A},$$

тогда будут верны следующие равенства:

$$A_A \vec{e}^{-A} d\vec{x} \equiv d\varphi; \quad A_A \omega^A \equiv d\varphi. \quad (2.21)$$

Умножая соотношение (2.21) внешним образом поочередно на  $\omega^2 \wedge \omega^3$ ,  $\omega^3 \wedge \omega^1$ ,  $\omega^1 \wedge \omega^2$ , определим коэффициенты  $A_A$ :

$$A_1 = \frac{d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}; \quad A_2 = \frac{d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}; \quad A_3 = \frac{d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}.$$

С учетом последних равенств, выражение для градиента функции через  $d\varphi$  и базисные формы Пфаффа:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\vec{e}^{-1} d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \vec{e}^{-2} d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \vec{e}^{-3} d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}. \quad (2.22)$$

Обозначим через  $d\tau$  элемент объема, а через  $d\vec{\sigma}$  — вектор элемента поверхности. Дивергенцию некоторого вектора  $\vec{v}$  определим по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iiint \operatorname{div} \vec{v} d\tau = \iint \vec{v} d\vec{\sigma}, \quad (2.23)$$

применив ее к объему параллелепипеда, образованного в некоторой точке пространства векторами трех произвольных перемещений  $d_1\vec{x}$ ,  $d_2\vec{x}$ ,  $d_3\vec{x}$ . В этом случае элемент объема можно записать в виде:

$$d\tau = d_1\vec{x} \wedge d_2\vec{x} \wedge d_3\vec{x} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3, \quad (2.24)$$

а элемент поверхности в точке  $x$ , образованный векторами  $d_2\vec{x}$  и  $d_3\vec{x}$ , будет равен:

$$d\vec{\sigma}_{23} = [d_2\vec{x}, d_3\vec{x}],$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Тогда элемент поверхности в точке  $\vec{x} + d_1\vec{x}$  будет равен

$$d\vec{\sigma}_{23} + d_1(d\vec{\sigma}_{23}).$$

Для замкнутой поверхности, ограничивающей элемент объема, имеем:

$$d\vec{\sigma}_{23} + d_1(d\vec{\sigma}_{23}) + d\vec{\sigma}_{32} + d\vec{\sigma}_{31} + d_2(d\vec{\sigma}_{31}) + d\vec{\sigma}_{13} + d\vec{\sigma}_{12} + d_3(d\vec{\sigma}_{12}) + d\vec{\sigma}_{21} = \vec{0},$$

откуда следует, что

$$d_1(d\vec{\sigma}_{23}) + d_2(d\vec{\sigma}_{31}) + d_3(d\vec{\sigma}_{12}) = \vec{0}. \quad (2.25)$$

Развертывая соотношение (6.23) для объема  $d\tau$ , после упрощения получим:

$$\operatorname{div} \vec{v} d\tau = d_1\vec{v} \wedge d_2\vec{x} \wedge d_3\vec{x} + d_2\vec{v} \wedge d_3\vec{x} \wedge d_1\vec{x} + d_3\vec{v} \wedge d_1\vec{x} \wedge d_2\vec{x}. \quad (2.26)$$

Раскладывая вектор  $\vec{v}$  по векторам базиса, получим:

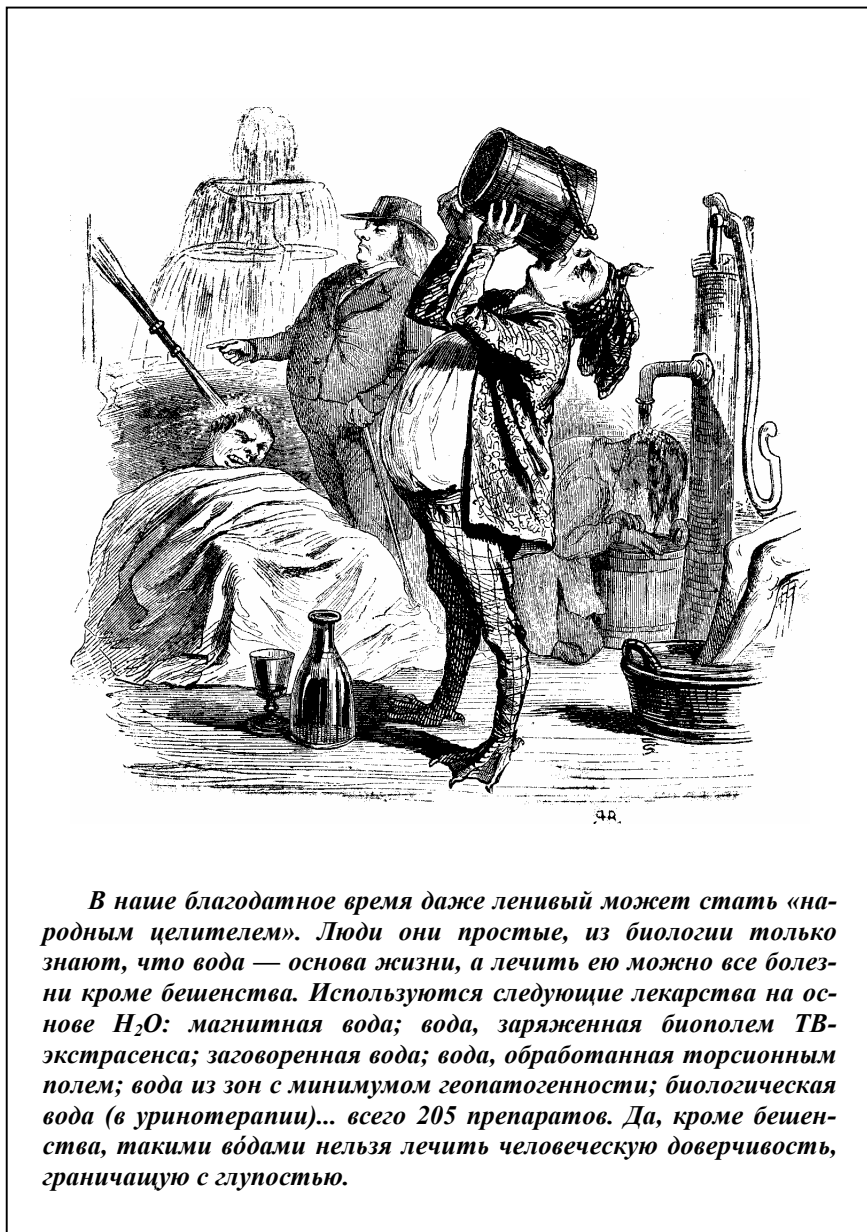
$$\vec{v} = v^A \vec{e}_A, \quad (2.27)$$

а также дифференцируя (2.27) и используя второе уравнение (2.19), будем иметь:

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A,$$

с учетом этого формула (2.26) примет вид матричного уравнения. Сделав в нем перегруппировку членов, получим соотношение:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \operatorname{div} \vec{v} = (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2. \quad (2.28)$$



*В наше благодатное время даже ленивый может стать «народным целителем». Люди они простые, из биологии только знают, что вода — основа жизни, а лечить ею можно все болезни кроме бешенства. Используются следующие лекарства на основе  $H_2O$ : магнитная вода; вода, заряженная биополем ТВ-экстрасенса; заговоренная вода; вода, обработанная торсионным полем; вода из зон с минимумом геопатогенности; биологическая вода (в уринотерапии)... всего 205 препаратов. Да, кроме бешенства, такими водами нельзя лечить человеческую доверчивость, граничащую с глупостью.*

Для ортогонального репера формула (2.28) примет вид:

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \operatorname{div} \bar{v} &= (dv^1 - v^2 r + v^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 - v^3 p + v^1 r) \wedge \\ &\wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (dv^3 - v^1 q + v^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Рассуждая по аналогии, можно найти выражение для ротора некоторого вектора  $\bar{v}$ , исходя из соотношения:

$$\iiint \operatorname{rot} \bar{v} d\tau = -\oint \bar{v} \cdot d\bar{\sigma}. \quad (2.29)$$

Применяя формулу (2.29) к объему из соотношения (2.24), учитывая равенство (2.25), а также произведя понятные преобразования, получим выражение для ротора:

$$\operatorname{rot} \bar{v} d\tau = -\bar{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge (dv^C + v^L \omega_L^C) (\bar{e}_B \bar{e}_C). \quad (2.30)$$

Из равенства (2.30) получим соотношение для ортогонального репера:

$$\begin{aligned} -\operatorname{rot} \bar{v} d\tau &= \bar{e}_1 (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p)) + \\ &+ \bar{e}_2 (\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q)) + \bar{e}_3 (\omega^3 \wedge \\ &\wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r)) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Таким образом, показано существование тесной связи внешних дифференциалов с операторами векторного анализа: градиентом, дивергенцией и ротором.

Более формально приведенные выше рассуждения можно провести следующим образом. Рассмотрим скалярную функцию  $f$  такую, что

$$f: R^3 \rightarrow R: x = (x^1, x^2, x^3) \rightarrow f(x).$$

В этом случае дифференциал функции  $f$  представляет собой 1-форму, которая будет иметь следующий вид:

$$df = f_A dx^A, \quad (2.32)$$

где  $f_A$  — частная производная от  $f$  по координате  $x^A$ . Дифференциал  $p$ -формы  $\alpha = \sum a_j(x) dx^j$ ,  $j \in J_p$  по определению представляет собой  $(p+1)$ -форму:

$$d\alpha = \sum da_j(x) \wedge dx^j, \quad (2.33)$$

где  $da_j(x)$  следует вычислять согласно (2.32), а затем упростить по типу соотношения (2.33), применяя правила внешней алгебры.

Рассмотрим применение операции внешнего дифференцирования к функциям и дифференциальным формам в пространстве  $E^3$ , используя систему координат  $(x, y, z)$ . Для функции  $f(x, y, z)$  уравнение (2.32) принимает вид:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz.$$

Ассоциированным с  $df$  вектором является

$$\bar{odf} = \bar{df} = f_x \bar{\partial}_x + f_y \bar{\partial}_y + f_z \bar{\partial}_z, \quad (2.34)$$

где  $\bar{o}$  — инволютивный оператор надчеркивания.

В ассоциированном векторе (2.34) распознается градиент функции  $f$ . Дифференциал 1-формы  $\alpha = xdx + ydy + zdz$  представляет собой 2-форму:

$$d\alpha = (z_y - y_z)dy \wedge dz + (x_z - z_x)dz \wedge dx + (y_x - x_y)dx \wedge dy,$$

коэффициенты которой совпадают с компонентами ротора вектора  $\bar{\alpha} = \bar{o}\alpha$ , ассоциированного с 1-формой  $\alpha$ .

Пусть  $*$  — оператор, определяемый для вектора  $\bar{e}_j$ , где  $j \in J = \{1, 2\}$ , а  $K = \dim E^3 - J$  следующим образом:

$$*\bar{e}_j = (-1)^{s(K)} (-1)^\sigma \bar{e}_K,$$

где  $K$  — дополнение к  $J$ , а  $(-1)^\sigma = 1$  для четной перестановки и  $(-1)^\sigma = -1$  для нечетной.

Используя оператор  $*$ , переведем  $d\alpha$  в 1-форму вида  $*d\alpha = (z_y - y_z)dx + (x_z - z_x)dy + (y_x - x_y)dz$ , а затем преобразуя ее в вектор  $*d\alpha$ , получим соотношение:  $rot \bar{\alpha} = *\bar{d}\alpha$ . Дифференциал 2-формы  $\beta = Udy \wedge dz + Vdz \wedge dx + Wdx \wedge dy$  после упрощения представляет собой 3-форму:

$$d\beta = (U_x + V_y + W_z)dx \wedge dy \wedge dz,$$

коэффициент которой является дивергенцией вектора  $*\bar{\beta} = U\bar{\partial}_x + V\bar{\partial}_y + W\bar{\partial}_z$ , ассоциированного с формой  $*d\beta = div *\bar{\beta}$ .

Определив связь дифференциальных форм с операторами векторного анализа, перейдем к построению уравнений гидродинамики. Соотношения (2.22), (2.26) и (2.30) позволяют преобразовывать основные уравнения гидродинамики, относя стационарный поток, представляемый в качестве несжимаемой жидкости, к произвольно выбранному реперу.

Уравнение неразрывности потока жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} (dv^1 - v^2 r + v^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 - v^3 p + v^1 r) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ + (dv^3 - v^1 q + v^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Если вектор  $\bar{e}_3$  будет касательным к линии тока, то

$$\bar{v} = v\bar{e}_3. \quad (2.36)$$



В этом случае из (2.35) получаем эквивалентные соотношения:

$$\frac{dv}{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3,$$

$$\text{или} \quad \left( \frac{d \ln v}{ds} \right)_{\substack{\omega^1=0 \\ \omega^2=0}} = p_2 - q_1, \quad (2.37)$$

где  $\omega^3 = ds$ . Величина  $p_2 - q_1$  есть средняя кривизна линий тока. Таким образом, из уравнения (2.37) следует, что в каждой точке потока логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруэнции линий тока. Конгруэнцию линий, для которой  $p_2 - q_1 = 0$ , назовем минимальной конгруэнцией.

Из уравнения (2.37) получим, что если величина скорости потока постоянна вдоль каждой линии тока, то конгруэнция линий тока есть минимальная конгруэнция.

Вектор  $\vec{v}$  есть вихревой вектор, для которого справедливо соотношение:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} v^A \vec{e}_A, \quad (2.38)$$

тогда из формулы (2.31) будут определяться компоненты вихря:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \\ &\wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \\ &\wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Пусть имеет место представление вектора скорости в виде (2.36). В этом случае соотношения (2.39) примут вид:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^1 &= -v p_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge dv; \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge dv + v q_3 \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3; \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 v^3 &= v q_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - v p_1 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1. \end{aligned}$$

Представляя дифференциал от скорости в виде  $dv = v_A \omega^A$ , получим:

$$\begin{aligned} v^1 &= v p_3 - v_3 \\ v^2 &= v q_3 - v_1 \\ v^3 &= -v(p_1 + q_2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из первых двух равенств (2.40) видно, что сумма производных от величины скорости по направлению линии тока и направлению, определяемую формой  $\omega^1$ , равна сумме первой и второй компонентам вихревого вектора, взятых с противоположным знаком, а также произведению величины скорости на сумму  $p_3 + q_3$ , то есть

$$v_1 + v_3 = -(v^1 + v^2) + v(p_3 + q_3).$$

Из последнего соотношения (2.40) получим равенство:

$$\frac{v^3}{v} = -(p_1 + q_2).$$

Полная кривизна  $K$  и гауссова кривизна  $K_g$  конгруэнций линий, касательными к которым является вектор  $\vec{e}_3$ , задаются соотношениями:

$$K = p_1q_2 - p_2q_1; K_g = p_1q_2 - p_2q_1 - \frac{1}{4}(p_1 + q_2)^2.$$

Из последних равенств получаем:  $\sqrt{K - K_g} = \frac{1}{2}|p_1 + q_2|$ . Таким образом, отношение проекции вихря на касательную линии тока к величине скорости есть некоторый инвариант, определенным образом связанный с полной и гауссовой кривизной конгруэнции линий тока.

Так как движение жидкости происходит при действии силы тяжести, то можно принять, что внешние силы  $\vec{F}$ , действующие на частицы жидкости, консервативны, то есть имеют потенциал  $U$  такой, что  $\vec{F}d\vec{x} = -dU$ .

Величину  $H = \frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho}$ , по аналогии, назовем полной энергией частицы жидкости. Тогда имеем:

$$\text{grad } H = 2[\vec{v}, \vec{v}], \quad (2.41)$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов скорости жидкости и вихревого вектора.

После умножения обеих частей равенства (2.41) скалярно на  $d\vec{x}$ , получим:

$$dH = 2\vec{v}d\vec{x} \quad (2.42)$$

или

$$dH = \begin{vmatrix} v^1 & v^1 & \omega^1 \\ v^2 & v^2 & \omega^2 \\ v^3 & v^3 & \omega^3 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Правая часть равенства (2.42) обращается в нуль для перемещений, направления которых совпадают либо с направлением скорости, либо с направлением вихря, либо же с любым направлением, компланарным первым двум. Все эти перемещения лежат на поверхностях семейства так называемой «постоянной энергии» ( $H = const$ ). На этих поверхностях располагаются все линии тока и все вихревые линии, если последние существуют. Здесь следует иметь в виду, что, в основном, жидкость в биосистемах движется ламинарно, то есть с отсутствием элементов завихрений, что приводит к отсутствию вихревых линий. Но в определенных участках турбулентное движение присутствует и это приводит к более богатой геометрической картине. Поэтому с точки зрения геометрии более интересным является случай турбулентного движения.

На поверхностях «постоянной энергии» располагаются все линии тока и все вихревые линии. В случае безвихревого потока, как видно из (2.41), функция  $H$  также будет постоянна. Геометрия семейства поверхностей постоянной полной энергии для трехмерного евклидова пространства рассматривалась в работе С. С. Бюшгенса (см.<sup>37</sup>), где рассмотрены необходимые и достаточные условия постоянства величины скорости потока на каждой поверхности полной энергии. А также в предположении постоянства скорости на каждой поверхности полной энергии определяется семейство последних таким образом, чтобы можно было построить на ней бесконечное множество конгруэнций линий тока. Рассматривается также случай, когда определяется поток, для которого семейство поверхностей полной энергии, некоторое семейство поверхностей токов, а также семейство вихревых поверхностей образуют тройно-ортогональную систему.

В данном случае гидродинамические уравнения Гельмгольца можно записать одним векторным соотношением:

$$(\vec{v} \text{ grad})\vec{v} = (\vec{v} \text{ grad})\vec{v},$$

где скобками обозначено скалярное произведение вектора на оператор «набла».

Развертывая эти скалярные произведения по формулам (2.22), получим:

$$2\Theta_{\vec{v}}d\vec{v} = \Theta_{\vec{v}}d\vec{v}, \quad (2.44)$$

где через  $\Theta_{\vec{v}}$  и  $\Theta_{\vec{v}}$  обозначены билинейные внешние формы:

$$\Theta_{\vec{v}} = v^1\omega^2 \wedge \omega^3 + v^2\omega^3 \wedge \omega^1 + v^3\omega^1 \wedge \omega^2;$$

$$\Theta_{\vec{v}} = v^1\omega^2 \wedge \omega^3 + v^2\omega^3 \wedge \omega^1 + v^3\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Дифференцируя равенства (2.38), получим:

$$2d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A,$$

то есть уравнение (2.44) распадается на три обобщенных уравнения Гельмгольца:

$$\Theta_{\vec{v}}(dv^C + v^B \omega_B^C) = \Theta_{\vec{v}}(dv^C + v^B \omega_B^C).$$

Для ортогонального репера получим три соответствующих уравнения:

$$\Theta_{\vec{v}}(dv^1 - v^2 r + v^3 q) = \Theta_{\vec{v}}(dv^1 - v^2 r + v^3 q);$$

$$\Theta_{\vec{v}}(dv^2 - v^3 p + v^1 r) = \Theta_{\vec{v}}(dv^2 - v^3 p + v^1 r);$$

$$\Theta_{\vec{v}}(dv^3 - v^1 q + v^2 p) = \Theta_{\vec{v}}(dv^3 - v^1 q + v^2 p).$$

При исследовании стационарного потока жидкости можно освободиться от динамических элементов, сохраняя только кинематические и геометрические элементы. На этом пути возможны два способа: а) в рассмотрение вводится семейство поверхностей, на которых располагаются линии тока и вихревые линии; б) используются уравнения Гельмгольца как условия интегрируемости уравнения (2.43).

Приведенные рассуждения также можно изложить более формализовано, а именно.

Стационарное движение жидкости в пространстве  $E^3$  можно описать с помощью векторного поля  $\vec{v}(\vec{r})$ , которое в каждой точке  $\vec{r} \in E^3$  задает скорость частицы жидкости, проходящей через эту точку. Интегральной кривой или линией тока поля  $\vec{v}$  будет кривая

$$\gamma: R \rightarrow E: t \mapsto \gamma(t),$$

для которой  $\partial_t \gamma(t) = \vec{v}(\gamma(t))$ . Если  $\vec{v}(\vec{r})$  имеет достаточную гладкость, то в каждой точке  $\vec{r}$  можно найти интегральную кривую  $\gamma(t, \vec{r})$  такую, что

$$\gamma(\cdot, \vec{r}): I \rightarrow E^3: t \mapsto \gamma(t, \vec{r}): O \mapsto \vec{r},$$

где  $I$  — отрезок в пространстве.

Отображение  $\gamma(t, \cdot): E^3 \rightarrow E^3: \vec{r} \mapsto \gamma(t, \vec{r})$  определяет поток, связанный с векторным полем  $\vec{v}$ , который можно обозначить как  $v^t$ . Исходя из задания в  $E^3$  потока  $v^t$  и скалярной функции

$$f: E^3 \rightarrow R: \vec{r} \mapsto f(\vec{r}),$$

целесообразно рассмотреть функцию

$$(v^t)^* f: R \rightarrow R: t \mapsto f(v^t(\vec{r})),$$

где правая часть представляет собой значение функции  $f$ , наблюдаемое в переносимой точке  $\vec{r}_t = v^t(\vec{r})$ . Производная этой функции при  $t=0$  называется производной Ли  $L_v f$  функции  $f$ . Можно провести дальнейшее обобщение и определить производную вдоль потока для функций, не являющихся скалярными, например, для тензоров любого типа. Предел при  $t \rightarrow 0$  для отношения разности значений рассматриваемой величины в момент времени  $t$  и  $t=0$  к величине временного промежутка  $t$  есть производная Ли от тензора.

В точке  $\vec{r}$  пространства  $E^3$  производная Ли от формы  $\alpha$  есть дифференциальная форма:

$$(L_v \alpha)_r = \partial_{t/0} (v^t)^* \alpha. \quad (2.45)$$

Если  $\alpha$  является  $p$ -формой, то уравнение (2.45) можно проинтегрировать по  $p$ -мерной области  $D$ , которая переносится потоком и описывается соотношением  $D_t = v^t D$ . В итоге получим соотношение

$$\partial_{t/0} (\alpha | D_t) = (L_v \alpha) | D, \quad (2.46)$$

выражающее скорость изменения в момент времени  $t=0$  интеграла от  $\alpha$  по перемещающейся области  $D$ . Имеет место соотношение

$$L_v \alpha = d(\alpha | v) + (d\alpha) | v. \quad (2.47)$$

С помощью теоремы Стокса уравнения (2.46), (2.47) преобразуются к виду:

$$\partial_{t/0} (\alpha | D_t) = ((d\alpha) | v) | D + (\alpha | v) | \partial D. \quad (2.48)$$

Последняя формула содержит и обобщает основные формулы векторного анализа, относящиеся к интегрированию по областям размерности от 1 до 3. В двумерном случае (2.48) соответствует теореме Гельмгольца для векторного потока.

Выше приведены рассуждения, причем их последняя часть, приведены в качестве пути, с помощью которого можно исследовать поток жидкости. Данный подход в этом исследовании не используется, а приводится в качестве примера пути, которым могут проводиться исследования.

**Поверхности полной энергии в гидродинамике.** В данном разделе, как и в предыдущем, предполагается, что жидкость движется в части сосуда, а это позволяет вести исследования в трехмерном евклидовом пространстве. Исследования, как и прежде, ведутся с использованием аппарата внешних дифференциальных форм. Причем, считается, что поток является вихревым. То есть движение жидкости носит турбулентный характер. Вводится функция  $H$ , которая рассматривалась также в предыдущем разделе и ко-

торая аналогична функции Бернулли. То семейство поверхностей, на каждой из которых располагается одно семейство линий тока и одно семейство вихревых линий, а также функция  $H$  принимает постоянное значение, будем называть поверхностями постоянной полной энергии. Рассматриваются такие поверхности и их свойства, которые используются для описания геометрии движения жидкости в трехмерном евклидовом пространстве, а отсюда и движение жидкости по участку биосистемы.

Для рассмотрения геометрии движущейся жидкости по части сосуда привлекается аппарат векторных полей, то есть теория векторных полей находит свое приложение в геометрии движущейся жидкости. Рассматриваем также геометрические свойства поля скоростей частиц движущейся жидкости; как следует из метода Эйлера, движение описывается заданием скоростей  $\vec{v}$  частиц как функции времени  $t$  и координат  $x, y, z$  точек пространства, где находятся эти частицы. Зададим поле скоростей следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t). \quad (2.49)$$

Репер выбираем таким образом, что вектор  $\vec{e}_3$  направлен по касательной линии тока или интегральной линии вектора скорости жидкости, то есть

$$\vec{v} = v\vec{e}_3, \quad (2.50)$$

где  $v$  — величина скорости.

Величины  $x, y, z, t$  называют переменными Эйлера. Поле скоростей называется стационарным, если оно не зависит от времени  $t$ . В противном случае векторное поле называется нестационарным.

Рассматривая движение жидкости в биосистеме, мы, в основном, рассматриваем уже установившееся движение, которое в части сосуда происходит по одним и тем же траекториям. То есть подходить к изучению движения жидкости можно как к установившемуся стационарному потоку. Исключение может составлять только то место сосуда, в котором произошло патологическое изменение, которое способствуют не только местному развитию турбулентности сразу же за пределами того участка, где диаметр сосуда уменьшен, но дальнейшее уменьшение диаметра приводит к изменению потока и к изменению турбулентного движения. В этом случае происходит нарушение стационарности движения жидкости. Здесь, конечно, не затрагиваются внешние воздействия или внешние вмешательства, которые приводят к нарушению герметичности стенок сосудов, а это также приводит к нарушению стационарности потока жидкости в биосистеме.

В качестве векторного поля, исходя из формулы (2.50), будем рассматривать поле вектора  $\vec{e}_3$ , который является базисным вектором репера  $R_x = \{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , связанного с каждой точкой  $x$  рассматриваемой области евклидова пространства  $E^3$ , через которую проходит поток и которая находится внутри рассматриваемого участка сосуда. Причем модуль вектора  $\vec{e}_3$  равен 1 и этот вектор ортогонален двум оставшимся базисным векторам  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ .

По принятой уже терминологии линии при заданном времени  $t$ , касающиеся в каждой точке  $(x, y, z)$  вектора скорости  $\vec{v}(x, y, z, t)$ , называются линиями тока. Выбранная частица при движении описывает траекторию, которая в каждый момент времени  $t$  в любой точке пространства  $E^3 - (x, y, z)$ , находящейся внутри рассматриваемого участка сосуда, касается вектора скорости  $\vec{v}(x, y, z, t)$ . Так как рассматривается стационарный поток, то переменную  $t$  можно не учитывать. Также для стационарного поля скоростей жидкости линии тока совпадают с траекториями движения частиц, чего нельзя утверждать для нестационарного поля, так как линии тока для него определяются для каждого конкретного момента времени. Поскольку жидкость представляется идеальной несжимаемой, то поле скоростей  $\vec{v}$  удовлетворяет системе уравнений, установленной Эйлером для жидкости:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \quad \text{— уравнение несжимаемости;} \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla_{\vec{v}} \vec{v} &= F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad \text{— уравнение в напряжениях (уравнение Эйлера),} \end{aligned} \quad (2.51)$$

где приняты следующие обозначения:  $\nabla_{\vec{v}}$  — производная вдоль вектора  $\vec{v}$ ;  $F$  — плотность объемных сил;  $\rho$  — плотность жидкости. Параметр  $p$ , который является функцией координат и времени, назовем гидродинамическим давлением. Гидродинамическое давление характеризует действие сил на бесконечно малую площадь, взятую в участке сосуда в фиксированный момент времени и в фиксированной точке. Система (2.51) является системой четырех уравнений для четырех функций: три координаты вектора скорости  $\vec{v}$  и  $p$ . Также рассматривается случай, когда объемные силы имеют потенциал:  $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$ . Где эти условия не выполняются, будет оговорено особо.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) + [\text{rot} \vec{v}, \vec{v}] = \vec{0},$$

где функция  $H = \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U$  называется функцией Бернулли.

Для стационарного поля скоростей движения имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{v} &= 0; \\ \text{grad} H &= [\vec{v}, \text{rot} \vec{v}]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Выясним геометрические свойства поля  $\vec{e}_3$ , задающего направление скорости для стационарного поля скоростей жидкости. Первое из уравнений (2.52) дает:

$$\text{div} \vec{v} = v \text{div} \vec{e}_3 + (\vec{e}_3, \text{grad} v) = 0.$$

Обозначив через  $ds = \omega^3$  и через  $\frac{d}{ds}$  производную по направлениям интегральных линий поля  $\vec{e}_3$ , получим:

$$\vec{v} \text{div} \vec{e}_3 + \left( \vec{e}_3, \frac{dv}{ds} \vec{e}_3 \right) = 0$$

или

$$v \text{div} \vec{e}_3 + \frac{dv}{ds} = 0.$$

Окончательно получим:

$$\text{div} \vec{e}_3 = -\frac{d \ln v}{ds}. \quad (2.53)$$

С учетом (2.37) имеем:

$$\text{div} \vec{e}_3 = -(p_2 - q_1). \quad (2.54)$$

Так как  $(p_2 - q_1)$  есть средняя кривизна линий тока или интегральных линий векторного поля  $\vec{e}_3$ , то из уравнения (2.54) следует, что  $\text{div} \vec{e}_3$  в каждой точке потока равна средней кривизне конгруэнции линий тока, взятой с противоположным знаком. Справедлива

**Теорема 2.1.** Величина  $\text{div} \vec{e}_3$  в каждой точке потока жидкости равна средней кривизне конгруэнции линий тока с точностью до знака.

**Следствие.** Величина  $\text{div} \vec{e}_3$  равна нулю тогда и только тогда, когда конгруэнция линий тока является минимальной конгруэнцией.



Из следствия следует, что в случае минимальной конгруэнции линий тока векторное поле  $\vec{e}_3$  является соленоидальным.

Далее, рассмотрим более подробно второе уравнение системы (2.52). Для этого проанализируем соотношение:

$$\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3) = v\text{rot}\vec{e}_3 + [\text{grad } v, \vec{e}_3],$$

которое подставим во второе уравнение системы (2.52):

$$\begin{aligned} \text{grad } H &= [\vec{v}\vec{e}_3, v\text{rot}\vec{e}_3 + [\text{grad } v, \vec{e}_3]] = v^2[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] + [\vec{v}\vec{e}_3, [\text{grad } v, \vec{e}_3]] = \\ &= v^2[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] - v((\vec{e}_3, \text{grad } v)\vec{e}_3 - \text{grad } v) = v^2[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] - v(-\vec{v}\vec{e}_3 \text{div}\vec{e}_3 - \\ &- \text{grad } v) = v^2[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] + v^2\vec{e}_3 \text{div}\vec{e}_3 + v \text{grad } v. \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\text{grad } H = v^2[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] + v^2\vec{e}_3 \text{div}\vec{e}_3 + v \text{grad } v. \quad (2.55)$$

Согласно соотношению (2.31) при условии, что  $\vec{v} = \vec{v}\vec{e}_3$ , запишем:

$$\begin{aligned} -\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3)d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-vp) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge dv + \\ &+ \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (vq)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (vq) - \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (vp)). \end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \vec{e}_1(-v\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (p_3\omega^3) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (vq_3\omega^3) + \\ &+ \vec{e}_3(v\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (q_2\omega^2) - \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (vp_1\omega^1)). \end{aligned}$$

В случае ортонормированного репера имеем  $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = 1$ , а с учетом формул (2.53) и (2.54) будем иметь:

$$\begin{aligned} -\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \vec{e}_1(-vp_3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + v(p_2 - q_1)\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge \omega^3) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge v(p_2 - q_1)\omega^3 + vq_3\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) + \vec{e}_3(vq_2\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \\ &\wedge \omega^2 - vp_1\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1). \end{aligned}$$

С учетом некоторых преобразований будем иметь:

$$-\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 ((-vp_3)\vec{e}_1 - vq_3\vec{e}_2 + (vq_2 + vp_1)\vec{e}_3).$$

После сокращения на  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$  получим:

$$-\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3) = (vp_3)\vec{e}_1 + (vq_3)\vec{e}_2 - (vq_2 + vp_1)\vec{e}_3$$

Окончательно запишем:

$$\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3) = v(p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2 - (q_2 + p_1)\vec{e}_3). \quad (2.56)$$

Второе уравнение из системы (2.52) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{grad } H &= [\vec{v}\vec{e}_3, \vec{v}(p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2 - (q_2 + p_1)\vec{e}_3)] = v^2([\vec{e}_3, p_3\vec{e}_1] + q_3[\vec{e}_3, \vec{e}_2] - \\ & - (q_2 + p_1)[\vec{e}_3, \vec{e}_3]) = v^2(p_3[\vec{e}_3, \vec{e}_1] + q_3[\vec{e}_3, \vec{e}_2]). \end{aligned}$$

Так как в случае ортонормированного репера  $\vec{e}_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ , то  $\vec{e}_1 = [\vec{e}_2, \vec{e}_3]$  и  $\vec{e}_2 = [\vec{e}_3, \vec{e}_1]$ . На основании этого получаем:

$$\text{grad } H = v^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1). \quad (2.57)$$

Умножая (2.57) скалярно на произвольное перемещение  $d\vec{x}$  частицы жидкости, получим:

$$\begin{aligned} dH &= v^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)d\vec{x} = v^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3) = \\ & = v^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1), \end{aligned}$$

то есть

$$dH = v^2(-q_3\omega^1 + p_3\omega^2). \quad (2.58)$$

Аналогично, как это было сделано для  $\text{rot}(\vec{v}\vec{e}_3)$ , получим:

$$\text{rot}\vec{e}_3 = p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2 - (q_2 + p_1)\vec{e}_3. \quad (2.59)$$

Из последнего равенства будем иметь:

$$[\vec{e}_3, \text{rot}\vec{e}_3] = p_3[\vec{e}_3, \vec{e}_1] + q_3[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1.$$

Умножая равенство (2.55) скалярно на перемещение частицы  $d\vec{x}$ , получим:

$$dH = v^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3) - v^2 \frac{d \ln v}{ds} \vec{e}_3 d\vec{x} + v dv.$$

В случае ортонормированного репера будем иметь:

$$dH = v^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1) - v^2 \frac{d \ln v}{ds} \omega^3 + v dv.$$

Последнее равенство окончательно перепишем:

$$dH = v^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1) - v^2 d \ln v + v dv. \quad (2.60)$$

Поскольку  $v dv - v^2 d \ln v = 0$  на поверхности полной энергии, то из равенства (2.60) получим соотношение (2.58).

Случай покоя, когда  $\vec{v} = \vec{0}$ , не рассматривается по вполне понятным причинам. Из равенства (2.58) можно сделать вывод: функция  $H$  постоянна тогда и только тогда, когда  $p_3 = q_3 = 0$ . Раскроем геометрический смысл последних равенств. Перемещения, для которых  $dH = 0$ , лежат на поверхностях семейства «постоянной энергии»  $H = \text{const}$ , которые характеризуются тем, что на них располагаются все линии тока и все вихревые линии.

В случае, когда движение носит ламинарный характер, на таких поверхностях будут располагаться только линии тока.

Выберем за поле векторов  $\vec{e}_3$  поле нормалей к данному семейству поверхностей. Вектор кривизны конгруэнции линий, ортогональных к этому семейству поверхностей или конгруэнция интегральных линий векторного поля  $\vec{e}_3$ , имеет вид:

$$\left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0 \\ \omega^2=0}} = q_3 \vec{e}_1 - p_3 \vec{e}_2.$$

Учитывая, что  $p_3 = q_3 = 0$ , получим:

$$\left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0 \\ \omega^2=0}} = \vec{0}, \quad (2.61)$$

то есть интегральные линии векторного поля  $\vec{e}_3$  являются прямыми, а вектор  $\vec{e}_3$  постоянен на каждой поверхности семейства. В этом случае частицы жидкости будут двигаться по прямой.

Векторное поле  $\vec{e}_3$  будет голономным, то есть существует семейство поверхностей, ортогональных этому полю, тогда и только тогда, когда  $(\vec{e}_3, \text{rote}_3) = 0$ . В случае, когда  $(\vec{e}_3, \text{rote}_3) \neq 0$ , такого семейства поверхностей не существует. С учетом (2.59) получаем, что векторное поле  $\vec{e}_3$  голономно тогда и только тогда, когда  $q_2 + p_1 = 0$ , при условии, когда вектор  $\vec{e}_3$  имеет направление скорости. Из формулы (2.31) найдем:

$$-\text{rote}_1 d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge r + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-q)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (-q)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge r).$$

Раскрывая формы  $r$  и  $q$ , получим:

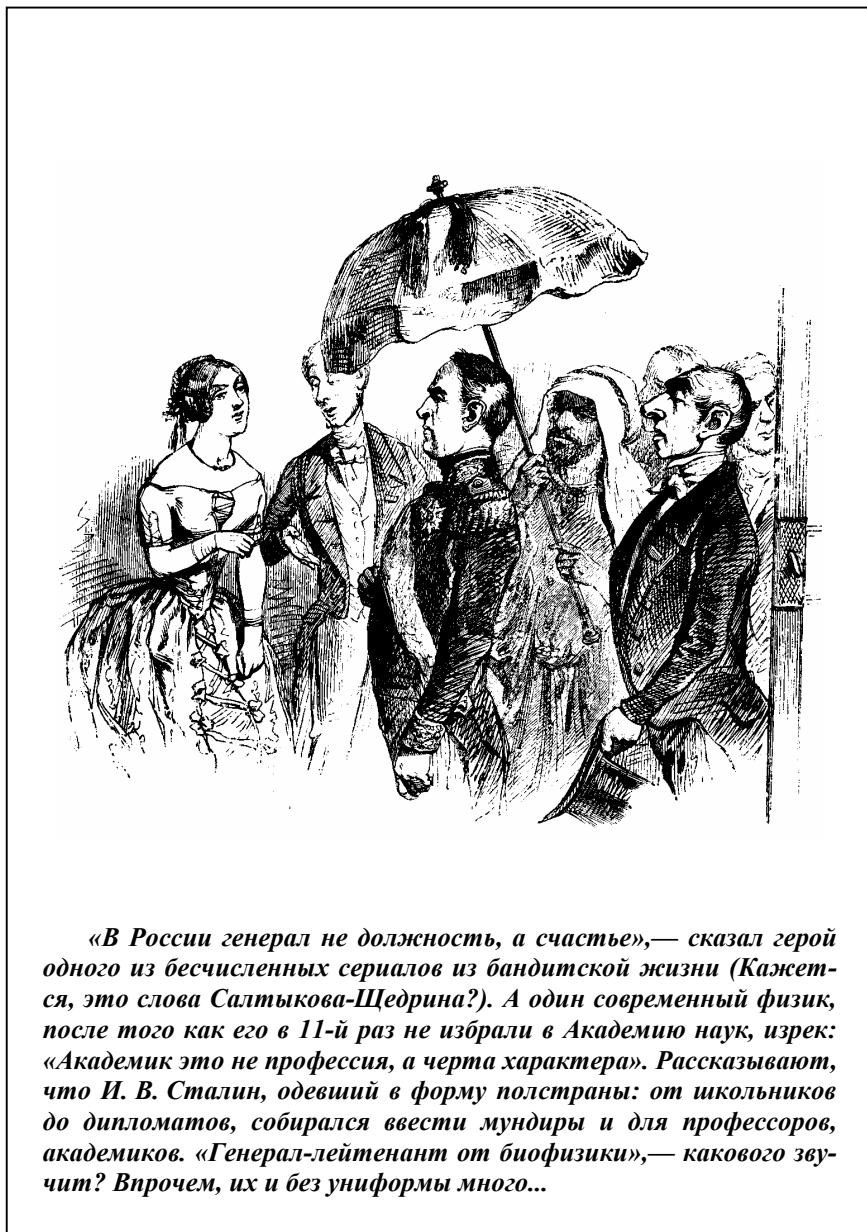
$$-\text{rote}_1 d\tau = \vec{e}_1(r_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - q_2 \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2) - q_1 \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1) + r_1 \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1).$$

Последнее перепишем в виде:

$$-\text{rote}_1 d\tau = \vec{e}_1(r_3 + q_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - q_1 \vec{e}_2(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) - r_1 \vec{e}_3(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3).$$

Так как  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ , то из последнего равенства будем иметь:

$$\text{rote}_1 = -(q_2 + r_3)\vec{e}_1 + q_1 \vec{e}_2 + r_1 \vec{e}_3. \quad (2.62)$$



*«В России генерал не должность, а счастье»,— сказал герой одного из бесчисленных сериалов из бандитской жизни (Кажется, это слова Салтыкова-Щедрина?). А один современный физик, после того как его в 11-й раз не избрали в Академию наук, изрек: «Академик это не профессия, а черта характера». Рассказывают, что И. В. Сталин, одевший в форму полстраны: от школьников до дипломатов, собирался ввести мундиры и для профессоров, академиков. «Генерал-лейтенант от биофизики»,— какового звучит? Впрочем, их и без униформы много...*

Используя равенство (2.62), получим:

$$(\vec{e}_1, \text{rot} \vec{e}_1) = -(q_2 + r_3).$$

Как следует из последнего равенства, векторное поле  $\vec{e}_1$  будет голономным тогда и только тогда, когда

$$q_2 + r_3 = 0, \quad (2.63)$$

при условии, что вектор скорости имеет направление  $\vec{e}_1$ .

Аналогично найдем условие голономности векторного поля  $\vec{e}_2$ . Для этого также воспользуемся формулой (2.31):

$$\begin{aligned} -\text{rot} \vec{e}_2 d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge p) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge p - \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge r) + \\ &+ \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (-r)). \end{aligned}$$

Расписывая формы  $p$  и  $r$  по базисным, получим:

$$\begin{aligned} -\text{rot} \vec{e}_2 d\tau &= p_2 \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2) + \vec{e}_2(p_1 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - r_3 \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) - \\ &- r_2 \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2). \end{aligned}$$

После несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} -\text{rot} \vec{e}_2 d\tau &= -p_2 \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + \vec{e}_2(p_1 + r_3)(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) - \\ &- r_2 \vec{e}_3(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3). \end{aligned}$$

Деля обе части последнего равенства на  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ , запишем:

$$\text{rot} \vec{e}_2 = p_2 \vec{e}_1 - (p_1 + r_3) \vec{e}_2 + r_2 \vec{e}_3. \quad (2.64)$$

Из равенства (2.64) имеем:

$$(\vec{e}_2, \text{rot} \vec{e}_2) = -(p_1 + r_3).$$

Как видно из этого равенства, векторное поле  $\vec{e}_2$  будет голономным тогда и только тогда, когда

$$p_1 + r_3 = 0, \quad (2.65)$$

при условии, что вектор скорости жидкости имеет направление вектора  $\vec{e}_2$ .

Таким образом, условия  $p_1 + q_2 = 0$ , (2.63) и (2.65) говорят о том, что к векторам репера  $\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2$  существуют семейства поверхностей, ортогональных к этим векторам.

Далее, продифференцируем функцию Бернулли, то есть  $H = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U$ , при условии, что на поверхности полной энергии  $H = \text{const}$ :

$$\vec{v} d\vec{v} + \frac{dp}{\rho} + dU = 0,$$

где учтено, что параметр  $\rho$  (плотность) на рассматриваемом участке сосуда принимает постоянное значение. Так как  $dU = -\vec{F}d\vec{x}$ , где  $F$  содержит и составляющую, порожденную силой тяжести, то

$$\vec{v} d\vec{v} + \frac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0.$$

Кроме того,  $\vec{v} = v\vec{e}_3$  и  $d\vec{v} = v\omega_3^1\vec{e}_1 + v\omega_3^2\vec{e}_2 + dv\vec{e}_3$ . Последнее означает, что  $\vec{v}d\vec{v} = vdv$  и последнее равенство примет вид:

$$v dv + \frac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0.$$

Из формулы (2.37) получим, что  $v dv = v^2(p_2 - q_1)\omega^3$ . Тогда при условии ортогональности равнодействующей всех сил  $\vec{F}$ , действующих на частицу жидкости в рассматриваемом участке сосуда, смещению  $d\vec{x}$ , будем иметь:

$$v^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} = 0,$$

или

$$dp = v^2(q_1 - p_2)\omega^3. \quad (2.66)$$

Справедлива

**Теорема 2.2.** Если все перемещения  $d\vec{x}$  частиц жидкости принадлежат соответствующему семейству поверхностей полной энергии и вектор  $\vec{F}$  коллинеарен вектору  $\vec{e}_3$ , то гидродинамическое давление в участке сосуда пропорционально средней кривизне конгруэнции линий тока.

Если воспользуемся понятием минимальной конгруэнции, то получим

**Следствие.** Если все перемещения  $d\vec{x}$  частиц жидкости, принадлежащие соответствующему семейству поверхностей полной энергии, а вектор силы  $\vec{F}$  ортогонален этому семейству, то гидродинамическое давление на участке сосуда постоянно тогда и только тогда, когда конгруэнция линий тока является минимальной конгруэнцией.

Величина скорости потока жидкости будет постоянной на каждой поверхности семейства поверхностей полной энергии тогда и только тогда, когда будут выполняться следующие два условия:

— конгруэнция линий тока минимальна;

— для каждой точки потока вектор кривизны линии тока является градиентом соответствующей поверхности полной энергии.

В этом случае семейство поверхностей полной энергии принято называть семейством поверхностей постоянной полной энергии. На каждой из таких поверхностей модуль вектора скорости принимает постоянное значение. Это значение величины скорости меняется от поверхности к поверхности. На поверхностях постоянной полной энергии имеем:

$$dp = -\rho(\vec{F}d\vec{x}). \quad (2.67)$$

Как видно из формулы (2.67), гидродинамическое давление постоянно в участке рассматриваемого сосуда тогда и только тогда, когда сила  $\vec{F}$  ортогонально перемещению  $d\vec{x}$ . Справедлива

**Теорема 2.3.** *При движении жидкости по поверхностям постоянной полной энергии давление вдоль участка сосуда постоянно тогда и только тогда, когда вектор равнодействующих сил, действующих на частицы жидкости, движущихся по поверхностям постоянной полной энергии, ортогонален их перемещениям.*

Здесь следует отметить, что при ламинарном движении, когда каждая из частиц движется параллельно стенке сосуда, равнодействующая всех сил, действующих на частицы, должна быть ортогональна стенкам сосуда.

**Следствие.** В случае ламинарного движения жидкости по поверхностям постоянной полной энергии гидродинамическое давление принимает постоянное значение в рассматриваемом участке сосуда тогда и только тогда, когда равнодействующая всех сил, действующих на частицы данного участка, ортогональна стенкам сосуда.

Использование поверхностей постоянной полной энергии, то есть поверхностей, на каждой из которых величина скорости принимает постоянное значение, является полезным при описании геометрии движущейся жидкости и, при случае, этим будем пользоваться.

Далее, представим равнодействующую всех сил, действующих на жидкость, находящуюся в рассматриваемом участке сосуда, в виде  $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$ , где  $F_1, F_2, F_3$  — координаты этой силы и  $d\vec{x} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3$ . Так как рассматриваются интегральные линии векторного поля  $\vec{e}_3$ , то можно положить  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ . Отсюда имеем, что  $\vec{F}d\vec{x} = F_3\omega^3$ . После подстановки получившегося равенства в формулу

$$v^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0 \text{ получим:}$$

$$v^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} - F_3\omega^3 = 0,$$

или

$$(v^2(p_2 - q_1) - F_3)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} = 0. \quad (2.68)$$

Рассмотрим случай постоянства гидродинамического давления для участка сосуда. Из равенства (2.68) получаем:

$$(v^2(p_2 - q_1) - F_3)\omega^3 = 0$$

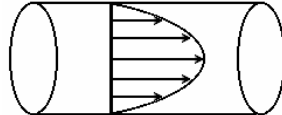
или, воспользовавшись тем, что форма  $\omega^3$  — базисная, запишем:

$$F_3 = v^2(p_2 - q_1). \quad (2.69)$$

Из формулы (2.69) можно сделать вывод, что в случае постоянства давления вдоль участка рассматриваемого сосуда, сила, действующая на жидкость в направлении ее движения, прямо пропорциональна квадрату величины скорости и средней кривизне линий тока. Если же конгруэнция линий тока является минимальной, то составляющая равнодействующей сил по направлению движения жидкости равна нулю.

На семействе поверхностей полной энергии с заданными на них линиями тока можно построить бесчисленное множество потоков тогда и только тогда, когда это семейство является семейством постоянной полной энергии.

При ламинарном течении по участку сосуда профиль скоростей имеет вид параболы:



То есть скорость максимальна вдоль оси сосуда и уменьшается по мере приближения к стенкам сосуда. Это объясняется тем, что в граничных слоях на жидкость действуют большие силы со стороны стенок сосуда. Эти силы называются силами внешнего трения.

Последнее, с помощью формулы (2.69), можно объяснить следующим образом. Пусть все линии тока имеют одну и ту же среднюю кривизну линий. Так составляющая  $F_3$  в граничных слоях принимает более большие значения, то это приводит к уменьшению скорости. Так как, согласно формуле (2.69) сила и квадрат скорости имеют прямую пропорциональную зависимость.

В общем случае уравнение (2.68) можно переписать в виде:



$$\frac{dp}{\rho} = (F_3 - v^2(p_2 - q_1))ds$$

или

$$dp = \rho(F_3 - v^2(p_2 - q_1))ds. \quad (2.70)$$

Если же конгруэнция линий тока является минимальной конгруэнцией, то из равенства (2.70) получим:

$$dp = \rho F_3 ds. \quad (2.71)$$

Для стационарного вихревого течения давление также пропорционально потенциалу объемных сил. Тем самым можно сделать вывод, что случай рассмотрения минимальной конгруэнции линий тока равносильно рассмотрению стационарного вихревого течения. В этих случаях гидродинамическое давление пропорционально потенциалу сил. В этом случае движение характеризуется геометрией единичного поля  $\vec{e}_3$ , которое удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{rote}_3 &= \mu \vec{e}_3; \\ \operatorname{dive}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Наконец, выясним вопрос, что из себя физически представляют поверхности полной энергии.

Одной из «постановочных» задач в гидродинамике сосудов является выяснение физико-математической структуры поверхности «полной энергии» в случае, когда сосуды не подвергаются искажению, то есть представляют собой жесткие трубы, а жидкость является идеальной несжимаемой. В нашем случае, когда рассматривается участок сосуда, с большой степенью удовлетворяются описанные выше условия.

Пусть скорость жидкости постоянна на каждой поверхности полной энергии, то есть будут рассматриваться поверхности постоянной полной энергии. В случае ламинарного движения это так и есть, а в случае турбулентного движения скорость меняет свое направление, но остается постоянной по величине. Это и имеется в виду, когда говорится о постоянстве скорости жидкости. Рассмотрения будем вести для вихревого потока. Случай ламинарного движения можно описать, основываясь на формуле (6.69), а также этот случай будет рассмотрен несколько ниже.

Вихревой поток имеет семейство поверхностей, которому принадлежат все линии тока и все вихревые линии. Выберем за поле векторов  $\vec{e}_3$  — поле нормалей к этому семейству поверхностей.

Дифференциальное уравнение последнего семейства будет иметь вид:

$$\omega^3 = 0. \quad (2.72)$$

Линии тока и вихревые линии лежат на этих поверхностях. Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v(\cos \sigma \vec{e}_1 + \sin \sigma \vec{e}_2); \\ 2\vec{v} &= \text{rot} \vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2, \quad \omega^3 = 0,\end{aligned}\tag{2.73}$$

где  $\vec{v}$  — вектор скорости и  $\sigma$  — угол между вектором скорости и вектором  $\vec{e}_1$ .

Семейство поверхностей должно быть вполне интегрируемо, то есть должно выполняться условие:

$$D\omega^3 \wedge \omega^3 = 0.\tag{2.74}$$

Поскольку в качестве формы  $\omega^3$  можно взять длину дуги линии тока, поэтому запишем:

$$\omega^3 = S ds.\tag{2.75}$$

Из соотношения (2.73) получим:

$$dH = Sv\left(-\frac{v^1}{2}\sin \sigma + \frac{v^2}{2}\cos \sigma\right) dS.\tag{2.76}$$

Из равенства (2.76) следует, что  $H$  должна быть некоторой функцией от  $s$ :

$$H = f(s).\tag{2.77}$$

Из равенств (2.76) и (2.77) получим:

$$Sv\left(-\frac{v^1}{2}\sin \sigma + \frac{v^2}{2}\cos \sigma\right) = f'(s).\tag{2.78}$$

Уравнения компонентов вихря будут иметь вид:

$$\begin{aligned}-\frac{v^1}{v}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \left(\sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma(d\sigma + r)\right) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (q \cos \sigma - \\ &- p \sin \sigma) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1; \\ -\frac{v^2}{v}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \left(-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma(d\sigma + r)\right) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - (q \cos \sigma - \\ &- p \sin \sigma) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3; \\ 0 &= \left(-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma(d\sigma + r)\right) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \left(q \sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma(d\sigma + \right. \\ &\left. + r)\right) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3,\end{aligned}$$

где как и прежде  $p, q, r$  означают ранее обозначенные формы.

Уравнение непрерывности имеет вид:

$$(\cos \sigma \frac{dv}{v} - \sin \sigma (d\sigma + r)) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (\sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma (d\sigma + r)) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p \sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$L = p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma;$$

$$N = p_2 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma,$$

и, удовлетворяя всем гидродинамическим уравнениям, примем, что:

$$\frac{dv}{v} = \xi \omega^1 + \eta \omega^2 + (L + \frac{f'}{Sv^2}) \omega^3; \quad (2.79)$$

$$d\sigma + r = (\eta + N \sin \sigma) \omega^1 - (\xi + N \cos \sigma) \omega^2 + \zeta \omega^3,$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — некоторые функции, которые выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (2.79).

Поскольку  $dv = 0$  на каждой поверхности постоянной полной энергии, то, как это следует из первого уравнения (2.79), имеем:

$$\xi = \eta = 0.$$

Однако при переходе от одной поверхности к другой скорость жидкости меняется. В этом случае

$$L + \frac{f'}{Sv^2} = 0: f' = -Sv^2 L.$$

Окончательно запишем выражение для  $f'$  в виде:

$$f' = -Sv^2 (p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma). \quad (2.80)$$

Будем также считать, что вектора  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  направлены по линиям кривизны поверхностей (2.72), то есть  $p_1 = q_2 = 0$ .

Окончательно будем иметь:

$$\frac{dv}{v} = (p_2 \sin^2 \sigma - q_1 \cos^2 \sigma + \frac{f'}{Sv^2}) \omega^3; \quad (2.81)$$

$$d\sigma + r = (p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma) (\sin \sigma \omega^1 - \cos \sigma \omega^2) + \zeta \omega^3.$$

Дифференцируя внешним образом равенства (2.81), будем иметь:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \sigma (dp_2 \wedge \omega^3 + (p_2 q_2 + p_1 p_2) \omega^1 \wedge \omega^2 + p_2 q_3 \omega^1 \wedge \omega^3 - p_2 p_3 \omega^2 \wedge \omega^3) + \\ & + 2 \sin \sigma \cos \sigma (p_2 + q_1) \wedge \omega^3 - \cos^2 \sigma (dq_1 \wedge \omega^3 + (q_1 q_2 + p_1 q_1) \omega^1 \wedge \omega^2 + \\ & + q_1 q_3 \omega^1 \wedge \omega^3 - q_1 p_3 \omega^2 \wedge \omega^3) = 0. \end{aligned} \quad (2.81a)$$

После внешнего дифференцирования второго равенства из (2.81) получим:

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \sigma ((dp_3 + q_3) \wedge \omega^1 + (p_3 r + p_3) \wedge \omega^2 - p_3 q \wedge \omega^3 - p \wedge q) + \\
& + \cos^2 \sigma ((-q_3 - q_3 r) \wedge \omega^1 + (dq_3 - p_3) \wedge \omega^2 + q_3 p \wedge \omega^3 - p \wedge q) + \quad (2.82) \\
& + \sin \sigma \cos \sigma ((2p_3 - dq_3 + p_3 r) \wedge \omega^1 + (-q_3 r - 2q_3 - dp_3) \wedge \omega^2 + \\
& + (q_3 q - p_3 p) \wedge \omega^3) + d\zeta \wedge \omega^3 + \zeta (q \wedge \omega^1 + p \wedge \omega^2) = 0.
\end{aligned}$$

После умножения равенства (2.82) внешним образом на  $\omega^3$ , получим:

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \sigma ((dp_3 + q_3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 + (p_3 r + p_3) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - p \wedge q \wedge \omega^3) + \\
& + \cos^2 \sigma ((-q_3 - q_3 r) \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 + (dq_3 - p_3) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - p \wedge q \wedge \omega^3) + \quad (2.83) \\
& + \sin \sigma \cos \sigma ((2p_3 - dq_3 + p_3 r) \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 - (q_3 r + 2q_3 + dp_3) \wedge \omega^2 \wedge \\
& \wedge \omega^3) + \zeta (q \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 + p \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) = 0.
\end{aligned}$$

Соотношения (2.81а) и (2.83) не дают конечных уравнений для функции на семействе поверхностей постоянной полной энергии, однако из них получаем ряд условий, к которым присоединим и уравнения структуры евклидова пространства. Все эти условия удовлетворяются, если предположить:

$$p_3 = q_3 = 0; \quad r = 0; \quad p_2 q_1 = 0,$$

причем, случаи  $p_2 = 0$  и  $q_1 = 0$  симметричны. Возьмем  $p_2 = 0$  и получим:

$$\begin{aligned}
& p = r = 0; \quad q = q_1 \omega^1; \\
& d\vec{e}_1 = -q\vec{e}_3; \quad d\vec{e}_2 = \vec{0}; \quad d\vec{e}_3 = q\vec{e}_1; \\
& dq_1 \wedge \omega^1 + q_1^2 \omega^3 \wedge \omega^1 = 0; \quad dq_1 \wedge \omega^3 = 0; \\
& \frac{dv}{v} = (-q_1 \cos^2 \sigma + \frac{f'}{SV^2}) \omega^3; \quad d\sigma = \zeta \omega^3.
\end{aligned}$$

Решения последних уравнений дают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
& q = d\theta; \quad \omega^1 = \frac{d\theta}{q_1}; \quad \omega^3 = -\frac{dq_1}{q_1^2}; \\
& \vec{e}_1 = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{k}; \quad \vec{e}_2 = \vec{j}; \\
& \vec{e}_3 = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{k}; \\
& \vec{x} = \frac{1}{q_1} \vec{e}_3 + y \vec{j} = \frac{\cos \theta}{q_1} \vec{i} + y \vec{j} + \frac{\sin \theta}{q_1} \vec{k}; \\
& \sigma = \sigma(q_1),
\end{aligned}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — некоторый ортонормированный базис.

С другой стороны, можно записать:

$$\vec{x} = \bar{x} \vec{i} + \bar{y} \vec{j} + \bar{z} \vec{k}.$$

Сравнивая равенства для  $\vec{x}$ , получим:

$$\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = \frac{\cos^2 \theta}{q_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{q_1^2} = \frac{1}{q_1^2},$$

то есть имеем семейство круговых цилиндров, для которых неподвижной осью будет ось  $OY$ , определяемая направляющим вектором  $\vec{j}$ .

Таким образом, семейство поверхностей постоянной полной энергии представляет собой семейство круговых цилиндров, образующие которых параллельны оси  $OY$ . Тем самым, частицы жидкости будут двигаться по цилиндрам, образующие которых параллельны оси сосуда.

При ламинарном движении скорость частицы будет постоянна на поверхности, находящейся на данном расстоянии от оси сосуда. Легко видно, что в этом случае поверхности постоянной полной энергии также представляют собой круговые цилиндры, образующие которых также параллельны оси сосуда.

В подавляющем большинстве мелких сосудов, которые являются «каналами сопротивления», поток жидкости носит ламинарный характер, поэтому гидродинамические и кинематические особенности движения жидкости в таких сосудах объясняется этим типом потока. Однако поток остается ламинарным до достижения критической скорости, после чего поток приобретает завихрения или жидкость движется турбулентно. Так как при движении с завихрением происходит большая потеря энергии вследствие расхода энергии на создание кинетической энергии в завихрениях, то такой поток не является нормой для периферического движения жидкости. Однако, как было уже отмечено, такие изменения, как образование препятствий потоку, влечет за собой развитие локальной турбулентности сразу же за пределами того участка сосуда, где диаметр сосуда уменьшен.

При развитии вихревого движения, а это происходит постепенно, поток жидкости становится пропорциональным квадратному корню из показателя падения давления вдоль сосуда. Как известно, поток остается ламинарным до достижения критической скорости, после чего жидкость движется турбулентно.

Так как линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях  $\omega^3 = 0$ , то запишем уравнения для компонент вихря и уравнения неразрывности для этих поверхностей при условии, что эти поверхности являются поверхностями полной энергии, а не постоянной полной энергии:

$$\begin{aligned}
(\sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma (d\sigma + r)) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &= 0; \\
(-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma (d\sigma + r)) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &= 0; \\
(p \sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Далее рассмотрим два неколлинеарных вектора  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in T_x$ , где  $T_x$  — касательная плоскость к поверхности полной энергии. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах будет вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned}
d\varepsilon(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) &= (\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{e}_3) = \omega^1(x, \vec{\xi}_1) \omega^2(x, \vec{\xi}_2) - \omega^1(x, \vec{\xi}_2) \omega^2(x, \vec{\xi}_1) = \\
&= (\omega^1 \wedge \omega^2)(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2).
\end{aligned}$$

Таким образом,  $d\varepsilon = \omega^1 \wedge \omega^2$  — элемент площади поверхности полной энергии  $H$ .

Равенства (2.84), с учетом последних вычислений, можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(\sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma (d\sigma + r)) \wedge d\varepsilon &= 0; \\
(-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma (d\sigma + r)) \wedge d\varepsilon &= 0; \\
(p \sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge d\varepsilon &= 0.
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Применяя к выражениям (2.85) лемму Картана, запишем:

$$\begin{aligned}
\sin \sigma \frac{dv}{v} + \cos \sigma (d\sigma + r) &= td\varepsilon; \\
-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma (d\sigma + r) &= ud\varepsilon; \\
p \sin \sigma - q \cos \sigma &= kd\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Из второго уравнения (2.86) найдем:

$$d\varepsilon = \frac{1}{4} (-\cos \sigma \frac{dv}{v} + \sin \sigma (d\sigma + r))$$

и после подстановки в первое уравнение (2.86), получим:

$$(\sin \sigma + \frac{t}{u} \cos \sigma) \frac{dv}{v} + (d\sigma + r) (\cos \sigma - \frac{t}{u} \sin \sigma) = 0. \tag{2.87}$$

В формуле (2.87) введем обозначение:

$$\sin \sigma + \frac{t}{u} \cos \sigma = \varphi(\sigma),$$

то она примет вид:

$$\varphi(\sigma) \frac{dv}{v} + (d\sigma + r)\varphi'(\sigma) = 0.$$

Или

$$\frac{dv}{v} = -(d\sigma + r) \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}. \quad (2.88)$$

Равенство (2.88) перепишем в виде:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} d\sigma - \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} r. \quad (2.89)$$

Также соотношение (2.89) можно представить в следующем виде:

$$d(\ln v) = -d(\ln \varphi(\sigma)) - \frac{\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} r. \quad (2.90)$$

Рассмотрим уравнение (2.89) при условиях: 1)  $\varphi'(\sigma) = 0$  и 2)  $r = 0$ . В пер-

вом случае, при условии, что  $\cos \sigma - \frac{t}{u} \sin \sigma = 0$  или  $\operatorname{tg} \sigma = \frac{u}{t}$ .

Из последнего равенства получаем геометрический смысл отношения  $\frac{u}{t}$ : это есть тангенс угла, который образуют касательные к линиям тока с вектором  $\vec{e}_1$ .

Подставляя  $u = \operatorname{tg} \sigma \cdot t$  в выражение (2.86), возведя их в квадрат и сложив, получаем:

$$\left(\frac{dv}{v}\right)^2 + (d\sigma + r)^2 = \frac{t^2 (d\varepsilon)^2}{\cos^2 \sigma}$$

или

$$(d \ln v)^2 + (d\sigma + r)^2 = \frac{t^2 (d\varepsilon)^2}{\cos^2 \sigma}. \quad (2.91)$$

В случае 2) имеем  $\omega_1^2 = 0$ . Так как форма  $\omega_1^2$  определяет поворот вокруг вектора  $\vec{e}_3$ , то в этом случае жидкость по направлению данного вектора движется без завихрений. Учитывая уравнения структуры евклидова пространства в ортонормированном репере, имеем

$$D\omega^1 = r \wedge \omega^2 - q \wedge \omega^3, \quad D\omega^2 = -r \wedge \omega^1 + p \wedge \omega^3.$$

На поверхностях  $\omega^3 = 0$  будем иметь

$$D\omega^1 = D\omega^2 = 0,$$

то есть в этом случае на поверхностях полной энергии формы  $\omega^1$  и  $\omega^2$  являются замкнутыми. Справедлива

**Теорема 2.4.** На поверхностях полной энергии репер  $\{x, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  не вращается вокруг вектора  $\bar{e}_3$  тогда и только тогда, когда формы  $\omega^1$  и  $\omega^2$  являются замкнутыми.

В перечисленных выше случаях имеем:

$$d(\ln v) = -d(\ln \varphi(\sigma)).$$

Интегрируя последние равенства, запишем:

$$\ln v = -\ln \varphi(\sigma) + \ln C = \ln \frac{C}{\varphi(\sigma)}$$

или 
$$v = \frac{C}{\varphi(\sigma)} = C(\sin \sigma + \frac{t}{u} \cos \sigma)^{-1}.$$

Справедлива

**Теорема 2.5.** Скорость жидкости в рассматриваемой части сосуда обратно пропорциональна функции  $\varphi(\sigma)$ .

Если скорость постоянна, то уравнение (2.91) примет вид:

$$(d\sigma + r)^2 - \left(\frac{td\varepsilon}{\cos \sigma}\right)^2 = 0;$$

$$(d\sigma + r - \frac{td\varepsilon}{\cos \sigma})(d\sigma + r + \frac{td\varepsilon}{\cos \sigma}) = 0;$$

$$d\sigma + r = \pm \frac{td\varepsilon}{\cos \sigma}.$$

В случае 2) будем иметь:  $\cos \sigma d\sigma = \pm td\varepsilon$ .

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\sin \sigma = \pm t\varepsilon + C.$$

Из последней формулы видно, что в случае отсутствия вращения вокруг вектора  $\bar{e}_3$ ,  $\sin \sigma$  пропорционален площади поверхности постоянной полной энергии.

Выражая из формулы Рейнольдса  $Re = \frac{vD\rho}{\eta}$  скорость, где  $D$  — диаметр сосуда,  $\rho$  — плотность,  $\eta$  — вязкость и  $Re$  — число Рейнольдса, по-

сле подстановки ее в формулу  $v = \frac{C}{\varphi(\sigma)}$ , получим:



$$\varphi(\sigma) = \frac{CD\rho}{\text{Re} \cdot \eta}.$$

Найдем производную от обеих частей последнего равенства, при условии постоянства  $\rho$ ,  $\text{Re}$  и  $\eta$  в рассматриваемом участке сосуда. Тогда будем иметь:

$$\varphi'(\sigma) = \frac{C\rho}{\text{Re}\eta} D'.$$

Так как в первом случае  $\varphi'(\sigma) = 0$ , то  $D' = 0$ , а это говорит о том, что диаметр сосуда в этом случае постоянен. В случае 2) он может и меняться.

Справедлива

**Теорема 2.6.** *Условия  $\varphi'(\sigma) = 0$  и  $r = 0$  приводят к тому, что в первом случае жидкость движется по сосуду, диаметр которого остается постоянным на всем участке рассматриваемого сосуда, а во втором случае постоянство диаметра не обязательно.*

Если в системе (2.79) положить  $\sigma = 0$ , то есть вектор  $\vec{e}_1$  направлен по касательным к линиям тока, то, как следует из второго уравнения этой системы:

$$r = (\eta + N \sin \sigma)\omega^1 - (\xi + N \cos \sigma)\omega^2 + \zeta\omega^3;$$

$$N = -q_3, \quad \eta = r_1, \quad \xi = q_3 - r_2, \quad \zeta = r_3,$$

а поэтому

$$\frac{dv}{v} = (q_3 - r_2)\omega^1 - r_1\omega^2 + \left(-q_1 + \frac{f'}{Sv^2}\right)\omega^3. \quad (2.92)$$

Дифференцируя уравнение (2.92) внешним образом, мы получим условие его интегрируемости, из которого следует, что на каждом семействе поверхностей полной энергии мы получим, вообще говоря, два потока с равными по модулю скоростями и противоположными по направлению.

Пусть семейство поверхностей полной энергии представляет собой семейство параллельных плоскостей, тогда

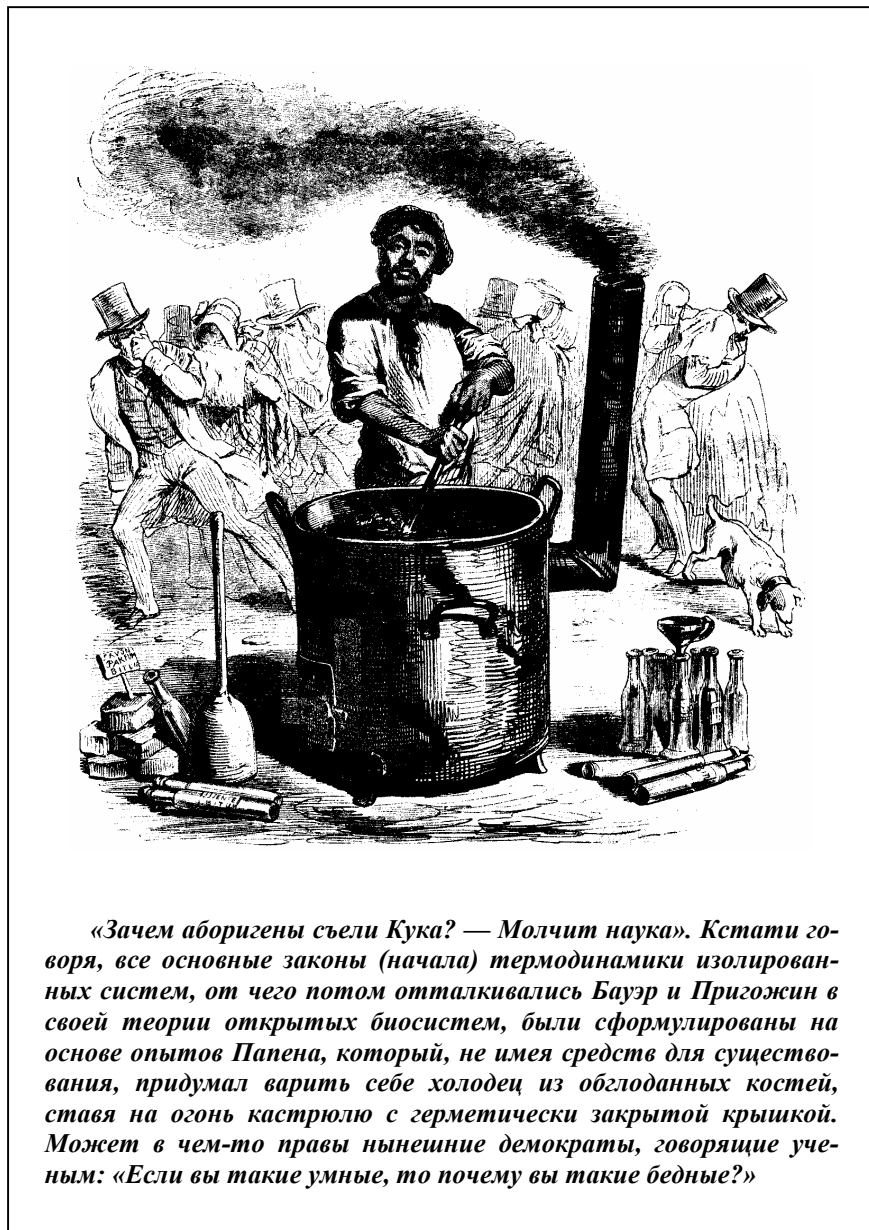
$$H = f(z) = \frac{v^2}{2} + Q.$$

Отсюда будем иметь

$$\frac{v^2}{2} = f(z) - Q_0, \quad \frac{p}{\rho} + U = Q_0, \quad \sigma = \sigma(z),$$

то есть  $Q$  не зависит от  $z$  и поэтому рассматривается  $Q_0$ .

С учетом последних равенств:



$$\frac{v^2}{2} = f(z) - \frac{p}{\rho} - U.$$

Окончательно имеем

$$v = \sqrt{2f(z) - \frac{2p}{\rho} - 2U}.$$

Из последнего равенства видно, что скорость жидкости в случае вихревого движения пропорциональна квадратному корню из падения давления вдоль сосуда. Это является известным фактом, который отмечался и выше. Здесь получено его доказательство при условии, когда поверхности полной энергии представляют собой семейство параллельных плоскостей. Однако это будет верно и для других видов поверхностей полной энергии.

С учетом формулы Рейнольдса, получим:

$$H = \left(\frac{\text{Re} \cdot \eta}{D\rho}\right)^2 + \frac{p}{\rho} + U. \quad (2.93)$$

Формула (2.93) также подтверждает известный факт о том, что полная энергия частицы жидкости, находящейся на определенной поверхности полной энергии тем больше, чем больше число Рейнольдса и падение давления вдоль сосуда, а также чем меньше диаметр сосуда. Последнее будет выполняться при постоянстве вязкости жидкости на рассматриваемом участке сосуда, плотности жидкости и потенциале внешних сил, включающих в себя и силу тяжести, в поле которой происходит движение жидкости.

**Об одном случае стационарного турбулентного движения жидкости.** В данном разделе будет рассмотрено стационарное турбулентное движение жидкости, линии тока скорости которого являются винтовыми линиями. Здесь мы исходим из таких двух известных фактов:

— первый факт (Ф. Клейна) говорит о том, что плоскости, нормальные к винтовым линиям, являются нулевыми плоскостями системы или нуль-системы;

— второй факт основан на том, что гиперраспределение, определяемое нуль-системой является плоским. Причем, верно и обратное утверждение о том, что всякое плоское гиперраспределение определяется некоторой нуль-системой.

Поэтому геометрия такого вида движения жидкости рассматривается, основываясь на этих двух фактах.

Вначале рассмотрим нормальную конгруэнцию линий к плоскому распределению в трехмерном евклидовом пространстве.

Присоединим к элементу  $(x, \xi)$  плоского распределения репер

$\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$ , где  $i = 1, 2$  и везде в дальнейшем малые латинские буквы будут принимать значения 1, 2. Вектора репера выбираем таким образом, чтобы  $\vec{e}_i \in \xi$ , а  $\vec{e}_3$  ортогонален  $\xi$  и  $|\vec{e}_3| = 1$ . Тогда уравнения перемещения этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^A \vec{e}_A; \\ d\vec{e}_A &= \omega_A^B \vec{e}_B, \end{aligned} \quad (2.94)$$

где  $A, B = 1, 2, 3$ .

Основная система уравнений, определяющая распределение  $\Delta^2$ , запишется в виде:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij} \omega^j + \Lambda_i \omega^3, \quad (2.95)$$

где величины  $\Lambda_{ij}$  образуют относительный тензор – основной тензор распределения  $\Delta^2$ , а величины  $\Lambda_i$  являются ковектором данного распределения.

Асимптотические направления на этом распределении определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0; \\ \Lambda_{ij} \omega^i \omega^j &= 0, \end{aligned} \quad (2.96)$$

Ввиду этого плоское распределение определяется условием

$$\Lambda_{(ij)} = 0, \quad (2.97)$$

которое обозначает косую симметрию его основного тензора:  $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$ .

Для упрощения дальнейших вычислений, канонизируем репер  $\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$  таким образом, что  $\Lambda_1 = 0$ , а  $\Lambda_2 \neq 0$ . Это можно сделать следующим образом: вектор  $\vec{\omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$  — вектор Дарбу или вектор инфинитезимального вращения репера  $R_x = \{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  для выбранного перемещения  $d\vec{x}$ , а вектор  $\vec{\theta} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$  — проекция вектора  $\vec{\omega}$  на плоскость, ортогональную к  $\vec{e}_3$ ; если  $\vec{\theta}_0 = p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2$  есть вектор  $\vec{\theta}$  для перемещения вдоль вектора  $\vec{e}_3$ , то выбирая вектор  $\vec{e}_1$  в плоскости  $(\vec{e}_3, \vec{\theta}_0)$  получим  $q_3 = \Lambda_1 = 0$ . Тогда уравнения (2.95) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 &= \Lambda_{12}\omega^2; \\ \omega_2^3 &= \Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3.\end{aligned}\tag{2.98}$$

Продифференцируем уравнения (2.98) внешним образом, используя уравнения структуры евклидова пространства:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 &= d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 &= d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + \Lambda_{21}(\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1) + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + \Lambda_2(\omega^1 \wedge \\ &\wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3).\end{aligned}$$

С учетом (2.98) последние равенства примут вид:

$$\begin{aligned}d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}^2\omega^3 \wedge \omega^1 - \Lambda_2\omega_1^2 \wedge \omega^3 &= 0; \\ d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 - \Lambda_{21}^2\omega^3 \wedge \omega^2 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + (\Lambda_2)^2\omega^2 \wedge \omega^3 &= 0.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 - \Lambda_{12}^2\omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_2\omega_1^2 \wedge \omega^3 &= 0. \\ d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + \Lambda_{21}^2\omega^2 \wedge \omega^3 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + 2\Lambda_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_2^2\omega^2 \wedge \omega^3 &= 0.\end{aligned}$$

С учетом ранее принятых обозначений  $r = \omega_1^2 = r_A\omega^4$ , получим:

$$\begin{aligned}d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + (\Lambda_{21}^2 + \Lambda_2^2)\omega^2 \wedge \omega^3 + 2\Lambda_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 &= 0; \\ d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 - \Lambda_2r_2\omega^2 \wedge \omega^3 - (\Lambda_{12}^2 + \Lambda_2r_1)\omega^1 \wedge \omega^3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.99}$$

Также напомним следующие обозначения для ортонормированного репера:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= 0, \quad \omega_2^3 = -\omega_3^2 = p; \\ \omega_2^2 &= 0, \quad \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q; \\ \omega_3^3 &= 0, \quad \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r.\end{aligned}\tag{2.100}$$

Тогда уравнения структуры евклидова пространства  $E^3$ , примут вид:

$$\begin{aligned}D\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = r \wedge \omega^2 - q \wedge \omega^3; \\ D\omega_2^3 &= Dp = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = r \wedge q; \\ D\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 = p \wedge \omega^3 - r \wedge \omega^1; \\ D\omega_3^1 &= Dq = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = p \wedge r; \\ D\omega^3 &= \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = q \wedge \omega^1 - p \wedge \omega^2; \\ D\omega_1^2 &= Dr = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = q \wedge p.\end{aligned}\tag{2.101}$$

Также предположим, что  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ , а также принимая формы  $\omega^1$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^3$  за базисные, положим:

$$p = p_A \omega^A, \quad q = q_A \omega^A, \quad r = r_A \omega^A.$$

С учетом (2.98), запишем:

$$\begin{aligned} p_1 &= \Lambda_{21}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \Lambda_2; \\ q_1 &= 0, \quad q_2 = p_1 = \Lambda_{21}, \quad q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Пусть  $d_1 \vec{x}$  и  $d_2 \vec{x}$  — произвольные перемещения, ортогональные вектору  $\vec{e}_3$ . Отношение объемов параллелепипедов, построенных на тройке векторов  $\vec{e}_3$ ,  $\vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_3$ ,  $\vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_3$  и на тройке  $\vec{e}_3$ ,  $d_1 \vec{x}$ ,  $d_2 \vec{x}$  назовем полной кривизной поля  $\vec{e}_3$  в выбранной точке. Полную кривизну будем обозначать  $K_t$ . Тогда

$$\begin{aligned} K_t &= \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_3)}{e_3 d_1 \vec{x} \wedge d_2 \vec{x}} = \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + \omega_3^1 \vec{e}_1) \wedge (\vec{e}_3 + \omega_3^2 \vec{e}_2)}{e_3(\omega^1 \vec{e}_1) \wedge (\omega^2 \vec{e}_2)} = \\ &= \frac{\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2} = \frac{\omega_3^1 \wedge \omega_3^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{p \wedge q}{\omega^1 \wedge \omega^2}. \end{aligned}$$

при  $\omega^3 = 0$ . Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$K_t = \frac{(p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2) \wedge (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2)}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{(p_1 q_2 - p_2 q_1) \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

С учетом (2.102) последнее равенство примет вид:

$$K_t = \Lambda_{21} \cdot (-\Lambda_{12}) = \Lambda_{21}^2 \neq 0. \quad (2.103)$$

Продифференцируем равенства (2.95) внешним образом, используя, при этом уравнения структуры евклидова пространства; получим:

$$(\nabla \Lambda_{ij} - \Lambda_i \omega_j^3) \wedge \omega^j + (\nabla \Lambda_i - \Lambda_{ij} \omega_j^3) \wedge \omega^3 = 0, \quad (2.104)$$

где  $\nabla \Lambda_{ij} = d \Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega_j^k - \Lambda_{kj} \omega_i^k$ ,  $\nabla \Lambda_i = d \Lambda_i - \Lambda_{ij} \omega_j^3$ .

Применяя к равенствам (2.104) лемму Картана, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{ij} - \Lambda_i \omega_j^3 &= \mu_{ijk} \omega^k + \mu_{ij} \omega^3; \\ \nabla \Lambda_i - \Lambda_{ij} \omega_j^3 &= \mu_{ij} \omega^j + \mu_i \omega^3, \end{aligned} \quad (2.105)$$

где  $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$ .

Последние равенства перепишем более подробно:

$$d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}\omega_j^k - \Lambda_{kj}\omega_i^k - \Lambda_i\omega_j^3 = \mu_{ijk}\omega^k + \mu_{ij}\omega^3;$$

$$d\Lambda_i - \Lambda_j\omega_i^j - \Lambda_{ij}\omega_j^i = \mu_{ij}\omega^j + \mu_i\omega^3.$$

Или, расписывая по всем индексам, получим:

$$d\Lambda_{12} = \mu_{12k}\omega^k + \mu_{12}\omega^3;$$

$$d\Lambda_{21} - \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 = \mu_{21k}\omega^k + \mu_{21}\omega^3;$$

$$-\Lambda_{12}\omega_1^2 - \Lambda_{21}\omega_1^2 = \mu_{11k}\omega^k + \mu_{11}\omega^3;$$

$$-\Lambda_{21}\omega_2^1 - \Lambda_{12}\omega_2^1 - \Lambda_2\Lambda_{21}\omega^1 - \Lambda_2^2\omega^3 = \mu_{22k}\omega^k + \mu_{22}\omega^3;$$

$$-\Lambda_2\omega_1^2 - \Lambda_{12}\omega_3^2 = \mu_{1j}\omega^j + \mu_1\omega^3;$$

$$d\Lambda_2 - \Lambda_{21}\omega_3^1 = \mu_{2j}\omega^j + \mu_2\omega^3.$$

Складывая первые два равенства, получим:

$$d(\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) - \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 = (\mu_{12k} + \mu_{21k})\omega^k + (\mu_{12} + \mu_{21})\omega^3$$

$$\text{или } -\Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 = (\mu_{121} + \mu_{211})\omega^1 + (\mu_{122} + \mu_{212})\omega^2 + (\mu_{12} + \mu_{21})\omega^3.$$

Отсюда имеем:

$$\mu_{121} = -\mu_{211}, \mu_{122} + \mu_{212} = -\Lambda_2\Lambda_{12}, \mu_{12} = -\mu_{21}; \quad (2.106)$$

$$\mu_{111} = \mu_{112} = \mu_{11} = 0.$$

Далее, из четвертого уравнения приведенной выше системы, получим:

$$-\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^1 - \Lambda_2^2\omega^3 = \mu_{221}\omega^1 + \mu_{222}\omega^2 + \mu_{22}\omega^3.$$

Из последнего запишем:

$$\mu_{221} = -\Lambda_2\Lambda_{21}, \mu_{222} = 0, \mu_{22} = -\Lambda_2^2. \quad (2.107)$$

Пятое уравнение системы примет вид:

$$-\Lambda_2\omega_1^2 + \Lambda_{12}\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_{12}\Lambda_2\omega^3 = \mu_{11}\omega^1 + \mu_{12}\omega^2 + \mu_1\omega^3.$$

Отсюда найдем выражение для формы  $\omega_1^2$ :

$$\omega_1^2 = -\frac{\Lambda_2^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3. \quad (2.108)$$

И, наконец, последнее уравнение системы перепишем в виде:

$$d\Lambda_2 + \Lambda_{21}\Lambda_{12}\omega^2 = \mu_{21}\omega^1 + \mu_{22}\omega^2 + \mu_2\omega^3.$$

Из второго уравнения системы найдем:

$$d\Lambda_{21} = \mu_{211}\omega^1 + (\Lambda_2\Lambda_{12} + \mu_{212})\omega^2 + \mu_{21}\omega^3.$$

Так как согласно равенствам (2.106)  $\mu_{211} = -\mu_{121} = -\mu_{112} = 0$  и  $\mu_{212} = \mu_{221} =$

$$-\Lambda_2\Lambda_{21}, \text{ то } d\Lambda_{21} = -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3,$$

а

$$d\Lambda_2 = \mu_{21}\omega^1 + (\mu_{22} + \Lambda_{21}^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3.$$

Согласно (2.107)  $\mu_{22} = -\Lambda_2^2$ . Тогда, окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{21} &= -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3; \\ d\Lambda_2 &= \mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Продифференцируем уравнения (6.109) внешним образом:

$$\begin{aligned} 0 &= -2(d\Lambda_2 \cdot \Lambda_{21} + \Lambda_2 d\Lambda_{21}) \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\Lambda_{21}(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + d\mu_{21} \wedge \\ &\quad \wedge \omega^3 + \mu_{21}(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3); \\ 0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21}(\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1) + (2\Lambda_{21}d\Lambda_{21} - 2\Lambda_2d\Lambda_2) \wedge \omega^2 + \\ &\quad + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \mu_2(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3); \\ 0 &= -2((\mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3)\Lambda_{21} + \Lambda_2(-2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3)) \wedge \omega^2 - \\ &\quad - 2\Lambda_2\Lambda_{21}(\omega^1 \wedge (-\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3) - \omega^3 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \\ &\quad + \Lambda_2\omega^3)) + d\mu_{21} \wedge \omega^3 + \mu_{21}(\omega^1 \wedge (\Lambda_{12}\omega^2) + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)). \end{aligned}$$

Последнее перепишем:

$$\begin{aligned} 0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21}[\omega^2 \wedge (\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 + \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12})\omega^3) - \omega^3 \wedge \\ &\quad \wedge (\Lambda_{12}\omega^2)] + [2\Lambda_{21}(-2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3) - 2\Lambda_2(\mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \\ &\quad + \mu_2\omega^3) \wedge \omega^2 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)[\omega^1 \wedge (-\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3) - \\ &\quad - \omega^3 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)] + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \mu_2(\omega^1 \wedge (\Lambda_{12}\omega^2) + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \\ &\quad + \Lambda_2\omega^3)); \\ 0 &= -2(\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_2\Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^2 + \Lambda_2\mu_{21}\omega^3 \wedge \omega^2) - 2\Lambda_2\Lambda_{21}[-\frac{\mu_{12}}{\Lambda_2} \cdot \\ &\quad \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^1] + d\mu_{21} \wedge \omega^3 + \mu_{21}[\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \\ &\quad + \Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^1 + \Lambda_2\omega^2 \wedge \omega^3]. \end{aligned}$$

Выполняя вполне обычные преобразования, запишем:



$$\begin{aligned}
0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21} \left[ \frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2} \omega^2 \wedge \omega^1 + \left( \frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12} \right) \omega^2 \wedge \omega^3 - \Lambda_{12} \omega^3 \wedge \omega^2 \right] + \\
&+ [2\Lambda_{21}\mu_{21}\omega^3 \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\mu_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\mu_2\omega^3 \wedge \omega^2 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) \cdot \\
&\cdot \left( -\frac{\mu_{12}}{\Lambda_2} \omega^1 \wedge \omega^2 + \left( \Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2} \right) \omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^1 \right) + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \\
&+ \mu_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_2\Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^1 + \mu_2\Lambda_2\omega^2 \wedge \omega^3]; \\
0 &= (-2\mu_{21}\Lambda_{21} + 2\Lambda_{21}\mu_{12} + \mu_{21}\Lambda_{12} - \mu_{21}\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 2\Lambda_2\mu_{21} - \\
&- \mu_{21}\Lambda_2)\omega^3 \wedge \omega^2 + (-2\Lambda_2\Lambda_{21}(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}) - 2\Lambda_2\Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_{21} \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

После приведения подобных членов будем иметь:

$$\begin{aligned}
0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \left( -\mu_{21} \frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2} - 2\Lambda_2\mu_{21} - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2} (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) + \mu_2\Lambda_{12} - \right. \\
&- \mu_2\Lambda_{21} ) \omega^1 \wedge \omega^2 + \left( \mu_{21} \left( \frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12} \right) + \mu_{21}\Lambda_{12} - 2\Lambda_{21}\mu_{21} + 2\Lambda_2\mu_2 + \mu_2\Lambda_2 \right) \cdot \\
&\cdot \omega^2 \wedge \omega^3 + \left( (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2} + \Lambda_{21}) \right) \omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3; \\
0 &= (-4\mu_{21}\Lambda_{21} + 2\Lambda_{21}\mu_{12})\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 3\Lambda_2\mu_{21})\omega^3 \wedge \omega^2 + (2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + \\
&+ 2\Lambda_{21}\mu_1 - 2\Lambda_2\Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_{21} \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

В конце получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
0 &= -6\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 3\Lambda_2\mu_{21})\omega^3 \wedge \omega^2 + (2\Lambda_{21}\mu_1)\omega^1 \wedge \omega^3 + \\
&+ d\mu_{21} \wedge \omega^3; \\
0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + (-3\Lambda_2\mu_{21} - 2\mu_2\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + \left( \mu_{21} \left( \frac{\mu_1}{\Lambda_2} - 2\Lambda_{21} \right) + 3\Lambda_2\mu_2 \right) \cdot \\
&\cdot \omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\mu_1}{\Lambda_2} (\Lambda_2^2 - \Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3;
\end{aligned}$$

Умножим внешним образом первое уравнение этой системы на  $\omega^3$ , получим:

$$\begin{aligned}
0 &= -6\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3; \\
\mu_{21}\Lambda_{21} &= 0.
\end{aligned}$$

Так как  $\Lambda_{21} \neq 0$ , то  $\mu_{21} = 0$ . Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$0 = -2\mu_2\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + 3\Lambda_2\mu_2\omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\mu_1}{\Lambda_2}(\Lambda_2^2 - \Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3.$$

Также умножим внешним образом последнее уравнение на  $\omega^3$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\mu_2\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3; \\ \mu_2\Lambda_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Так как  $\Lambda_{21} \neq 0$ , то  $\mu_2 = 0$ .

С учетом последних равенств, соотношения (2.109) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{21} &= -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2; \\ d\Lambda_2 &= (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Также ввиду того, что  $\mu_{11} = \mu_{12} = 0$ , то равенство (2.108) примет вид:

$$\omega_1^2 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3$$

или

$$r_1\omega^1 + r_2\omega^2 + r_3\omega^3 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3.$$

Из последнего равенства имеем:

$$r_1 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}.$$

Далее покажем, что  $\mu_1 = 0$ . Для этого продифференцируем внешним образом равенство:

$$-\Lambda_2\omega_1^2 - \Lambda_{12}\omega_3^2 = \mu_{1j}\omega^j + \mu_1\omega^3,$$

предварительно упростив его:

$$-\Lambda_2\omega_1^2 - \Lambda_{12}\omega_3^2 = \mu_1\omega^3$$

или

$$\Lambda_{12}\omega_2^3 - \Lambda_2\omega_1^2 = \mu_1\omega^3.$$

$$\begin{aligned} d\Lambda_{12} \wedge \omega_2^3 + \Lambda_{12}\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 - d\Lambda_2 \wedge \omega_1^2 - \Lambda_2\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 &= d\mu_1 \wedge \omega^3 + \\ + \mu_1(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3). \end{aligned}$$

С учетом (2.110) последнее равенство переписывается:

$$\begin{aligned}
& 2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3) + \Lambda_{12}\left(\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + \left(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12}\right)\omega^3\right) \wedge \Lambda_{12}\omega^2 - \\
& -(\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 \wedge \left(-\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + \left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\right)\omega^3\right) + \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3) = \\
& = d\mu_1 \wedge \omega^3 + \mu_1(\omega^1 \wedge \Lambda_{12}\omega^2 + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned}
& 2\Lambda_2\Lambda_{21}^2\omega^2 \wedge \omega^1 + 2\Lambda_2^2\Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}^2\left(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12}\right)\omega^3 \wedge \omega^2 + \\
& + \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}(\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 \wedge \omega^1 - (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\right)\omega^2 \wedge \omega^3 - \Lambda_2\Lambda_{21}^2\omega^2 \wedge \omega^1 + \\
& + \Lambda_2^2\Lambda_{12}\omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3 + \mu_1\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_1\Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^1 + \mu_1\Lambda_2\omega^2 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

После приведения подобных членов, будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \left(-2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2} - \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}(\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) + \Lambda_2\Lambda_{21}^2 - \mu_1\Lambda_{12} + \mu_1\Lambda_{21}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 + \\
& + \left(2\Lambda_2^2\Lambda_{21} - \Lambda_{12}^2\left(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12}\right) - (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\right) + \Lambda_2^2\Lambda_{12} - \right. \\
& \left. - \mu_1\Lambda_2\right)\omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

Перепишав последнее равенство в виде:

$$\begin{aligned}
& \left(-2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2} - \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2} + \Lambda_{21}^2\Lambda_2 + \Lambda_2\Lambda_{21}^2 + 2\mu_1\Lambda_{21}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 + \left(2\Lambda_2^2\Lambda_{21} - \right. \\
& \left. - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\Lambda_{12}^2 + \Lambda_{12}^3 - \Lambda_{12}^3 + \Lambda_2^2\Lambda_{12} + \Lambda_{21}^2\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_2^2\frac{\mu_1}{\Lambda_2} + \Lambda_2^2\Lambda_{12} - \mu_1\Lambda_2\right)\omega^2 \wedge \omega^3 = \\
& = d\mu_1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

Окончательно будем иметь:

$$2\mu_1\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\Lambda_2\mu_1)\omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3.$$

После умножения последнего равенства внешним образом на  $\omega^3$ , получим:

$$2\mu_1\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0;$$

$$\mu_1\Lambda_{21} = 0.$$

Так как  $\Lambda_{21} \neq 0$ , то

$$\mu_1 = 0. \tag{2.111}$$

Тогда

$$r_1 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}, r_2 = 0, r_3 = \Lambda_{12}. \quad (2.112)$$

Пусть  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки  $x$ . Так как вектор  $\vec{e}_3$  — касательный вектор к линиям тока, то можем взять  $\vec{e}_3 = \dot{\vec{r}}$ . Тогда  $\ddot{\vec{r}} = d\vec{e}_3 = \omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 = -\omega_1^3 \vec{e}_1 - \omega_2^3 \vec{e}_2 = -(\Lambda_{12} \omega^2) \vec{e}_1 - (\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3) \vec{e}_2$ . Исходя из этого, найдем векторное произведение векторов  $\dot{\vec{r}}$  и  $\ddot{\vec{r}}$ , при этом воспользуемся принятым при таком вычислении понятием «как бы определителя»:

$$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \Lambda_{21} \omega^2 & -(\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3) & 0 \end{vmatrix} = (\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3) \vec{e}_1 + (\Lambda_{21} \omega^2) \vec{e}_2.$$

Отсюда

$$|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]| = \sqrt{(\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3)^2 + (\Lambda_{21} \omega^2)^2}. \quad (2.113)$$

Так как рассматриваются интегральные линии векторного поля  $\vec{e}_3$ , то можно положить  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ . Тогда (2.113) примет вид:

$$|[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]| = \Lambda_2 \omega^3$$

и

$$k = \left| \frac{d\vec{e}_3}{ds} \right| = \left| \frac{-\Lambda_2 \omega^3 \vec{e}_2}{ds} \right| = |\Lambda_2| \pmod{\omega^i = 0}. \quad (2.114)$$

Согласно второму равенству из (2.110) при  $\omega^i = 0$ , имеем:

$$d\Lambda_2 = 0,$$

то для интегральных линий векторного поля  $\vec{e}_3$  получим:

$$\Lambda_2 = \text{const}.$$

Согласно формуле (2.114), где  $k$  — кривизна интегральных линий векторного поля  $\vec{e}_3$ , можно заключить, что  $k$  также постоянно.

Положим  $\vec{\tau}$  — касательный вектор к линиям тока, то есть  $\vec{\tau} = \vec{e}_3$ . Тогда  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{e}_3}{ds} = \frac{\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2}{ds} = -\frac{\omega_1^3 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_2}{ds} = -\frac{\Lambda_2 \omega^3 \vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_2 \vec{e}_2 \pmod{\omega^i = 0}$ .

С другой стороны, согласно формулам Френе:  $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{v}$ , то есть  $k = -\Lambda_2$ , а

$\vec{v} = \vec{e}_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{ds} &= \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{\omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3}{ds} = \frac{-\Lambda_{12} \omega^3 \vec{e}_1 + \Lambda_2 \omega^3 \vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{12} \vec{e}_1 + \Lambda_2 \vec{e}_3 = \\ &= \Lambda_2 \vec{\tau} - \Lambda_{12} \vec{e}_1. \end{aligned}$$

С другой стороны:  $\frac{d\vec{v}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta}$ . Сравнивая последние две формулы, запишем:

$$k = -\Lambda_2, \quad \chi = -\Lambda_{12} = \Lambda_{21}, \quad \vec{\beta} = \vec{e}_1.$$

Тогда с учетом первого равенства из (2.110), можно записать:

$$d\Lambda_{21} = 0 \pmod{\omega^i = 0}. \quad (2.115)$$

Тем самым,  $d\chi = 0$  и  $\chi = const$ . На основании последних рассуждений, получаем, что кривизна и кручение интегральной линии векторного поля  $\vec{e}_3$  или линии тока вектора скорости жидкости имеют постоянную кривизну и кручение. Справедлива

**Теорема 2.7.** *Интегральные линии векторного поля, нормального к плоскому распределению, являются винтовыми линиями.*

Следует отметить, что эти винтовые линии лежат на цилиндре. Таким образом, частицы жидкости движутся по винтовым линиям, лежащих на цилиндрах, образующие которых параллельны оси рассматриваемого участка сосуда.

**Замечание.** *Теорему 2.7 можно сформулировать в данном случае следующим образом: нормальная конгруэнция линий к плоскому распределению, состоит из винтовых линий.*

Как видно из формулы (2.103), полная кривизна векторного поля  $\vec{e}_3$ , являющегося нормалью к плоскому распределению, также постоянна.

Справедлива

**Теорема 2.8.** *Полная кривизна векторного поля, являющегося нормалью к плоскому распределению, постоянна.*

**Следствие.** *Полная кривизна векторного поля, интегральные линии которого являются винтовыми линиями, постоянна.*

Так как вектор скорости жидкости имеет направление вектора  $\vec{e}_3$ , то из формулы (2.31) будем иметь:

$$\begin{aligned}
-rot \bar{e}_3 d\tau &= \bar{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-p)) + \bar{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge q) + \bar{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge q + \\
&+ \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-p)) = -p_3 \bar{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + q_3 \bar{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) + \bar{e}_3 \cdot \\
&\cdot (q_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - p_1 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1) = -p_3 \bar{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) - q_3 \bar{e}_2 \cdot \\
&\cdot (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + (q_2 + p_1) \bar{e}_3(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3).
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$rot \bar{e}_3 = p_3 \bar{e}_1 + q_3 \bar{e}_2 - (q_2 + p_1) \bar{e}_3.$$

Векторное поле  $\bar{e}_1$  будет голономным тогда и только тогда, когда  $(\bar{e}_1, rot \bar{e}_1) = p_3 = 0$ . Но  $p_3 = \Lambda_2 \neq 0$ . Значит, векторное поле  $\bar{e}_1$  не голономное.

Векторное поле  $\bar{e}_2$  будет голономным тогда и только тогда, когда  $(\bar{e}_2, rot \bar{e}_2) = q_3 = 0$ . Но  $q_3 = \Lambda_1 = 0$ . Тем самым, векторное поле  $\bar{e}_2$  является голономным.

Векторное поле  $\bar{e}_3$  будет голономным тогда и только тогда, когда  $(\bar{e}_3, rot \bar{e}_3) = -(q_2 + p_1) = 0$ . Согласно формулам (2.102) будем иметь:  $\Lambda_{21} - \Lambda_{12} = 0$ . Как следует из последнего равенства, распределение  $\Delta^2$  будет вполне интегрируемым, а, в данном случае, рассматривается плоское распределение. Значит, векторное поле  $\bar{e}_3$  не будет голономным.

Получаем, что векторное поле  $\bar{e}_2$  ортогонально цилиндрам, на которых лежат интегральные линии векторного поля  $\bar{e}_3$ , представляющие собой винтовые линии. В этом случае данные соосные цилиндры определяются уравнением:

$$\omega^2 = 0.$$

Рассмотрим обратную задачу, то есть интегральные линии векторного поля  $\bar{e}_3$  являются винтовыми линиями, которые лежат на соосных цилиндрах. Так как полная кривизна векторного поля  $\bar{e}_3$   $K_l$  не равна нулю, то оно не допускает семейства ортогональных поверхностей и линии кривизны такого поля будут мнимыми.

Далее приведем довольно-таки понятные рассуждения, которые понадобятся несколько позднее. Запишем уравнение для координат точек одной из винтовых линий:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = b\varphi, \quad (2.116)$$

где  $b = b(\rho^2)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Касательным вектором к винтовой линии является вектор  $\vec{e}_3$ , но винтовая линия имеет уравнения вида (2.116) в прямоугольной системе координат  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  с началом в точке  $O$ , лежащей на оси всех цилиндров. Такой вид уравнения используется для более наглядного изложения дальнейшего материала.

Касательный вектор к винтовой линии, заданной уравнением (2.116) имеет координаты:

$$\vec{A}(x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = \vec{A}(-y, x, b).$$

Тогда единичный вектор этого поля  $\vec{a}$  будет иметь следующие координаты:

$$\vec{a}\left(\frac{-y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}\right).$$

Средняя кривизна векторного поля  $\vec{a}$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2H = -\operatorname{div}\vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} = \frac{-y \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}{\rho^2 + b^2} + \\ &+ \frac{x \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}{\rho^2 + b^2} = \frac{-\frac{1}{2}y(\rho^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}2x + \frac{1}{2}x(\rho^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}2y}{\rho^2 + b^2} = \\ &= \frac{-xy + xy}{\sqrt{(\rho^2 + b^2)^3}} = 0. \end{aligned}$$

К аналогичному результату приводят вычисления с использованием формулы (2.28) и следующей за ней формулы для ортонормированного репера.

Для вычисления полной кривизны  $K$  векторного поля  $\vec{a}$  поступим следующим образом. Выразим  $K$  с помощью компонент вектора  $\vec{A}$ , кол-

линейного  $\vec{a}$ :  $\vec{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \lambda \vec{a}$ , где  $\lambda = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}$ . Рас-

смотрим вектор:

$$\vec{P}\{(\vec{a}_y, \vec{a}_z, \vec{a}), (\vec{a}_z, \vec{a}_x, \vec{a}), (\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a})\},$$

где круглыми скобками обозначены смешанные произведения соответствующих векторов.



*Худший вид высокомерия — чванство своими знаниями и званиями. В какой-то мере это прощительно тем, кто рисковал жизнью, путешествуя по всему свету в поисках истины, галапагосских реликтовых черепах или останков синантропа (Они же, как правило, самые скромные). А как быть с теми многими, которые всю жизнь путешествовали только в ближнюю столицу с письмами-отношениями в главк, министерство, издательство, а если повезет, то и в Академию наук.*



Имеем  $K = (\bar{P}, \bar{a})$ . Тогда

$$P = \lambda^{-3} \{(\bar{A}_y \bar{A}_z \bar{A}), (\bar{A}_z \bar{A}_x \bar{A}), (\bar{A}_x \bar{A}_y \bar{A})\}.$$

Так как  $\bar{A}(-y, x, b)$ , то

$$\begin{aligned} A_{1x} &= 0 & A_{2x} &= 1 & A_{3x} &= b \cdot 2x; \\ A_{1y} &= -1 & A_{2y} &= 0 & A_{3y} &= b \cdot 2y; \\ A_{1z} &= 0 & A_{2z} &= 0 & A_{3z} &= 0. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} K &= \lambda^{-4} \{(\bar{A}_y \bar{A}_z \bar{A})A_1 + (\bar{A}_z \bar{A}_x \bar{A})A_2 + (\bar{A}_x \bar{A}_y \bar{A})A_3\} = \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} A_{1x} & A_{1y} & A_{1z} & A_1 \\ A_{2x} & A_{2y} & A_{2z} & A_2 \\ A_{3x} & A_{3y} & A_{3z} & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0 \end{vmatrix}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.117)$$

С учетом предыдущих равенств, формула (2.117) примет вид:

$$K = - \frac{1}{(\rho^2 + b^2)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -y \\ 1 & 0 & 0 & x \\ b \cdot 2x & b \cdot 2y & 0 & b \\ -y & x & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b(2\rho^2 b - b)}{(\rho^2 + b^2)^2}.$$

Далее, вычислим величину неголономности поля  $\bar{A}$ :

$$\begin{aligned} (\bar{A}, \text{rot} \bar{A}) &= (\bar{A}, \vec{i}(A_{3y} - A_{2z}) + \vec{j}(A_{1z} - A_{3x}) + \vec{k}(A_{2x} - A_{1y})) = \\ &= (\bar{A}, b \cdot 2y \vec{i} - b \cdot 2x \vec{j} + 2\vec{k}) = -2b \cdot y^2 - 2b \cdot x^2 + 2b = 2b - 2b \cdot \rho^2. \end{aligned}$$

Найдем  $\text{rot} \bar{a}$ :

$$\text{rot} \bar{a} = \text{rot} \left( \frac{\bar{A}}{\lambda} \right) = \frac{2b \cdot y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{i} - \frac{2b \cdot x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{k}.$$

Тогда

$$(\bar{a}, \text{rot} \bar{a}) = \frac{2(b - b \cdot \rho^2)}{\rho^2 + b^2}. \quad (2.118)$$

Направление  $d\bar{x}$ , ортогональное полю  $\bar{a}$ , будет асимптотическим, если нормальная кривизна этого поля в направлении  $d\bar{x}$  равна нулю. Нор-

мальную кривизну поля  $\vec{a}$  определим как отношение  $(d\vec{a}, d\vec{x})$  к  $(d\vec{x})^2$ . Тем самым, асимптотическое направление  $d\vec{x}$  ортогонально  $d\vec{a}$ , а также  $d\vec{x}$  ортогонально  $\vec{a}$ . Отсюда получаем, что  $d\vec{x}$  коллинеарно направлению  $[\vec{a}, d\vec{a}]$  и асимптотическое направление определяется из векторного уравнения

$$[\vec{a}, d\vec{a}] = \mu d\vec{x},$$

где  $\mu \in R$ .

Уравнения для определения асимптотических линий в координатном виде имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2 &= \mu dx; \\ \xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3 &= \mu dy; \\ \xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 &= \mu dz,\end{aligned}$$

где положено, что  $\vec{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Координаты вектора  $\vec{a}$  выразим через  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\xi_1 = \frac{-\rho \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \xi_2 = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \xi_3 = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}.$$

С учетом последних равенств, уравнения асимптотических линий переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}(\rho \cos \varphi db - b d(\rho \cos \varphi)) &= (\rho^2 + b^2) \mu d(\rho \cos \varphi); \\ (\rho \sin \varphi db - b d(\rho \sin \varphi)) &= (\rho^2 + b^2) \mu d(\rho \sin \varphi); \\ \rho^2 d\varphi &= (\rho^2 + b^2) \mu dz.\end{aligned} \quad (2.119)$$

Для нахождения условия существования асимптотических направлений, используем такую систему координат, что в точке  $M_0$  будем иметь  $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1$ . Отсюда получаем, что в точке  $M_0$  система уравнений для определения асимптотического направления имеет вид:

$$\begin{aligned}-(\xi_{2x} + \mu) dx - \xi_{2y} dy &= 0; \\ \xi_{1x} dx + (\xi_{1y} - \mu) dy &= 0; \\ dz &= 0.\end{aligned}$$

Последняя система будет иметь решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} -(\xi_{2x} + \mu) & -\xi_{2y} \\ \xi_{1x} & \xi_{1y} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, коэффициент  $\mu$  определяется из квадратного уравнения:

$$\mu^2 - (\xi_{1y} - \xi_{2x})\mu + (\xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x}) = 0.$$

По аналогии получим:

$$(\vec{a}, \text{rot}\vec{a}) = \xi_{2x} - \xi_{1y}, \quad K = \xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x}.$$

Тогда уравнение для определения  $\mu$  примет вид:

$$\mu^2 + (\vec{a}, \text{rot}\vec{a})\mu + K = 0.$$

Корни последнего уравнения будут находиться следующим образом:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\vec{a}, \text{rot}\vec{a}) \pm \sqrt{(\vec{a}, \text{rot}\vec{a})^2 - 4K}}{2}. \quad (2.120)$$

Введем обозначение:  $-4K_1 = (\vec{a}, \text{rot}\vec{a})^2 - 4K$ . Тогда асимптотическое направление существует тогда и только тогда, когда  $K_1 \leq 0$ . При этом  $K_1$  назовем полной кривизной первого рода.

Отсюда можно сделать вывод: существуют два асимптотических направления, ортогональные векторному полю  $\vec{a}$ , если  $K_1 < 0$ . В случае  $K_1 = 0$  существует либо одно асимптотическое направление, либо все направления, ортогональные вектору  $\vec{a}$ , асимптотические.

Подкоренное выражение в (2.120) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \text{rot}\vec{a})^2 - 4K &= \frac{4(b - b^1 \rho^2)^2}{(\rho^2 + b^2)^2} + 4 \frac{b(2\rho^2 b^1 - b)}{(\rho^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{4b^2 - 8b^1 b \rho^2 + 4b^1 \rho^4 + 8b^1 b \rho^2 - 4b^2}{(\rho^2 + b^2)^2} = \frac{4b^1 \rho^4}{(\rho^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $\mu$  может принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2(b^1 \rho^2 - b)}{\rho^2 + b^2} - \frac{2b^1 \rho^2}{\rho^2 + b^2} \right) = \frac{b^1 \rho^2 - b - b^1 \rho^2}{\rho^2 + b^2} = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}; \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{2(b^1 \rho^2 - b)}{\rho^2 + b^2} + \frac{2b^1 \rho^2}{\rho^2 + b^2} \right) = \frac{b^1 \rho^2 - b + b^1 \rho^2}{\rho^2 + b^2} = \frac{2b^1 \rho^2 - b}{\rho^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $\mu = \mu_1 = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}$ . Тогда система (2.119) примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi db - bd(\rho \cos \varphi) &= -bd(\rho \cos \varphi); \\ \rho \sin \varphi db - bd(\rho \sin \varphi) &= -bd(\rho \sin \varphi); \\ \rho^2 d\varphi &= -bdz \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\rho \cos \varphi db &= 0; \\ \rho \sin \varphi db &= 0; \\ \rho^2 d\varphi &= -bdz.\end{aligned}\tag{2.121}$$

Из первых двух уравнений системы (2.121) получаем, что  $db = 0$ . С учетом (2.116), получаем:  $dz = b d\varphi$  и  $\rho^2 d\varphi = -b^2 d\varphi$ , то есть  $\rho = const$ . Поэтому эта асимптотическая лежит на цилиндре  $\rho = const$  и является винтовой линией. Семейство таких винтовых линий с заданным семейством винтовых линий образует на цилиндре регулярную ортогональную сеть.

Пусть теперь  $\mu = \mu_2 = \frac{2b \rho^2 - b}{\rho^2 + b^2}$ . Система (2.119) примет вид:

$$\begin{aligned}\rho \cos \varphi db - bd(\rho \cos \varphi) &= (2b \rho^2 - b)d(\rho \cos \varphi); \\ \rho \sin \varphi db - bd(\rho \sin \varphi) &= (2b \rho^2 - b)d(\rho \sin \varphi); \\ \rho^2 d\varphi &= (2b \rho^2 - b)dz.\end{aligned}$$

После приведения подобных, последняя система примет вид:

$$\begin{aligned}\rho \cos \varphi db &= 2b \rho^2 d(\rho \cos \varphi); \\ \rho \sin \varphi db &= 2b \rho^2 d(\rho \sin \varphi); \\ \rho^2 d\varphi &= (2b \rho^2 - b)dz.\end{aligned}\tag{2.122}$$

Из первого и второго уравнений системы (2.122), получим:

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d(\rho \cos \varphi)} db = 2b \rho^2 \quad \text{и} \quad \frac{\rho \sin \varphi}{d(\rho \sin \varphi)} db = 2b \rho^2.$$

Тогда имеем

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d(\rho \cos \varphi)} db = \frac{\rho \sin \varphi}{d(\rho \sin \varphi)} db.$$

Пусть  $b \neq 0$ , тогда

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi} = \frac{\rho \sin \varphi}{d \rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi}.$$

После преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned}d\rho \cdot \rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi &= d\rho \cdot \rho \cos \varphi \sin \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi d\varphi; \\ \rho^2 d\varphi &= 0; \\ d\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Из третьего уравнения системы (2.122) при  $K \neq 0$  получаем, что  $dz = 0$ .

Отсюда можно заключить, что асимптотические линии второго семейства — лучи, проведенные из оси цилиндров и параллельные плоскости  $OXY$ .

Последние свойства были получены в предположении, когда  $b \neq 0$ . Но нас больше интересует случай, когда  $b = 0$ . Тогда  $\mu_1 = \mu_2 = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}$  и первые два уравнения системы (2.119) выполняются тождественно. Третье уравнение этой системы принимает вид:  $\rho^2 d\varphi = -bdz$ . Это уравнение отражает тот факт, что асимптотическое направление ортогонально полю  $\vec{a}$ . Причем, любое направление, ортогональное полю  $\vec{a}$ , является асимптотическим, то есть распределение  $\Delta^2$ , ортогональное полю  $\vec{a}$ , является плоским.

Имеем винтовые линии, располагающиеся на соосных цилиндрах, которые бесконечное число раз обвиваются вокруг соответствующего цилиндра. При этом с каждым витком любая из винтовых линий поднимается на высоту  $2\pi b$ . Если  $b = \text{const}$ , то есть не зависит от  $\rho^2$ , то любое направление, ортогональное вектору, являющимся касательным к любой винтовой линии, будет асимптотическим. Это будет выполняться в любой точке, где расположено семейство винтовых линий. Тем самым, в данной области будет определено распределение, все направления которого являются асимптотическими. Заданное распределение является плоским. Справедлива

**Теорема 2.9.** *Распределение  $\Delta^2$  в евклидовом пространстве  $E^3$  является плоским тогда и только тогда, когда линии нормальной конгруэнции к нему будут винтовыми линиями, которые с каждым витком поднимаются на одну и ту же постоянную высоту.*

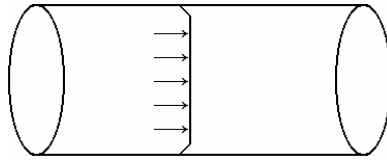
**Замечание.** Обратная теорема аналогична известному выводу, сделанному Ф. Клейном (см.<sup>37</sup>).

Голономность векторного поля, порожденного конформным отображением между областями в евклидовом пространстве  $E^3$ , рассматривается аналогичным образом<sup>37</sup>.

Используем приведенную выше теорию для изучения геометрии линий тока жидкости, когда последняя движется турбулентно и линии тока являются винтовыми линиями.

При ламинарном движении по сосуду распределение скоростей по сечению сосуда носит параболический профиль. В случае турбулентного те-

чения профиль распределения скоростей становится практически вертикальным. Это является следствием того факта, что жидкость движется не только параллельно оси сосуда, но и поперек сосуда. Ввиду этого средняя скорость движения оказывается почти постоянной по всему сечению сосуда и только в незначительном слое около стенок сосуда, благодаря прилипанию, скорость начинает уменьшаться. Профиль скоростей выглядит следующим образом:



В данном случае считаем, что скорость жидкости по абсолютной величине постоянна при данном турбулентном движении, при котором линии тока представляют собой винтовые линии, лежащие на цилиндрах, не зависят от радиуса цилиндра, по которому движется рассматриваемая частица жидкости или на котором расположена соответствующая винтовая линия.

В формулах (2.116) в качестве  $b$  возьмем модуль вектора скорости  $v$ . Тогда полная кривизна векторного поля скорости крови будет иметь вид:

$$K = \frac{-v(\rho^2 v^\perp - v)}{(\rho^2 + v^2)^2} = \frac{v^2}{(\rho^2 + v^2)^2}, \quad (2.123)$$

так как  $v^\perp = 0$  ввиду наложенного выше условия о постоянстве модуля скорости  $v$ .

Величина неголономности вектора скорости жидкости  $\vec{v}$  вычисляется следующим образом:

$$(\vec{v}, \text{rot} \vec{v}) = 2v.$$

Так как  $\vec{v} = v\vec{e}_3$ , то  $\text{rot} \vec{e}_3 = \frac{2v}{\sqrt{\rho^2 + v^2}} \vec{e}_3$ , а

$$(\vec{e}_3, \text{rot} \vec{e}_3) = \frac{2v}{\rho^2 + v^2}. \quad (2.124)$$

Ввиду того, что  $v \neq 0$  во всем рассматриваемом участке сосуда, то из формулы (2.124) следует, что поле вектора  $\vec{e}_3$  будет неголономным и для него не существует семейства поверхностей таких, что в каждой точке вектор поля направлен по нормали к поверхности семейства, проходящей через эту точку. Значит, данное векторное поле будет ортогонально распределению  $\Delta^2$ , которое не является голономным или вполне интегрируемым.

Направление смещения  $d\vec{x}$ , принадлежащее распределению  $\Delta^2$  и ортогональное векторному полю  $\vec{e}_3$ , будет асимптотическим, если нормальная кривизна этого поля в направлении  $d\vec{x}$  равна нулю. Отсюда следует, что асимптотическое направление определяется из векторного уравнения

$$[\vec{e}_3, d\vec{e}_3] = \mu d\vec{x},$$

где  $\mu \in R$ .

Аналогично тому, как это делалось выше, находится уравнение, из которого определяется  $\mu$ :

$$\mu^2 + (\vec{e}_3, \text{rote}_3)\mu + K = 0. \quad (2.125)$$

Корни уравнения (2.125) находятся следующим образом:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\vec{e}_3, \text{rote}_3) \pm \sqrt{(\vec{e}_3, \text{rote}_3)^2 - 4K}}{2}. \quad (2.126)$$

Из формул (2.124)-(2.126) легко видно, что  $(\vec{e}_3, \text{rote}_3)^2 - 4K = 0$ , то есть  $\mu_1 = \mu_2$ . Тогда, с учетом того, что  $[\vec{e}_3, d\vec{e}_3] = \mu d\vec{x}$ , любое направление, ортогональное полю  $\vec{e}_3$  и принадлежащее распределению  $\Delta^2$ , является асимптотическим, то есть распределение  $\Delta^2$  будет плоским.

Справедлива

**Теорема 2.10.** *Если турбулентное движение жидкости имеет в качестве линий тока винтовые линии, то данные винтовые линии ортогональны плоскому распределению, тем самым турбулентному движению в участке сосуда, линии тока которого представляют собой винтовые линии, соответствует плоское распределение и наоборот.*

**Замечание.** Теорему 2.10 можно сформулировать также следующим образом: турбулентному движению жидкости, линии тока которого являются винтовыми линиями, можно соотнести плоское распределение и рассматривать геометрию такого движения как геометрию нормальной конгруэнции линий к плоскому распределению.

Следует также отметить, что при более точном описании геометрии такого движения жидкости, последние рассуждения будут верны для всего диаметра сосуда, за исключением незначительного слоя, непосредственно примыкающего к стенке сосуда.

Учитывая теорему 2.7 и теорему 2.10, можно утверждать, что справедлива

**Теорема 2.11.** *Стационарное движение жидкости является турбулентным, линии тока которого являются винтовыми линиями тогда и*

*только тогда, когда вектор скорости ортогонален плоскому распределению.*

Изучение турбулентного движения жидкости, основывающееся на геометрии интегральных линий векторного поля скорости, можно проводить, основываясь не только на геометрии поверхностей, но и на геометрии распределений, а также на геометрии нормальной конгруэнции линий к распределению. В этом разделе было рассмотрено плоское распределение и соответствующий ему поток. Такой подход во многом позволяет облегчить задачу рассмотрения такого сложного движения, как турбулентное, которое имеет место в биосистемах, например, при выбросе крови из сердца, в местах разветвления сосудов, при патологических изменениях в сосудах, а также в тех случаях, когда число Рейнольдса по каким-либо причинам превышает критическое значение.

**Ламинарное движение жидкости в участке сосуда.** Рассмотрения ведутся в участке сосуда, то можно пренебречь кривизной пространства и использовать, при рассмотрении геометрии ламинарного движения, трехмерное евклидово пространство. Следует иметь в виду, что ламинарное движение присуще, в основном, жидкости по всему ее руслу, за исключением тех случаев, которые не раз перечислялись выше.

Мелкие сосуды, которые являются «каналами сопротивления», характеризуются, в основном, тем, что ток жидкости в них носит ламинарный характер. Гидродинамические особенности таких сосудов объясняются этим типом тока. С точки зрения геометрии такой вид движения жидкости менее интересен. Но здесь также можно ставить ряд задач и некоторые из них будут рассмотрены в этом разделе.

Еще Пуазейль показал, что при ламинарном движении частицы перемещаются с наибольшей скоростью в центральной части сосуда. При этом имеется в виду, что каждая частица движется параллельно оси сосуда с постоянной скоростью. Скорость частицы одинакова во всех точках, лежащих на одной и той же окружности, полученной при поперечном разрезе сосуда и имеющей некоторый радиус, который не больше радиуса сосуда. На основании этого можно движущуюся ламинарно по сосуду жидкость считать состоящей из цилиндрических слоев, на каждом из которых она имеет постоянную скорость, зависящую от радиуса слоя. При этом скорость меняется от слоя к слою, оставаясь на каждом слое постоянной.

Если рассмотреть сечение участка сосуда плоскостью, проходящей через ось сосуда, то зависимость скорости частицы жидкости от радиуса сосуда имеет следующий вид:



$$v = \frac{p}{4l\eta}(R^2 - r^2), \quad (2.127)$$

где  $p$  — давление,  $l$  — длина рассматриваемого участка сосуда,  $\eta$  — вязкость,  $R$  — радиус сосуда,  $r$  — радиус рассматриваемого цилиндра.

Уравнение (2.127) есть уравнение параболы. Тем самым, профиль скоростей при ламинарном движении представляет собой параболу. Так как  $v$  — есть расстояние, проходимое за единицу времени, то все частицы жидкости, лежащие в плоскости, ортогональной оси сосуда в некоторое начальное время, по истечению некоторого единичного времени будут лежать на поверхности параболоида. Объем данного параболоида равен объему жидкости  $Q$ , протекающей за единицу времени.

Выясним, что собой представляют цилиндрические слои и параболоид для ламинарного движения жидкости. Эти поверхности охарактеризуем с точки зрения геометрии данного вида движения жидкости.

Пусть  $\vec{F}$  — силы, включая и силу тяжести, действующие на жидкость и эти силы носят консервативный характер, то есть им можно поставить в соответствие потенциал  $U$  такой, что

$$\vec{F}d\vec{x} = -dU,$$

где  $d\vec{x}$  — перемещение рассматриваемой произвольной частицы крови.

Величина

$$H = \frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho} \quad (2.128)$$

представляет собой полную энергию частицы. Уравнения *Lamb*-Громеки запишем в виде:

$$\text{grad } H = 2 [\vec{v}, \vec{v}], \quad (2.129)$$

где  $\vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$  — вихревой вектор.

Умножим равенство (2.129) скалярно на  $d\vec{x}$ , после чего получим:

$$dH = 2 \vec{v}d\vec{x}. \quad (2.130)$$

Как видно из равенства (2.130) функция  $H$  постоянна во всем пространстве потока, если  $[\vec{v}, \vec{v}] = \vec{0}$ . Последнее равенство возможно либо для безвихревого потока  $\vec{v} = \vec{0}$ , либо для винтового потока, в котором вихревые линии совпадают с линиями тока. В рассматриваемом случае ламинарного движения  $\vec{v} = \vec{0}$ . Тогда  $dH = 0$  и

$$H = \text{const}. \quad (2.131)$$

Такие поверхности, которые называются поверхностями постоянной полной энергии и, как это не раз показывалось выше, являются цилиндрическими поверхностями, по которым движутся частицы.

Далее, рассмотрим геометрическую природу параболоида, исходя из которого получается профиль скоростей при ламинарном движении. Для этого каждой точке  $x$  на оси сосуда, перпендикулярного скорости частицы, поставим в соответствие плоскость  $(x, \xi)$ . Тем самым вдоль оси сосуда определено распределение  $\Delta^2$ , а  $(x, \xi)$  — элемент этого распределения, состоящий из точки  $x$  и проходящей через нее плоскости  $\xi = \xi(x)$ , перпендикулярной вектору  $\vec{e}_3$ , задающего направление скорости.

С точкой  $\vec{x}$  на оси сосуда свяжем множество реперов  $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_3\}$ , где  $\vec{e}_i \in \Delta^2$  и  $i, j = 1, 2$ , а вектор  $\vec{e}_3$  направлен по направлению скорости частицы жидкости, то есть ортогонален  $\Delta^2$  и  $|\vec{e}_3| = 1$ . Интегральные линии вектора  $\vec{v}$ , а, следовательно, и вектора  $\vec{e}_3$  являются прямыми линиями — ввиду того, что при ламинарном движении линии тока — прямые. На основании этого факта нормальная конгруэнция линий к распределению  $\Delta^2$  представляет собой прямые линии. Выясним, когда это возможно для распределения  $\Delta^2$ . Для этого запишем дифференциальные уравнения данного распределения в рассматриваемом репере уже в привычном виде:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij} \omega^j + \Lambda_i \omega^3, \quad (2.132)$$

где  $\Lambda_{ij}$  — основной тензор распределения  $\Delta^2$ , характеризующий ее вид, а  $\Lambda_i$  — ковектор данного распределения. Интегральные линии векторного поля  $\vec{e}_3$  являются прямыми тогда и только тогда, когда

$$d\vec{e}_3 = \vec{0} \pmod{\omega^i = 0}.$$

Так как  $d\vec{e}_3 = \omega_3^i \vec{e}_i = -g^{ij} \omega_j^3 \vec{e}_i = -g^{ij} (\Lambda_{jk} \omega^k + \Lambda_j \omega^3) \vec{e}_i$

$$d\vec{e}_3 = -g^{ij} \Lambda_j \omega^3 \vec{e}_i \pmod{\omega^i = 0}.$$

Отсюда видно, что в ортогональном репере  $d\vec{e}_3 = \vec{0} \pmod{\omega^i = 0}$  тогда и только тогда, когда  $\Lambda_i = 0$ . Тем самым, интегральные линии векторного поля  $\vec{e}_3$  являются прямыми тогда и только тогда, когда  $\Lambda_i = 0$ .

Тогда в случае ламинарного течения дифференциальные уравнения распределения  $\Delta^2$  примут вид:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij} \omega^j. \quad (2.133)$$

Дифференцируя уравнения (2.133) внешним образом и используя при этом уравнения структуры евклидова пространства, получим:

$$\begin{aligned} D\omega_i^3 &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j + \Lambda_{ij} D\omega^j; \\ \omega_i^j \wedge \omega_j^3 &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j + \Lambda_{ij} (\omega^k \wedge \omega_k^j + \omega^3 \wedge \omega_3^j). \end{aligned}$$

После подстановки равенств (2.133) в последние соотношения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_i^j \wedge (\Lambda_{jk} \omega^k) &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij} \omega_k^j \wedge \omega^k - \Lambda_{ij} \omega_3^j \wedge \omega^3; \\ \Lambda_{jk} \omega_i^j \wedge \omega^k &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij} \omega_k^j \wedge \omega^k - \Lambda_{ij} \omega_3^j \wedge \omega^3; \\ (d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega_j^k - \Lambda_{kj} \omega_i^k) \wedge \omega^j - \Lambda_{ij} \omega_3^j \wedge \omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\nabla \Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij} \omega_3^j \wedge \omega^3 = 0,$$

где  $\nabla \Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega_j^k - \Lambda_{kj} \omega_i^k$ . Применяя лемму Картана, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{ij} &= \mu_{ijk} \omega^k + \mu_{ij} \omega^3; \\ -\Lambda_{ij} \omega_3^j &= \mu_{ij} \omega^j + \mu_i \omega^3. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Так как вектор  $\vec{e}_3$  ортогонален векторам  $\vec{e}_i$ , то  $\vec{e}_3 \vec{e}_i = 0$ . Дифференцируя последнее равенство, будем иметь:

$$\omega_3^j = -g^{jk} \omega_k^3 = -g^{jk} (\Lambda_{kl} \omega^l).$$

Тогда, сравнивая последние равенства со вторыми равенствами из (2.134) получим:

$$\mu_i = 0.$$

Также, исходя из этих равенств, запишем:

$$\Lambda_{ij} g^{jk} \Lambda_{kl} \omega^l = \mu_{ij} \omega^j$$

или

$$\Lambda_{il} g^{lk} \Lambda_{kj} \omega^j = \mu_{ij} \omega^j.$$

Значит

$$\mu_{ij} = \Lambda_{il} g^{lk} \Lambda_{kj} = \Lambda_i^k \Lambda_{kj}.$$

В ортонормированном репере последние равенства можно переписать в виде:

$$\mu_{ij} = \Lambda_{i1} g^{11} \Lambda_{1j} + \Lambda_{i2} g^{22} \Lambda_{2j} = \Lambda_{i1} \Lambda_{1j} + \Lambda_{i2} \Lambda_{2j}. \quad (2.135)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12}\Lambda_{21}; \\ \mu_{12} &= \Lambda_{11}\Lambda_{12} + \Lambda_{12}\Lambda_{22} = \Lambda_{12}(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}); \\ \mu_{21} &= \Lambda_{21}\Lambda_{11} + \Lambda_{22}\Lambda_{21} = \Lambda_{21}(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}); \\ \mu_{22} &= \Lambda_{21}\Lambda_{12} + \Lambda_{22}^2.\end{aligned}$$

Ротор вектора скорости для ортогонального репера имеет вид:

$$\begin{aligned}-rot\vec{v}d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3p + v^1r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p)) + \\ &+ \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q)) + \\ &+ \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3p + v^1r)).\end{aligned}$$

Так как вектор  $\vec{e}_3$  направлен по направлению касательной линии тока, то

$$\vec{v} = v\vec{e}_3, \quad (2.136)$$

то предыдущая формула примет вид:

$$\begin{aligned}-rot\vec{v}d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-vp) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) + \\ &+ \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (vq)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (vq) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-vp)),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}p &= \omega_2^3 = \Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_{22}\omega^2; \\ q &= -\omega_1^3 = -\Lambda_{11}\omega^1 - \Lambda_{12}\omega^2.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}-rot\vec{v}d\tau &= \vec{e}_1(-vp_3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) + \\ &+ vq_3\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) + \vec{e}_3(vq_2\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - vp_1\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1).\end{aligned}$$

Так как  $p_3 = q_3 = 0$ , то

$$\begin{aligned}-rot\vec{v}d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_3(vq_2 + vp_1) \cdot \\ &\cdot \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.\end{aligned}$$

В случае ламинарного движения  $rot\vec{v} = 0$ , тогда из последнего равенства будем иметь:

$$\begin{aligned}\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv) &= 0; \\ \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) &= 0; \\ -v\Lambda_{12} + v\Lambda_{21} &= 0.\end{aligned}$$

Из последнего равенства этой системы получаем:

$$\Lambda_{21} = \Lambda_{12}. \quad (2.137)$$

Последнее равенство говорит о том, что распределение  $\Delta^2$  голономное.

Справедлива

**Теорема 2.12.** *Ламинарному потоку жидкости вдоль оси сосуда соответствует голономное распределение, которое ортогонально линии тока.*

Форма  $\omega_1^2$ , а, следовательно, и форма  $\omega_2^1$ , определяют поворот репера вокруг вектора  $\vec{e}_3$ . При ламинарном течении репер не вращается вокруг вектора  $\vec{e}_3$ . Значит, при описании такого вида движения жидкости можно положить  $\omega_1^2 = 0$ , то есть  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^3 \vec{e}_3 = \omega_i^3 \vec{e}_3 = \Lambda_{ij} \omega^j \vec{e}_3; \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^i \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Но так как точка  $x$  смещается только вдоль вектора  $\vec{e}_3$ , то можно принять  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ . Тогда, как видно из приведенных выше формул, вектора  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  постоянны.

Далее, положим  $\omega^i = dx^i$  и  $\vec{e}_i = \vec{f}_i + \Lambda_{ij} x^j \vec{f}_3$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{f}_3$ , где  $\vec{f}_i, \vec{f}_3$  — базисные вектора неподвижной системы координат. Тогда

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i = dx^i (\vec{f}_i + \Lambda_{ij} x^j \vec{f}_3).$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\vec{x} = x^i \vec{f}_i + \frac{1}{2} \Lambda_{ij} x^i x^j \vec{f}_3. \quad (2.138)$$

Равенство (2.138) есть векторное уравнение параболоида и, следовательно, интегральным многообразием распределения  $\Delta^2$  является данный параболоид.

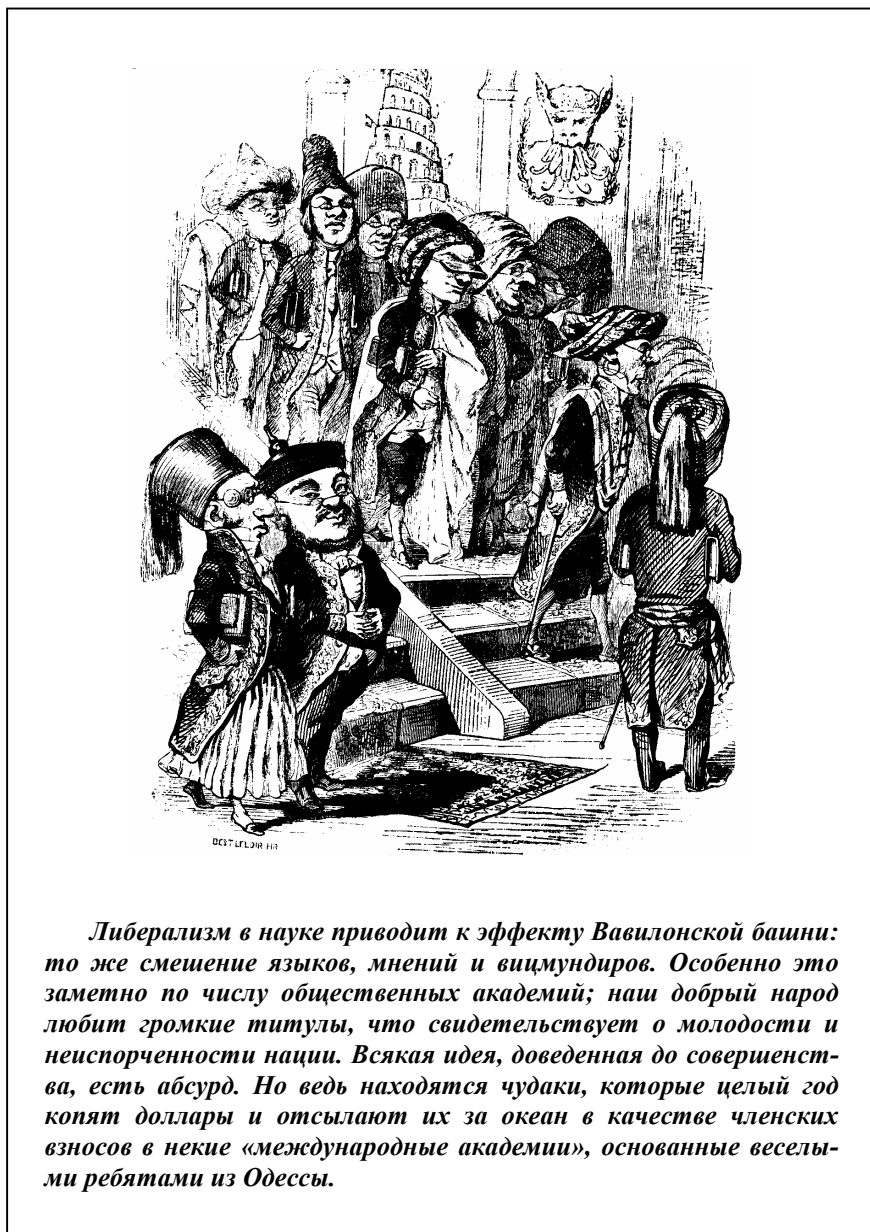
**Следствие.** Интегральным многообразием распределения  $\Delta^2$  является параболоид, ось которого совпадает с осью сосуда при ламинарном движении жидкости по данному сосуду.

Так как распределение  $\Delta^2$  голономное, то в равенствах (2.134) величины  $\mu_{ijk}$  и  $\mu_{ij}$  симметричны по всем индексам. Чтобы найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины  $\mu_{ijk}$ , продифференцируем внешним образом первое равенство из (2.134) и применяя лемму Картана получим:

$$\begin{aligned} -d\Lambda_{ik} \wedge \omega^k - \Lambda_{ik} D\omega_j^k - d\Lambda_{kj} \wedge \omega_i^k - \Lambda_{kj} D\omega_i^k &= d\mu_{ijk} \wedge \omega^k + \mu_{ijk} D\omega^k + \\ + d\mu_{ij} \wedge \omega^3 + \mu_{ij} D\omega^3. \end{aligned}$$

Из первого уравнения (2.134) также получим:

$$d\Lambda_{ij} = \Lambda_{ik} \omega_j^k + \Lambda_{kj} \omega_i^k + \mu_{jk} \omega^k + \mu_{ij} \omega^3.$$



Используя последнее, запишем:

$$\begin{aligned} & -(\Lambda_{il}\omega_k^l + \Lambda_{lk}\omega_i^l + \mu_{ikl}\omega^l + \mu_{ik}\omega^3) \wedge \omega_j^k - \Lambda_{ik}\omega_j^l \wedge \omega_l^k - \Lambda_{ik}\omega_j^3 \wedge \omega_3^k - \\ & -(\Lambda_{kl}\omega_j^l + \Lambda_{lj}\omega_k^l + \mu_{kjl}\omega^l + \mu_{kj}\omega^3) \wedge \omega_i^k - \Lambda_{kj}\omega_i^l \wedge \omega_l^k - \Lambda_{kj}\omega_i^3 \wedge \omega_3^k = \\ & = d\mu_{ijk} \wedge \omega^k + \mu_{ijk}\omega^l \wedge \omega_l^k + \mu_{ijk}\omega^3 \wedge \omega_3^k + d\mu_{ij} \wedge \omega^3 + \mu_{ij}\omega^l \wedge \omega_l^3. \end{aligned}$$

Или

$$(\nabla\mu_{ijk} - \mu_{ij}\omega_k^3 - (\Lambda_{il}\Lambda_{jk} + \Lambda_{lj}\Lambda_{ik})\omega_3^l) \wedge \omega^k + (\nabla\mu_{ij} - \mu_{ijk}\omega_3^k) \wedge \omega^3 = 0,$$

где  $\nabla\mu_{ijk} = d\mu_{ijk} - \mu_{ijl}\omega_k^l - \mu_{ilk}\omega_j^l - \mu_{ljk}\omega_i^l$ ,  $\nabla\mu_{ij} = d\mu_{ij} - \mu_{ik}\omega_j^k - \mu_{kj}\omega_i^k$ .

Применяя к последнему равенству лемму Картана, после несложных преобразований, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla\mu_{ijk} - \mu_{ij}\omega_k^3 - 2\Lambda_{(i|l|}\Lambda_{j)k}\omega_3^l &= \mu_{ijkl}\omega^l + \mu_{ijk3}\omega^3; \\ \nabla\mu_{ij} - \mu_{ijk}\omega_3^k &= \mu_{ij3k}\omega^k + \mu_{ij33}\omega^3, \end{aligned}$$

причем величины  $\mu_{ijkl}$  симметричны по всем индексам.

Величины  $\Lambda_{ij}$ ,  $\mu_{ijk}$ ,  $\mu_{ijkl}$ , ... образуют фундаментальную последовательность геометрических объектов распределения  $\Delta^2$ .

**Движение жидкости как геодезический поток в евклидовом пространстве.** Геодезический поток определяется на многообразии  $T = T(M)$  касательных векторов к поверхности полной энергии. Согласно принципу Мопертюи, движение частицы в потенциальном поле сил  $U(x)$  тяжести по поверхности постоянной полной энергии  $H$  будет происходить по геодезическим линиям. Тем самым, в принципе Мопертюи геодезический поток представляет для нас интерес только в качестве одномерного слоения на  $H$ . Рассмотрим некоторые вопросы, которые касаются геометрии геодезического потока в евклидовом пространстве  $E^3$ .

Пусть поток жидкости является геодезическим. Свяжем с каждой точкой потока репер, базисными векторами которого являются единичные векторы  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ . Тогда уравнения перемещения репера будут иметь вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B, \quad (2.139)$$

где  $A, B = 1, 2, 3$ .

1-формы  $\omega^A$  и  $\omega_A^B$  удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A; \quad D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A. \quad (2.140)$$

Будем рассматривать ортонормированный репер, для которого

$$\omega_A^A = 0, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0. \quad (2.141)$$

Для дальнейших упрощений введем уже известные обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= -\omega_3^2 = p = p_A \omega^A; \\ \omega_3^1 &= -\omega_1^3 = q = q_A \omega^A; \\ \omega_1^2 &= -\omega_2^1 = r = r_A \omega^A. \end{aligned} \quad (2.142)$$

В качестве основного возьмем векторное поле  $\vec{e}_3$ . Согласно общепринятому, геодезической линией поля будем называть такую линию, главная нормаль которой совпадает с вектором поля. Геодезическая линия должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0; \\ ds \cdot d^2 \vec{x} - (d\vec{x})d^2 s &= m \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Распишем последнее равенство. Согласно (2.139)  $d\vec{x} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2$ , то

$$d^2 \vec{x} = (d\omega^1 - r\omega^2) \vec{e}_1 + (d\omega^2 + r\omega^1) \vec{e}_2 + (-q\omega^1 + q\omega^2) \vec{e}_3.$$

Далее найдем:

$$\begin{aligned} \vec{b} = [d\vec{x}, d^2 \vec{x}] &= (-q\omega^1 \omega^2 + p(\omega^2)^2) \vec{e}_1 + (q(\omega^1)^2 - p\omega^1 \omega^2) \vec{e}_2 + (d\omega^2 \cdot \omega^1 + \\ &+ r(\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^2 + r(\omega^2)^2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда вектор главной нормали будет находиться следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{N} = [\vec{b}, d\vec{x}] &= (-d\omega^2 \cdot \omega^1 \omega^2 + d\omega^1 (\omega^2)^2 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^2) \vec{e}_1 + (d\omega^2 \cdot \\ &\cdot (\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^1 \omega^2 + r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^1) \vec{e}_2 + (-q\omega^1 (\omega^2)^2 + p(\omega^2)^3 - q(\omega^1)^3 + \\ &+ p(\omega^1)^2 \omega^2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Так как  $\vec{N} = m \vec{e}_3$ , то из последнего равенства получаем:

$$\begin{aligned} -d\omega^2 \cdot \omega^1 \omega^2 + d\omega^1 (\omega^2)^2 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^2 &= 0; \\ d\omega^2 (\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^1 \omega^2 + r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^1 &= 0; \\ -q\omega^1 (\omega^2)^2 + p(\omega^2)^3 - q(\omega^1)^3 + p(\omega^1)^2 \omega^2 &= m. \end{aligned}$$

Первые два равенства дают:

$$d\omega^1 \cdot \omega^2 - d\omega^2 \cdot \omega^1 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) = 0. \quad (2.143)$$

Совместно с  $\omega^3 = 0$  уравнения (2.143) являются условиями, которым удовлетворяет геодезическая линия.

Пусть геодезическая линия с вектором  $\vec{e}_1$  образует угол  $\sigma$ . Тогда  $\vec{N}_0 = \cos \sigma \vec{e}_1 + \sin \sigma \vec{e}_2$ , где  $\vec{N}_0$  — касательный вектор к этой линии, причем



$|\bar{N}_0| = 1$ . Тогда  $d\bar{N}_0 \perp \bar{N}_0$  и, значит, коллинеарен вектору  $\bar{N}$ . Имеем

$$d\bar{N}_0 = (-\sin\sigma d\sigma + \sin\sigma \cdot \omega_2^1) \vec{e}_1 + (\cos\sigma \cdot \omega_1^3 + \cos\sigma d\sigma) \vec{e}_2 + (\cos\sigma \cdot \omega_1^3 + \sin\sigma \cdot \omega_2^3) \vec{e}_3.$$

Чтобы линия была геодезической, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} -\sin\sigma d\sigma + \sin\sigma \cdot \omega_2^1 &= 0; \\ \cos\sigma \cdot \omega_1^2 + \cos\sigma d\sigma &= 0; \\ \cos\sigma \cdot \omega_1^3 + \sin\sigma \cdot \omega_2^3 &= m^1. \end{aligned}$$

Первые два равенства дают:

$$d\sigma + r = 0.$$

Тогда уравнения, определяющие геодезические линии, принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0; \\ d\sigma + r &= 0. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Считаем поток вихревым, то есть он имеет семейство поверхностей, содержащих все линии тока и все вихревые линии. Вектор  $\vec{e}_3$  направлен по нормали к этому семейству поверхностей в каждой точке. Дифференциальное уравнение семейства поверхностей имеет вид:

$$\omega^3 = 0. \quad (2.145)$$

Ввиду интегрируемости этого семейства поверхностей запишем:

$$D\omega^3 \wedge \omega^3 = 0, \quad (2.146)$$

или с учетом уравнений (2.140), (2.141) и (2.142), получим:

$$p_1 + q_2 = 0. \quad (2.147)$$

1-форма, удовлетворяющая равенству (2.147), имеет вид:

$$\omega^3 = Sds. \quad (2.148)$$

Так как линии тока жидкости и ее вихревые линии лежат на поверхности (2.145), то:

$$\vec{v} = v(\cos\sigma \vec{e}_1 + \sin\sigma \vec{e}_2); \quad 2\vec{v} = \text{rot}\vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2. \quad (2.149)$$

Ввиду того, что полная энергия частицы крови удовлетворяет условию  $dH = 2\vec{v}d\vec{x}$ , то  $H$  должна быть функцией параметра  $s$ :

$$H = f(s). \quad (2.150)$$

Далее имеем:

$$Sv(-v^1 \sin\sigma + v^2 \cos\sigma) = f'(s). \quad (2.151)$$

В этом случае уравнения компонентов вихря будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \frac{v^1}{v} &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left( \sin \sigma \frac{dv}{v} \right) + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (q \cos \sigma - p \sin \sigma); \\
-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \frac{v^2}{v} &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left( -\cos \sigma \frac{dv}{v} \right) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (q \cos \sigma - p \sin \sigma); \\
0 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \left( -\cos \sigma \frac{dv}{v} \right) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \left( \sin \sigma \frac{dv}{v} \right).
\end{aligned}$$

Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\left( \cos \sigma \frac{dv}{v} \right) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \left( \sin \sigma \frac{dv}{v} \right) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (\sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
L &= p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma; \\
N &= p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma.
\end{aligned} \tag{*}$$

Чтобы удовлетворить всем рассмотренным выше гидродинамическим уравнениям, мы должны принять:

$$\frac{dv}{v} = \xi \omega^1 + \eta \omega^2 + \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3; \tag{2.152}$$

$$0 = (\eta + N \sin \sigma) \omega^1 - (\xi + N \cos \sigma) \omega^2 + \zeta \omega^3,$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  — новые неизвестные функции, которые выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия интегрируемости уравнений (2.152).

Пусть вектор  $\vec{e}_1$  выбран по касательным к линиям кровотока. Тогда  $\sigma = 0$  и так как  $d\sigma + r = 0$ , то  $r = 0$ . Значит,  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ . При  $\sigma = 0$  второе уравнение из (2.152) дает:

$$\eta = 0, \quad \xi = -N, \quad \zeta = 0. \tag{2.153}$$

Тогда с учетом второго равенства из (\*) имеем:

$$N = -q_3, \quad \xi = q_3, \quad L = -q_3.$$

Первое уравнение из (2.152) принимает вид:

$$\frac{dv}{v} = q_3 \omega^1 + \left( -q_1 + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3. \tag{2.154}$$

Из первого уравнения для компонент вихря, получаем:

$$q_2 = -\frac{v^1}{v}. \tag{2.155}$$

Из второго уравнения имеем:

$$v^2 = \frac{f^1}{Sv}. \tag{2.156}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.154), получим условие его интегрируемости:

$$dq_3 \wedge \omega^1 - dq_1 \wedge \omega^3 - q_3 q \wedge \omega^3 - q_1 (q \wedge \omega^1 - p \wedge \omega^2) - \frac{2f'}{Sv^2} q_3 \omega^1 \wedge \omega^3 = 0. \quad (2.157)$$

Как видно из уравнения (2.157), на каждой поверхности семейства поверхностей полной энергии мы будем получать два течения с равными по модулю и противоположными по направлению скоростями. Два течения не будут определяться в том случае, когда

$$q_3 = 0. \quad (2.158)$$

Тогда равенство (2.154) принимает вид:

$$\frac{dv}{v} = -(q_1 + \frac{f'}{Sv^2}) \omega^3. \quad (2.159)$$

Но тогда  $dv = 0$  на каждой поверхности  $\omega^3 = 0$ , то есть поверхности полной энергии являются поверхностями постоянной полной энергии.

При условии (2.158) равенство (2.157) дает:

$$D(q_1 \omega^3) = 0. \quad (2.160)$$

Из (2.160) получаем:

$$q_1 \omega^3 = d\varphi. \quad (6.161)$$

Условие (2.161) есть условие того, что вектор  $q_1 \vec{e}_3$  есть градиент семейства поверхностей постоянной полной энергии. Подставив (2.161) в (2.159), запишем:

$$\frac{dv}{v} = -d\varphi - \frac{f'}{Sv^2} \omega^3.$$

Умножая последнее равенство на  $v^2$  и используя (2.148), получаем:

$$v dv = -v^2 d\varphi - f' ds. \quad (2.162)$$

Интегрируя уравнение (2.162), получим:

$$v^2 (\frac{1}{2} + \varphi) + f(s) = const. \quad (2.163)$$

Так как согласно равенству (2.150)  $f(s) = H$ , а  $H = \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{p}{\rho}$ , где  $U$  — потенциал внешних сил. Тогда (2.163) переписывается в виде:

$$v^2 (1 + \varphi) + U + \frac{p}{\rho} = const. \quad (2.164)$$

Рассматривается вихревой поток жидкости. Согласно формуле Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{vD\rho}{\eta},$$

когда скорость измеряется в  $\frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $D$  — в см, а  $\eta$  — в пуазах, турбулентность или завихрения появляется тогда, когда  $\text{Re} > 2000$ .

Формула (2.164) получена для вихревого движения жидкости. Из нее видно, что скорость пропорциональна квадратному корню из показателя падения давления вдоль участка сосуда. Связь между градиентом давления и скоростью в сосуде при ламинарном потоке (слева от вертикальной пунктирной линии) и при переходе его в турбулентный поток справа от пунктирной линии имеет вид, показанный на рис. 2.4.

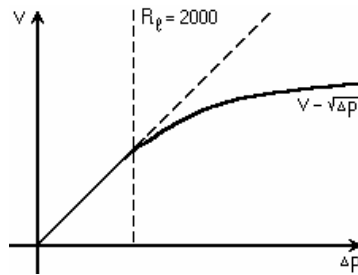


Рис. 2.4. Графическая связь между градиентом давления и скоростью жидкости в сосуде

Подставляя в (2.164) вместо  $\rho = \frac{\text{Re}\eta}{vD}$ , получим:

$$v^2(1+\varphi) + U + \frac{pvD}{\text{Re}\eta} = \text{const} = C.$$

Беря  $C = 0$ , получим:

$$(1+\varphi)v^2 + \frac{pD}{\text{Re}\eta}v + U = 0. \quad (2.165)$$

Решая квадратное уравнение (2.165), получаем:

$$v = \frac{-\frac{pD}{\text{Re}\eta} \pm \sqrt{\left(\frac{pD}{\text{Re}\eta}\right)^2 - 4(1+\varphi)U}}{2(1+\varphi)}, \quad (2.166)$$

при условии  $\left(\frac{pD}{\text{Re}\eta}\right)^2 - 4(1+\varphi)U \geq 0$ .

Из формулы (2.166) можно сделать вывод, что при движении жидкости с завихрениями при заданных условиях и при движении по геодезическим, скорость больше в том участке сосуда, где давление меньше и наоборот. Последнее хорошо согласуется с известным законом гидродинамики.

### **2.3. Основы геометрии стационарного движения жидкости в субпроективном пространстве, отнесенном к голономным реперам**

В настоящее время в литературе встречается большое разнообразие подходов к моделированию гидродинамических систем. Справедливо отметить, что все рассматриваемые подходы разнятся идеями, которые лежат в их основе и поэтому нет объединяющей идеи, которая позволила бы использовать идеи одного метода в другом и наоборот. Задачи моделирования требуют часто именно использования нескольких методов, так как каждый метод, в основном, создается для моделирования какой-либо одной или нескольких, но не всех, сторон деятельности биосистемы или ее участков. Для решения практических задач необходимо рассматривать всесторонне деятельность биосистемы, а при пользовании конкретным методом моделирования они бывают часто лишены такой возможности.

Моделирование движения жидкости по отдельным участкам сосудистого русла основывается на одних принципах, а моделирование всей системы строится на основании других принципов. Это приводит к трудностям, связанных, прежде всего, с теми задачами, в которых нужно объяснить закономерности движения жидкости в отдельном сосуде, основываясь на модели всей системы и на принципах, которые лежат в основе моделирования всей системы. Следующая трудность, которая встает перед исследователем — это довольно-таки большое число параметров, от которых зависит движение жидкости. Все это приводит к большому количеству уравнений, в которых отражается связь между введенными параметрами. И одна из важнейших проблем здесь — это отбор наиболее важных параметров в условиях поставленной задачи и дальнейшая работа с ними.

И, наконец, еще одна существенная трудность — это различие используемых математических аппаратов, которые используются в различных моделях. Все это также затрудняет, в ряде случаев переход от работы с одной моделью к работе с другими моделями<sup>37</sup>.

При описании геометрии системы, последняя представляется в виде определенного пространства. Для описания геометрических свойств такого пространства, а также геометрии линий тока используется уже устоявшийся аппарат дифференциальной геометрии, основанный на использовании метода внешних форм и метода подвижного репера. Перечисленные выше

трудности при описании геометрии биосистемы, основывающимся на ее представлении в виде определенного пространства, удастся избежать за счет того, что геометрия как всей системы, так и ее отдельных участков, рассматривается в определенном пространстве.

Такой подход основан на том, что биосистема представляет собой определенное пространство с характерной для этого пространства геометрией. Такое пространство правильно назвать пространством материальных сред живого, объединенных единым функциональным назначением. В качестве материальных сред рассматриваются системы организма, в том числе с движением жидкости. Каждую из материальных сред также рассматриваем в качестве пространства, которое является подпространством пространства материальных сред живого. Для описания конкретной системы организма мы должны использовать специальное пространство, геометрия которого сопоставима с геометрией изучаемой системы. Так, например, при изучении кровотока<sup>37</sup> в качестве пространства материальных сред живого используется субпроективное пространство.

Рассматривая геометрию биосистемы, нужно уметь описывать как геометрию ламинарного движения, так и турбулентного движения. Ламинарное движение можно представить следующим образом (рис. 2.5., 2.6).

В случае, показанном на рис. 2.7, жидкость движется турбулентно, но существует семейство поверхностей, на каждой поверхности которого располагаются одно семейство линий тока и одно семейство вихревых линий, если те и другие не совпадают.

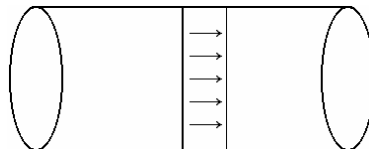


Рис. 2.5. Распределение скорости потока в сосуде, в случае, когда движение носит ламинарный характер и жидкость — не вязкая

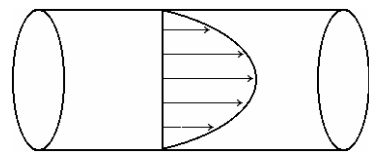


Рис. 2.6. Распределение скорости потока в сосуде в случае, когда жидкость движется ламинарно и имеет вязкость

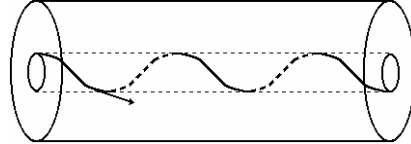


Рис. 2.7. Распределение скорости потока в сосуде в одном из случаев турбулентного движения при наличии поверхностей, содержащих линии тока и вихревые линии

Первые три случая предполагают описание геометрии системы с привлечением субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу.

И, наконец, в четвертом случае жидкость движется турбулентно, но не существует поверхностей полной энергии. В этом случае геометрия системы рассматривается с привлечением субпроективного пространства, отнесенного к неголономному реперу (рис. 2.8).

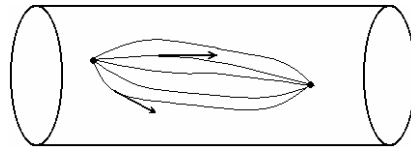


Рис. 2.8. Распределение скорости потока в сосуде, в случае турбулентного движения, когда не существует поверхностей полной энергии

Последний случай наиболее сложен как с точки зрения описания движения жидкости, так и с точки зрения соответствующей ему геометрической картины.

Геодезический поток определяется на многообразии  $T = T(C^3)$  касательных векторов к субпроективному пространству. В первых трех случаях субпроективное пространство отнесено к голономному реперу, а в четвертом к неголономному реперу.

**Дифференциальные операторы для субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу.** В касательном пространстве к трехмерному субпроективному пространству зададим репер, определяемый точкой  $x \in C^3$  и векторами  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  и уравнениями перемещения такого репера:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \quad (2.167)$$

где  $\vec{e}_{AB} = \vec{e}_{BA}$  — векторы, образующие с векторами  $\vec{e}_A$  репер второго порядка, связанный с точкой  $x$ . Симметричность векторов второго порядка

по нижним индексам говорит о том, что репер, определяемый такими векторами, является голономным. В качестве базисных форм выберем формы  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  такие, что  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ .

Дифференциальные формы  $\omega^A$  и  $\omega_B^B$ , входящие в уравнения (2.167), удовлетворяют уравнениям структуры субпроективного пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad D\omega_B^A = \omega_B^K \wedge \omega_K^A + R_{BKL}^A \omega^K \wedge \omega^L, \quad (2.168)$$

где  $R_{BKL}^A$  — тензор кривизны субпроективного пространства.

Так как субпроективные пространства являются римановыми пространствами, то в качестве структурной группы такого пространства возьмем риманову группу. В свою очередь, группой римановой структуры служит ортогональная группа  $O(n)$ , инвариантные формы которой удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma_A^B + \sigma_B^A = 0, \quad (2.169)$$

где  $\omega_B^A|_{\omega^A=0} = \sigma_B^A$ . Тогда формы  $\omega_B^A$  также удовлетворяют уравнениям:

$$\omega_B^A + \omega_A^B = 0. \quad (2.170)$$

Из (2.170) следует, что  $\omega_A^A = 0$ .

Точно так же, как это делается<sup>37, 134</sup> в евклидовом пространстве для нахождения градиента некоторой функции  $\varphi$ , можно проделать и для данного субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу и в результате чего получим:

$$\text{grad}\varphi = \frac{e^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}, \quad (2.171)$$

где  $e^1, e^2, e^3$  — взаимные векторы к векторам данного репера.

Для получения формулы  $\text{div } \vec{v}$ , где  $\vec{v}$  — вектор скорости, который представим в виде  $\vec{v} = v^A \vec{e}_A$ . Продифференцируем это равенство, используя второе уравнение из (2.167):

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}. \quad (2.172)$$

Репер первого порядка, принадлежащий  $T = T(C^3)$ , считаем ортонормированным, поэтому можно взять  $\vec{e}_A = 1$ . Дифференцируя последнее равенство, получим:  $\vec{e}_A d\vec{e}_A = 0$  или, с учетом (2.167), запишем:

$$\vec{e}_A (\omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}) = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде:



$$\omega_A^A + \omega^B \bar{e}_A \bar{e}_{AB} = 0.$$

С учетом равенств (2.170), последнее равенство переписывается в виде:

$$\omega^B \bar{e}_A \bar{e}_{AB} = 0.$$

Так как формы  $\omega^B$  независимы, то

$$\bar{e}_A \bar{e}_{AB} = 0. \quad (2.173)$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{div} \bar{v} d\tau = d_1 \bar{v} d_2 \bar{x} d_3 \bar{x} + d_2 \bar{v} d_3 \bar{x} d_1 \bar{x} + d_3 \bar{v} d_1 \bar{x} d_2 \bar{x}. \quad (2.174)$$

С учетом (2.172) соотношение (2.174) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{v} d\tau = & \begin{vmatrix} d_1 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ d_1 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^2 & \omega^3 \\ d_1 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_2 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^3 & \omega^1 \\ d_2 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^3 & \omega^2 \\ d_2 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} d_3 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^1 & \omega^2 \\ d_3 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ d_3 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\bar{e}_{AB} \bar{e}_K \bar{e}_L) + \\ & + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\bar{e}_{AB} \bar{e}_K \bar{e}_L) + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\bar{e}_{AB} \bar{e}_K \bar{e}_L). \end{aligned}$$

Последние три слагаемых после несложных преобразований представим в следующем виде:

$$v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\bar{e}_{AB} \bar{e}_K \bar{e}_L + \bar{e}_{AB} \bar{e}_L \bar{e}_K). \quad (*)$$

Из равенств (2.173) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \bar{e}_{12} = 0, \quad \bar{e}_2 \bar{e}_{21} = 0, \quad \bar{e}_3 \bar{e}_{31} = 0; \\ \bar{e}_1 \bar{e}_{13} = 0, \quad \bar{e}_2 \bar{e}_{22} = 0, \quad \bar{e}_3 \bar{e}_{32} = 0; \\ \bar{e}_1 \bar{e}_{11} = 0, \quad \bar{e}_2 \bar{e}_{23} = 0, \quad \bar{e}_3 \bar{e}_{33} = 0. \end{aligned}$$

Из последних равенств следует, что векторы второго порядка через векторы первого порядка можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{12} = a \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{13} = b \bar{e}_2, \quad \bar{e}_{23} = c \bar{e}_1, \quad \bar{e}_{11} = u^2 \bar{e}_2 + u^3 \bar{e}_3; \\ \bar{e}_{22} = m^1 \bar{e}_1 + m^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{33} = k^1 \bar{e}_1 + k^2 \bar{e}_2 \end{aligned}$$

Для иллюстрации сущности дальнейших вычислений, а также некоторого упрощения вычислений (в дальнейшем это будет сделано в общем виде) воспользуемся результатами и упрощениями, предложенными в работе<sup>134</sup>:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{12} &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{13} = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_{23} = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_{11} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3; \\ \vec{e}_{22} &= \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{33} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2.\end{aligned}\quad (2.175)$$

Распишем сумму (\*), а также учитывая равенства (2.173), получим:

$$\begin{aligned}div \vec{v} d\tau &= (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ &+ (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2.\end{aligned}\quad (2.176)$$

Для субпроективного пространства, как многообразия, формула Стокса, а, следовательно, и формула Гаусса-Остроградского являются верными.

Далее, найдем выражение для ротора вектора скорости жидкости в субпроективном пространстве с помощью формулы:

$$\iiint rot \vec{v} d\tau = \oint\oint [\vec{v}, d\vec{v}].$$

Применяя эту формулу к объему  $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$ , получим после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned}-rot \vec{v} d\tau &= \vec{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge (dv^K + v^L \omega_L^K) (\vec{e}_B \vec{e}_K) + \vec{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge \\ &\wedge (v^K \omega^L) (\vec{e}_{KL} \vec{e}_B).\end{aligned}\quad (2.177)$$

В ортогональном репере будем иметь:

$$\begin{aligned}-rot \vec{v} d\tau &= \vec{e}_1 (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1 \omega_1^2 + v^3 \omega_3^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1 \omega_1^3 + \\ &+ v^2 \omega_2^3)) + \vec{e}_2 (\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2 \omega_2^1 + v^3 \omega_3^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1 \omega_1^3 + \\ &+ v^2 \omega_2^3)) + \vec{e}_3 (\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2 \omega_2^1 + v^3 \omega_3^1) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1 \omega_1^2 + \\ &+ v^3 \omega_3^2)) + ((v^3 - v^2) \vec{e}_1 + (v^1 - v^3) \vec{e}_2 + (v^2 - v^1) \vec{e}_3) d\tau.\end{aligned}\quad (2.178)$$

Для иллюстрации последних формул рассмотрим уравнение неразрывности потока в субпроективном пространстве, отнесенном к голономным реперам.

Пусть  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  — плотность жидкости,  $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$  — поле скоростей движения ее частиц. Основываясь на законе сохранения количества вещества и используя формулу Гаусса-Остроградского, найдем взаимосвязь плотности и скорости жидкости.

Сосуды системы, исходя из принципа Мопертюи, являются геодезическими линиями в субпроективном пространстве при сопоставлении, конечно, пространства биосистемы с субпроективным пространством. Органу

(см. рис. 6.2), в котором сходятся сосуды, сопоставляется точка, через которую проходят геодезические линии субпроективного пространства. Возьмем цилиндрическую область  $D$  в данном пространстве, ограниченную поверхностью  $S$  и мы получим, что за промежуток времени  $\Delta t$  количество вещества в области  $D$  изменится на величину

$$\iiint_D (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)) dV.$$

Ввиду того, что за промежуток времени  $\Delta t$  поток жидкости через поверхность  $S$  в сторону ее внешней нормали равен

$$\Delta t \iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$$

с точностью до  $o(\Delta t)$ , то при условии отсутствия в области  $D$  источников и стоков и в силу закона сохранения количества, имеем:

$$\iiint_D \Delta \rho \Delta V = -\Delta t \iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}$$

или

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}.$$

Применяя к правой части последнего равенства формулу Гаусса-Остроградского, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (2.179)$$

которое называется уравнением неразрывности жидкости.

Так как рассматривается случай несжимаемости жидкости, то объемный расход через замкнутую поверхность  $S$  должен быть равен нулю, то есть

$$\iint_S \vec{v} d\vec{\sigma} = 0.$$

Отсюда, на основании формулы Гаусса-Остроградского следует, что

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.180)$$

С учетом (6.180), равенство (6.176) примет вид:

$$\begin{aligned} (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ + (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.181)$$

Если рассмотреть принятые ранее обозначения, то формула (2.181) запишется:



*Творчество есть высшее развитие качества мышления homo sapiens. Как же тогда расценивать изобретателей вечных двигателей? А равно генераторов биополя, уникальных аппаратов «волновой терапии» для домашнего лечения всех болезней, включая слабоумие и шизофрению... Здесь два варианта ответа: корыстолюбие и маниакальная заикленность. Первое — общечеловеческий порок, а второе — клинический случай на почве восторга неопфита величием науки, которой ему постигнуть не дано.*

$$(dv^1 - v^2 r + v^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^1 r - v^3 p) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (dv^3 - v^1 q + v^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \quad (2.182)$$

Выбирая вектор  $\vec{e}_3$  по направлению касательной линии тока жидкости, получим:

$$\vec{v} = v \vec{e}_3. \quad (2.183)$$

Тогда (2.182) примет вид:

$$\frac{dv}{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Пусть  $dv = v_A \omega^A$ , тогда

$$v_3 = v(p_2 - q_1). \quad (2.184)$$

Так как движение жидкости в биосистеме имеет геометрию, по нашему предположению, аналогичную геометрии субпроективного пространства, то, наряду с функциями  $\rho$  и  $\vec{v}$ , рассмотрим давление  $p = p(x, y, z, t)$  как функцию пространства и времени.

Выделим в данном пространстве, как и ранее, цилиндрическую область  $D$ , которую ограничивает поверхность  $S$ . На каждый элемент  $\rho dV$  массы жидкости действуют силовые поля, среди них есть и гравитационное. Пусть  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$  — плотность создаваемых внешними полями сил, которые в данном случае называются массовыми. Тогда на элемент массы  $\rho dV$  действует сила  $\vec{F} \rho dV$ . Если элемент массы имеет ускорение  $\vec{a}$ , то это равносильно наличию силы инерции —  $\vec{a} \rho dV$ . Также на элемент  $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$  поверхности  $S$  со стороны частиц жидкости, соседними с попавшими в  $D$ , действует давление —  $\rho d\vec{\sigma}$ . Кроме того, нужно рассмотреть силу вязкости  $F_{\text{visc}}$ , замедляющую движение жидкости:

$$F_{\text{visc}} = 2\pi r l \eta \text{grad } v, \quad (2.185)$$

где  $\eta$  — вязкость.

Согласно принципу Даламбера, все силы, действующие на область  $D$ , взаимно уравновешиваются, то есть:

$$\iiint_D (\vec{F} + \vec{F}_{\text{visc}} - \vec{a}) \rho dV - \iint_D \text{grad } p dV = 0.$$

В силу произвольности в выборе области  $D$ , получаем:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} + \rho 2\pi r l \eta \text{grad } v - \text{grad } p = 0. \quad (2.186)$$

Так как  $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ , то равенство (2.186) примет вид:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + 2\pi r l \eta \operatorname{grad} v - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0. \quad (2.187)$$

С учетом формулы (2.171) равенство (2.187) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + 2\pi r l \eta \frac{e^1 d\mathbf{v} \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\mathbf{v} \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\mathbf{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{e^1 dp \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 dp \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 dp \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} = 0. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Значения  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{rot}$  вычислены с упрощениями, которые представлены в (2.175) получим выражения в общем случае. Для этого запишем:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{11} = a_{11}^2 \bar{e}_2 + a_{11}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{21} = a_{21}^1 \bar{e}_1 + a_{21}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{31} = a_{31}^1 \bar{e}_1 + a_{31}^2 \bar{e}_2; \\ \bar{e}_{12} = a_{12}^2 \bar{e}_2 + a_{12}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{22} = a_{22}^1 \bar{e}_1 + a_{22}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{32} = a_{32}^1 \bar{e}_1 + a_{32}^2 \bar{e}_2; \\ \bar{e}_{13} = a_{13}^2 \bar{e}_2 + a_{13}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{23} = a_{23}^1 \bar{e}_1 + a_{23}^3 \bar{e}_3, \quad \bar{e}_{33} = a_{33}^1 \bar{e}_1 + a_{33}^2 \bar{e}_2. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Так как вектора  $\bar{e}_{AB}$  симметричны по нижним индексам, то в качестве неизвестных коэффициентов в разложениях (2.189), возьмем следующие:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{11} = a_{11}^2 \bar{e}_2 + a_{11}^3 \bar{e}_3; \quad \bar{e}_{22} = a_{22}^1 \bar{e}_1 + a_{22}^3 \bar{e}_3; \\ \bar{e}_{12} = a_{12}^3 \bar{e}_3; \quad \bar{e}_{23} = a_{23}^1 \bar{e}_1; \\ \bar{e}_{13} = a_{13}^2 \bar{e}_2; \quad \bar{e}_{33} = a_{33}^1 \bar{e}_1 + a_{33}^2 \bar{e}_2. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Как видно из равенств (2.190), количество неизвестных коэффициентов  $a_{BC}^A$  равно девяти.

В трехмерном субпроективном пространстве  $C^3$  рассмотрим голономное двумерное подмногообразие, которое по аналогии с евклидовым пространством, назовем двумерной поверхностью, как и в книге<sup>134</sup>. Данную поверхность можно отнести к семейству поверхностей, на которых находятся все линии тока и все вихревые линии, если последние существуют. С поверхностью  $P^2$  свяжем семейство реперов  $R(P^2)$  так, что точка  $x$  — начало любого репера семейства принадлежит поверхности, а вектора  $\bar{e}_A$ , лежащие в касательном пространстве в точке  $x$  к  $C^3$ , расположены таким образом по отношению к поверхности  $P^2$ , что вектор  $\bar{e}_3$  направлен по нормали к ней. Так как смещение  $d\bar{x}$  происходит вдоль этой поверхности,

то  $\omega^3 = 0$ . Тогда уравнения инфинитезимального перемещения репера примут следующий вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2; \\ d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{11} + \omega^2 \vec{e}_{12}; \\ d\vec{e}_2 &= \omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{21} + \omega^2 \vec{e}_{22}; \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 + \omega^1 \vec{e}_{31} + \omega^2 \vec{e}_{32}. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Внешнее дифференцирование уравнения  $\omega^3 = 0$  с учетом уравнений структуры (2.168) дает:

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Отсюда, используя лемму Картана, получим:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a\omega^1 + b\omega^2; \\ \omega_2^3 &= b\omega^1 + c\omega^2. \end{aligned} \quad (2.192)$$

С учетом того, что  $\omega_1^3 = -q_1\omega^1 - q_2\omega^2$  и  $\omega_2^3 = p_1\omega^1 + p_2\omega^2$ , получим:  $a = -q_1$ ,  $b = -q_2$ ,  $b = p_1$ ,  $c = p_2$ . Тем самым

$$p_1 = -q_2. \quad (2.193)$$

Справедлива

**Теорема 2.13.** *Линии кривизны векторного поля  $\vec{e}_3$  ортогональны тогда и только тогда, когда верно равенство (2.193).*

Для ортогонального репера  $R(P^2)$ , последние три уравнения из (2.191) примут вид:

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{11} + \omega^2 \vec{e}_{12}; \\ d\vec{e}_2 &= -\omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{21} + \omega^2 \vec{e}_{22}; \\ d\vec{e}_3 &= -\omega_3^1 \vec{e}_1 - \omega_3^2 \vec{e}_2 + \omega^1 \vec{e}_{31} + \omega^2 \vec{e}_{32}. \end{aligned} \quad (2.194)$$

На основании равенств (2.192) видно, что число линейно-независимых форм, входящих в уравнения (2.191) и (2.188) равно трем:  $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$ .

Если точка  $x$  неподвижна, то  $\omega^1 = \omega^2 = 0$ , но тогда уравнения (2.191), с учетом (2.192) для ортогонального репера примут вид:

$$d\vec{x} = \vec{0}, \quad d\vec{e}_1 = \omega_1^2 \vec{e}_2, \quad d\vec{e}_2 = -\omega_2^1 \vec{e}_1, \quad d\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Отсюда видно, что вектор  $\vec{e}_3$  постоянен, а форма  $\omega_1^2$  определяет поворот репера вокруг вектора  $\vec{e}_3$ . Так как, в этом случае, после внешнего дифференцирования первого из последних равенств, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= d\bar{e}_2 \wedge \omega_1^2 + \bar{e}_2 D\omega_1^2; \\ -\omega_1^2 \bar{e}_1 \wedge \omega_1^2 + \bar{e}_2 D\omega_1^2 &= 0; \\ D\omega_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Значит, форма  $\omega^2$  есть полный дифференциал:  $\omega^2 = d\psi$ . Возьмем два неколлинеарных вектора  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$ , ортогональных вектору  $\bar{e}_3$ , то площадь параллелограмма, построенного на них, равна:

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) &= (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} \omega^1(x, \bar{\xi}_1) & \omega^2(x, \bar{\xi}_1) & 0 \\ \omega^1(x, \bar{\xi}_2) & \omega^2(x, \bar{\xi}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \omega^1(x, \bar{\xi}_1)\omega^2(x, \bar{\xi}_2) - \omega^1(x, \bar{\xi}_2)\omega^2(x, \bar{\xi}_1) = (\omega^1 \wedge \omega^2)(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2). \end{aligned}$$

Тем самым,  $\sigma = \omega^1 \wedge \omega^2$  — элемент площади поверхности  $P^2$ . По аналогии, как это делалось в евклидовом пространстве, второй квадратичной формой поверхности  $P^2$ , назовем проекцию второго дифференциала точки  $x$  на вектор  $\bar{e}_3$ , который находится в касательном пространстве в точке  $x$ , как точке субпроективного пространства и ортогонален поверхности  $P^2$ , то есть  $\varphi = \bar{e}_3 d^2 \bar{x}$ .

Из первого уравнения (2.191) запишем, после его дифференцирования:

$$\begin{aligned} d^2 \bar{x} &= (d\omega^1 + \omega^2 \omega_2^1) \bar{e}_1 + (\omega^1 \omega_1^2 + d\omega^2) \bar{e}_2 + (\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3) \bar{e}_3 + \\ &+ (\omega^1)^2 \bar{e}_{11} + 2\omega^1 \omega^2 \bar{e}_{12} + (\omega^2)^2 \bar{e}_{22}. \end{aligned}$$

Последнее равенство, с учетом (2.190), перепишем в виде:

$$\begin{aligned} d^2 \bar{x} &= (d\omega^1 + \omega^2 \omega_2^1 + (\omega^2)^2 a_{22}^1) \bar{e}_1 + (d\omega^2 + \omega^1 \omega_1^2 + (\omega^1)^2 a_{11}^2) \bar{e}_2 + \\ &+ (\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 + (\omega^1) a_{11}^3 + 2\omega^1 \omega^2 a_{12}^3 + (\omega^2)^2 a_{22}^3) \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Поэтому  $\varphi = \bar{e}_3 d^2 \bar{x} = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3 + (\omega^1) a_{11}^3 + 2\omega^1 \omega^2 a_{12}^3 + (\omega^2)^2 a_{22}^3$ .

С учетом равенств (2.192), получим:

$$\varphi = (a + a_{11}^3)(\omega^1)^2 + 2(b + a_{12}^3)\omega^1 \omega^2 + (c + a_{22}^3)(\omega^2)^2. \quad (2.196)$$

Из (2.196) видно, что коэффициенты  $a_{11}^3, a_{12}^3, a_{22}^3$  в разложении векторов  $\bar{e}_{11}, \bar{e}_{12}, \bar{e}_{22}$ , также коэффициенты  $a = -q_1, b = p_1 = -q_2$  и  $c = p_2$ , являются коэффициентами второй квадратичной формы. Тогда уравнение  $\varphi = 0$  определяет в каждой точке поверхности  $P^2$  два асимптотических направления. Рассмотрим  $\Delta = (a + a_{11}^3)(c + a_{22}^3) - (b + a_{12}^3)^2$ . Тогда асимптотические направления являются действительными, если  $\Delta < 0$ ; мнимыми, если



$\Delta > 0$  и совпавшими, если  $\Delta = 0$ . В этих случаях точка поверхности  $P^2$ , по аналогии с точкой поверхности евклидова пространства, называется, соответственно, гиперболической, эллиптической, параболической.

Найдем выражения для  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$  и  $\text{rot}$  в случае, когда выражения векторов  $\vec{e}_{AB}$  имеют вид (2.190).

Проводя вычисления  $\text{grad } \varphi$ , как это делалось несколько выше, получим формулу, аналогичную формуле (2.171).

Точно так же, как поступали при выводе формулы (2.176), получим:

$$d\tau \text{div } \vec{v} = (dv^1 + v^B \omega^1_B) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega^2_B) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ + (dv^3 + v^B \omega^3_B) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v^K a^A_{KA})_{K \neq A} d\tau, \quad (2.197)$$

где в последнем слагаемом вначале производится суммирование по  $A$ , а затем суммирование по  $K \neq A$ .

Выражение для ротора вектора скорости жидкости  $\vec{v}$  найдем, пользуясь формулой:

$$\iiint \text{rot } \vec{v} d\tau = - \oint [\vec{v}, d\vec{\sigma}],$$

где  $d\vec{\sigma}$  — вектор для элемента поверхности.

Точно так же, как это делается в евклидовом пространстве, получим:

$$-\text{rot } \vec{v} d\tau = d_2 \vec{x} (d_1 \vec{v} d_3 \vec{x}) - d_3 \vec{x} (d_1 \vec{v} d_2 \vec{x}) + d_3 \vec{x} (d_2 \vec{v} d_1 \vec{x}) - \\ - d_1 \vec{x} (d_2 \vec{v} d_3 \vec{x}) + d_1 \vec{x} (d_3 \vec{v} d_2 \vec{x}) - d_2 \vec{x} (d_3 \vec{v} d_1 \vec{x}), \quad (2.198)$$

где скобками обозначены скалярные произведения.

Вектор скорости представим в виде  $\vec{v} = v^A \vec{e}_A$ . Тогда

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega^A_B) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}. \quad (2.199)$$

С учетом (2.199) равенство (2.198) перепишем в следующем виде:

$$\text{rot } \vec{v} d\tau = d_1 \vec{x} (((dv^A + v^B \omega^A_B) \wedge \omega^K)_{23} (\vec{e}_A \vec{e}_K) + v^A (\omega^B \wedge \omega^K)_{23} (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K)) + \\ + d_2 \vec{x} (((dv^A + v^B \omega^A_B) \wedge \omega^K)_{31} (\vec{e}_A \vec{e}_K) + v^A (\omega^B \wedge \omega^K)_{31} (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K)) + d_3 \vec{x} \cdot \\ \cdot (((dv^A + v^B \omega^A_B) \wedge \omega^K)_{12} (\vec{e}_A \vec{e}_K) + v^A (\omega^B \wedge \omega^K)_{12} (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K)).$$

Или, после несложных преобразований, окончательно получим:

$$\text{rot } \vec{v} d\tau = -\vec{e}_L \omega^L \wedge \omega^K \wedge (dv^A + v^B \omega^A_B) (\vec{e}_A \vec{e}_K) - \\ - \vec{e}_L \omega^L \wedge v^A (\omega^K \wedge \omega^B) (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K). \quad (2.200)$$

Для ортогонального репера будем иметь:

$$\begin{aligned}
-rot\vec{v} d\tau = & \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1\omega_1^2 + v^3\omega_3^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1\omega_1^3 + \\
& + v^2\omega_2^3)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2\omega_2^1 + v^3\omega_3^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1\omega_1^3 + \\
& + v^2\omega_2^3)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2\omega_2^1 + v^3\omega_3^1) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1\omega_1^2 + \\
& + v^3\omega_3^2)) + \vec{e}_1(d\tau(v^1(\vec{e}_{13}\vec{e}_2) + v^3(\vec{e}_{33}\vec{e}_2))) - d\tau(v^1(\vec{e}_{12}\vec{e}_3) + v^2(\vec{e}_{22}\vec{e}_3))) + \\
& + \vec{e}_2(-d\tau(v^2(\vec{e}_{23}\vec{e}_1) + v^3(\vec{e}_{33}\vec{e}_1))) + d\tau(v^1(\vec{e}_{11}\vec{e}_3) + v^2(\vec{e}_{21}\vec{e}_3))) + \vec{e}_3(d\tau(v^2 \cdot \\
& \cdot (\vec{e}_{22}\vec{e}_1) + v^3(\vec{e}_{32}\vec{e}_1))) - d\tau(v^1(\vec{e}_{11}\vec{e}_2) + v^3(\vec{e}_{31}\vec{e}_2))).
\end{aligned}$$

С учетом выражения форм  $\omega^2$ ,  $\omega^3$  и  $\omega^1$  через базисные и с учетом равенств (2.190), последнее равенство окончательно примет вид:

$$\begin{aligned}
-rot\vec{v} d\tau = & \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1r - v^3p) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p) + \\
& + d\tau(v^1(a_{13}^2 - a_{12}^3) + v^3a_{33}^2 - v^2a_{22}^3)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q) + \\
& + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p) + d\tau(v^1a_{11}^3 + v^2(a_{12}^3 - a_{23}^1) - v^3a_{33}^1)) + \quad (2.201) \\
& + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1r - v^3p) + d\tau \cdot \\
& \cdot (-v^1a_{11}^2 + v^2a_{22}^1 + v^3(a_{23}^1 - a_{13}^2))).
\end{aligned}$$

Пусть вектор вихря жидкости  $\vec{v}$  по базисным векторам имеет следующее разложение:

$$\vec{v} = rot\vec{v} = v^A \vec{e}_A. \quad (2.202)$$

Тогда с учетом равенства (2.201), компоненты вихря будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
-d\tau \cdot v^1 = & \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1r - v^3p) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p) + \\
& + (v^1(a_{13}^2 - a_{12}^3) - v^2a_{22}^3 + v^3a_{33}^2)d\tau; \\
-d\tau \cdot v^2 = & \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1q + v^2p) + \\
& + (v^1a_{11}^3 + v^2(a_{12}^3 - a_{23}^1) - v^3a_{33}^1)d\tau; \quad (2.203) \\
-d\tau \cdot v^3 = & \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2r + v^3q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1r - v^3p) + \\
& + (-v^1a_{11}^2 + v^2a_{22}^1 + v^3(a_{23}^1 - a_{13}^2))d\tau,
\end{aligned}$$

где  $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$  — элемент объема в каждой положительно ориентированной карте  $U$ .

Так как на поверхности полной энергии имеют место равенства  $\vec{v} = v(\cos\sigma\vec{e}_1 + \sin\sigma\vec{e}_2)$ ,  $\vec{v} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2$ , то уравнения компонентов вихря будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
-d\tau \cdot v^1 = & \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv \sin\sigma + v \cos\sigma d\sigma + v \cos\sigma r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-v \cos\sigma \cdot \\
& \cdot q + v \sin\sigma p) + (v \cos\sigma(a_{13}^2 - a_{12}^3) - v \sin\sigma a_{22}^3) d\tau \\
-d\tau \cdot v^2 = & \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv \cos\sigma - v \sin\sigma d\sigma - v \sin\sigma r) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \\
& (v \cos\sigma q + v \sin\sigma p) + (v \cos\sigma a_{11}^3 + v \sin\sigma(a_{12}^3 - a_{23}^1))d\tau \\
0 = & \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv \cos\sigma - v \sin\sigma d\sigma - v \sin\sigma r) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv \sin\sigma +
\end{aligned}$$

$$+ v \cos \sigma d\sigma + v \cos \sigma r) + (-v \cos \sigma a^2_{11} + v \sin \sigma a^1_{22}) d\tau.$$

Последние равенства перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} -d\tau \cdot \frac{v^1}{v} &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left( \frac{dv}{v} \sin \sigma + \cos \sigma (d\sigma + r) \right) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-q \cos \sigma + \\ &+ p \sin \sigma) + (\cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}) d\tau; \\ -d\tau \cdot \frac{v^2}{v} &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \left( \frac{dv}{v} \cos \sigma - \sin \sigma (d\sigma + r) \right) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (q \cos \sigma - \\ &- p \sin \sigma) + (\cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau; \end{aligned} \quad (2.204)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \left( \frac{dv}{v} \cos \sigma - \sin \sigma (d\sigma + r) \right) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \left( \frac{dv}{v} \sin \sigma + \right. \\ &\left. + \cos \sigma (d\sigma + r) \right) + (-\cos \sigma a^2_{11} + \sin \sigma a^1_{22}) d\tau. \end{aligned}$$

Из равенства (2.197) запишется уравнение неразрывности потока жидкости в следующем виде:

$$\begin{aligned} (dv^1 - v^2 r + v^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^1 r - v^3 p) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (dv^3 - \\ - v^1 q + v^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v^K a^1_{K1} + v^K a^2_{K2} + v^K a^3_{K3}) d\tau = 0. \end{aligned}$$

С учетом представления вектора скорости через базисные векторы, последнее равенство примет вид:

$$\begin{aligned} (dv \cos \sigma - v \sin \sigma d\sigma - v \sin \sigma r) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv \sin \sigma + v \cos \sigma d\sigma + \\ + v \cos \sigma r) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (-v \cos \sigma q + v \sin \sigma p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v \sin \sigma a^1_{21} + \\ + v \cos \sigma a^2_{12} + v \cos \sigma a^3_{13} + v \sin \sigma a^3_{23}) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \left( \frac{dv}{v} \cos \sigma - \sin \sigma (d\sigma + r) \right) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \left( \frac{dv}{v} \sin \sigma + \cos \sigma (d\sigma + r) \right) \wedge \\ \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p \sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v \cos \sigma (a^2_{12} + a^3_{13}) + \\ + v \sin \sigma (a^1_{21} + a^3_{23})) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Учитывая равенства (2.190), получим  $a^2_{12} = a^3_{13} = a^1_{12} = a^3_{23} = 0$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dv}{v} \cos \sigma - \sin \sigma (d\sigma + r) \right) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \left( \frac{dv}{v} \sin \sigma + \cos \sigma (d\sigma + r) \right) \wedge \\ \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p \sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Если рассмотреть движение по геодезическим линиям ( $d\sigma + r = 0$ ) поверхностей постоянной полной энергии, то равенства (2.204) и (2.205) будут иметь вид:

$$-\frac{v^1}{v} = q_2 \cos \sigma - p_2 \sin \sigma + \cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma \cdot a^3_{22};$$

$$\begin{aligned}
-\frac{v^2}{v} &= -q_1 \cos \sigma + p_1 \sin \sigma + \cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}); \quad (2.206) \\
0 &= -\cos \sigma a^2_{11} + \sin \sigma a^1_{22}; \\
0 &= p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma.
\end{aligned}$$

**Основные кинематические уравнения.** Пусть точка  $x$  описывает линию, ортогональную к векторам поля  $\vec{e}_3$  и пусть

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \frac{\vec{k}}{m}, \quad (\vec{e}_3 \frac{d\vec{x}}{ds} = 0).$$

Рассмотрим понятие нормальной кривизны поля в данной точке, принадлежащей карте  $U$ . Для этого рассмотрим:

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{k}\vec{e}_3}{m} &= -\frac{d\vec{x}d\vec{e}_3}{ds^2} = -\frac{(\omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2)(q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2 + \omega^1 a^2_{31} \vec{e}_2 + \omega^2 a^1_{32} \vec{e}_1)}{ds^2} = \\
&= -\frac{(\omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2)((q + \omega^2 a^1_{32})\vec{e}_1 - (p - \omega^1 a^2_{31})\vec{e}_2)}{ds^2} = \\
&= -\frac{\omega^1 (q + \omega^2 a^1_{32}) - \omega^2 (p - \omega^1 a^2_{31})}{ds^2} = \frac{-q_1 (\omega^1)^2 + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \omega^1 \omega^2}{ds^2} + \\
&+ \frac{p_2 (\omega^2)^2}{ds^2} = p_2 \sin^2 \sigma + (p - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \sin \sigma \cdot \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma,
\end{aligned}$$

где  $\cos \sigma = \frac{\omega^1}{ds}$ ,  $\sin \sigma = \frac{\omega^2}{ds}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{-q_1 (\omega^1)^2 + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \omega^1 \omega^2 + p_2 (\omega^2)^2}{ds^2} = p_2 \sin^2 \sigma + \\
&+ (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \sin \sigma \cdot \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma
\end{aligned} \quad (2.207)$$

будет кривизной линии, главная нормаль которой совпадает с вектором  $\vec{e}_3$ . Это выражение назовем нормальной кривизной поля в данной точке карты  $U$ . Из равенства (2.207) видно, что компоненты разложения векторов  $\vec{e}_{23}$  и  $\vec{e}_{13}$  по векторам репера  $R_x - a^1_{23}$  и  $a^2_{31}$  входят в выражение для нормальной кривизны поля.

Рассмотрим конгруэнцию линий, являющихся интегральными линиями или линиями тока векторного поля  $\vec{e}_3$ , то вектор кривизны такой линии будет:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\omega^1=0} &= \frac{\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 + \omega_3^3 \vec{e}_3}{ds} = \frac{q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2 + \omega^3(a_{33}^1 \vec{e}_1 + a_{33}^2 \vec{e}_2)}{ds} = \\ &= \frac{q_3 \omega^3 \vec{e}_1 - p_3 \omega^3 \vec{e}_2 + \omega^3(a_{33}^1 \vec{e}_1 + a_{33}^2 \vec{e}_2)}{ds} = (q_3 + a_{33}^1) \vec{e}_1 - (p_3 - a_{33}^2) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Проекция вектора кривизны на направление скорости жидкости примет вид:

$$((q_3 + a_{33}^1) \vec{e}_1 - (p_3 - a_{33}^2) \vec{e}_2) \frac{\vec{v}}{v} = (q_3 + a_{33}^1) \cos \sigma - (p_3 - a_{33}^2) \sin \sigma.$$

Примем:

$$\begin{aligned} L &= p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma; \\ N &= (p_3 - a_{33}^2) \sin \sigma - (q_3 + a_{33}^1) \cos \sigma. \end{aligned} \quad (2.208)$$

Чтобы удовлетворить гидродинамическим уравнениям (2.204) и (2.205), примем:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= t\omega^1 + g\omega^2 + (L + \frac{f^1}{SV^2})\omega^3; \\ d\sigma + r &= (g + N \sin \sigma)\omega^1 - (t + N \cos \sigma)\omega^2 + u\omega^3, \end{aligned} \quad (2.209)$$

где  $t, g, u$  — функции, которые выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (2.209). Кроме уравнений (2.209) найдем еще условия для выполнения гидродинамических уравнений (2.204) и (2.205). Проверим выполнимость уравнения (2.205). Для этого подставим равенства из (2.209) в (2.205):

$$\begin{aligned} (t\omega^1 \cos \sigma - \sin \sigma (g + N \sin \sigma)\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (g\omega^2 \sin \sigma - \cos \sigma (t + N \cos \sigma)\omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p_3 \omega^3 \sin \sigma - q_3 \omega^3 \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0; \\ (t \cos \sigma - \sin \sigma (g + N \sin \sigma))d\tau + (g \sin \sigma - \cos \sigma (t + N \cos \sigma))d\tau + \\ + (p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma)d\tau = 0; \\ t \cos \sigma + \sin \sigma g - N \sin^2 \sigma + g \sin \sigma - t \cos \sigma - N \cos^2 \sigma + p_3 \sin \sigma - \\ - q_3 \cos \sigma = 0; \\ N + p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma = 0. \end{aligned}$$

После подстановки значений для  $N$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} (q_3 + a_{33}^1) \cos \sigma - (p_3 - a_{33}^2) \sin \sigma + p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma = 0; \\ a_{33}^1 \cos \sigma + a_{33}^2 \sin \sigma = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

На основании равенства справедлива

**Теорема 2.14.** Уравнение неразрывности потока жидкости будет выполняться тогда и только тогда, когда верно равенство (\*).

Найдем условие выполнения третьего уравнения из (2.204). Для этого подставим равенства (2.209) в это уравнение:

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (g \omega^2 \cos \sigma + \sin \sigma (t + N \cos \sigma) \omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (t \omega^1 \cdot \sin \sigma + \cos \sigma (g + N \sin \sigma) \omega^1) + (-\cos \sigma a^2_{11} + \sin \sigma a^1_{22}) d\tau.$$

Сокращая на  $d\tau$ , запишем:

$$\begin{aligned} g \cos \sigma + \sin \sigma (t + N \cos \sigma) - t \sin \sigma - \cos \sigma (g + N \sin \sigma) - \cos \sigma a^2_{11} + \\ + \sin \sigma a^1_{22} = 0; \\ -\cos \sigma a^2_{11} + \sin \sigma a^1_{22} = 0. \end{aligned} \quad (**)$$

И, наконец, найдем условие выполнимости первого и второго уравнений из (2.204). Для этого подставим равенства (2.169) в эти уравнения:

$$\begin{aligned} -d\tau \cdot \frac{v^1}{v} &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left( \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3 \sin \sigma + \cos \sigma u \omega^3 \right) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge (-q_2 \omega^2 \cos \sigma + p_2 \omega^2 \sin \sigma) + (\cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}) d\tau; \\ -d\tau \cdot \frac{v^2}{v} &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \left( \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3 \cos \sigma - \sin \sigma u \omega^3 \right) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge (q_1 \omega^1 \cos \sigma - p_1 \omega^1 \sin \sigma) + (\cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} d\tau \cdot \frac{v^1}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \sin \sigma d\tau + u \cos \sigma d\tau + q_2 \cos \sigma d\tau - p_2 \sin \sigma d\tau + \\ &+ (\cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}) d\tau, \\ -d\tau \cdot \frac{v^2}{v} &= -\left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \cos \sigma d\tau + u \sin \sigma d\tau - q_1 \cos \sigma d\tau + p_1 \sin \sigma d\tau + \\ &+ (\cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau. \end{aligned}$$

После сокращения первого уравнения на  $d\tau$ , а второго на  $-d\tau$ , получим:

$$\begin{aligned} -\frac{v^1}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \sin \sigma + u \cos \sigma + q_2 \cos \sigma - p_2 \sin \sigma + \cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \\ &- \sin \sigma a^3_{22}; \\ \frac{v^2}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \cos \sigma - u \sin \sigma + q_1 \cos \sigma - p_1 \sin \sigma - \cos \sigma a^3_{11} - \\ &- \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}). \end{aligned}$$

Далее, первое уравнение умножим на  $\sin \sigma$ , а второе на  $\cos \sigma$ , запишем:

$$\begin{aligned} -\frac{v^1}{v} \sin \sigma &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \sin^2 \sigma + u \cos \sigma \sin \sigma + q_2 \cos \sigma \sin \sigma - p_2 \sin^2 \sigma + \\ &+ \cos \sigma \sin \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin^2 \sigma a^3_{22}; \end{aligned} \quad (2.210)$$

$$\frac{v^2}{v} \cos \sigma = \left( L + \frac{f'}{Sv^2} \right) \cos^2 \sigma - u \sin \sigma \cos \sigma + q_1 \cos^2 \sigma - p_1 \sin \sigma \cos \sigma - \\ - \cos^2 \sigma a^3_{11} - \cos \sigma \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}).$$

Деля обе части равенства  $S \cdot v(-v^1 \sin \sigma + v^2 \cos \sigma) = f'(S)$  на  $Sv^2$ , получим:

$$-\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = \frac{f'}{Sv^2}. \quad (2.211)$$

Сложив первое и второе уравнения из (2.210), запишем:

$$-\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = L + \frac{f'}{Sv^2} + (q_2 - p_1) \cos \sigma \sin \sigma - p_2 \sin^2 \sigma + \\ + \cos \sigma \sin \sigma (a^2_{13} - 2a^3_{12} + a^1_{23}) - \sin^2 \sigma a^3_{22} + q_1 \cos^2 \sigma - \\ - a^3_{11} \cos^2 \sigma.$$

С учетом первого равенства из (2.208), последнее переписывается:

$$-\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \sin \sigma \cos \sigma - \\ q_1 \cos^2 \sigma + \frac{f'}{Sv^2} - (p_1 - q_2 - a^2_{13} - a^1_{23}) \cos \sigma \sin \sigma - 2a^3_{12} \cos \sigma \cdot \\ \cdot \sin \sigma - p_2 \sin^2 \sigma + q_1 \cos^2 \sigma - a^3_{22} \sin^2 \sigma - a^3_{11} \cos^2 \sigma = \frac{f'}{Sv^2} -$$

$$-2a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma - a^3_{22} \sin^2 \sigma - a^3_{11} \cos^2 \sigma$$

Тем самым равенство (2.211) будет верно тогда и только тогда, когда

$$2a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma + a^3_{11} \cos^2 \sigma = 0. \quad (***)$$

Соотношение (\*\*\*) также будет условием для выполнения первого и второго уравнений из (2.204).

Для удовлетворения кинематических уравнений, наряду с (2.209) мы должны принять и условия (\*), (\*\*) и (\*\*\*). Окончательно будем иметь:

$$\frac{dv}{v} = t\omega^1 + g\omega^2 + \left( L + \frac{f'}{Sv^2} \right) \omega^3; \\ d\sigma + r = (g + N \sin \sigma) \omega^1 - (t + N \cos \sigma) \omega^2 + u \omega^3; \\ a^1_{33} \cos \sigma + a^2_{33} \sin \sigma = 0; \\ a^2_{11} \cos \sigma - a^1_{22} \sin \sigma = 0; \\ a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = 0. \quad (2.212)$$

Справедлива

**Теорема 2.15.** Для выполнения уравнений неразрывности потока жидкости, а также уравнений для компонент вихревого вектора необходимо и достаточно выполнение условий (2.212).

Так как при движении жидкости по геодезическим, расположенным на поверхностях постоянной полной энергии, будут выполняться условия  $\frac{dv}{v} = 0$  и  $d\sigma + r = 0$ , то из равенств (2.209) получим:

$$t = g = 0, L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} = 0;$$

$$g + N \sin \sigma = 0, t + N \cos \sigma = 0, u = 0.$$

Из первых условий  $t = g = 0$  будем иметь  $N \sin \sigma = 0$  и  $N \cos \sigma = 0$ . Возведя в квадрат последние равенства и складывая их, получим  $N = 0$ .

На основании последних рассуждений, имеем:

$$(p_3 - a^{2}_{33}) \sin \sigma - (q_3 + a^{1}_{33}) \cos \sigma = 0.$$

Учитывая последнее равенство из (2.206), получим:

$$a^{2}_{33} \sin \sigma + a^{1}_{33} \cos \sigma = 0. \quad (2.213)$$

При написании равенств (2.209) не одно из кинематических уравнений, то есть уравнений (2.204) и (2.205), тождественно не выполняется. Выберем эти равенства таким образом, чтобы удовлетворить какому-либо из кинематических уравнений. Примем, вначале, что при выборе выражений для  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  удовлетворилось третье уравнение из (2.204). Тогда примем:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= (t + a^{1}_{22}) \omega^1 + (g + a^{2}_{11}) \omega^2 + (L + \frac{f^\wedge}{Sv^2}) \omega^3; \\ d\sigma + r &= (g + N \sin \sigma) \omega^1 - (t + N \cos \sigma) \omega^2 + \zeta \omega^3. \end{aligned} \quad (2.214)$$

Проверим это:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge ((g + a^{2}_{11}) \omega^2 \cos \sigma + \sin \sigma (t + N \cos \sigma) \omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \\ &\wedge ((t + a^{1}_{22}) \omega^1 \sin \sigma + \cos \sigma (g + N \sin \sigma) \omega^1) + (-\cos \sigma a^{2}_{11} + \\ &+ \sin \sigma a^{1}_{22}) d\tau; \\ 0 &= (g + a^{2}_{11}) \cos \sigma d\tau + \sin \sigma (t + N \cos \sigma) d\tau - \sin \sigma (t + a^{1}_{22}) d\tau - \\ &- \cos \sigma (g + N \sin \sigma) d\tau + (-\cos \sigma a^{2}_{11} + \sin \sigma a^{1}_{22}) d\tau; \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Найдем условие для выполнения равенства (2.205). Для этого подставим равенства (2.214) в (2.205):

$$\begin{aligned} &((t + a^{1}_{22}) \omega^1 \cos \sigma - \sin \sigma (g + N \sin \sigma) \omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + ((g + a^{2}_{11}) \cdot \\ &\cdot \omega^2 \sin \sigma - \cos \sigma (t + N \cos \sigma) \omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p_3 \omega^3 \sin \sigma - q_3 \omega^3 \cos \sigma) \wedge \\ &\wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0; \\ &(t + a^{1}_{22}) \cos \sigma d\tau - \sin \sigma (g + N \sin \sigma) d\tau + (g + a^{2}_{11}) \sin \sigma d\tau - \\ &- \cos \sigma (t + N \cos \sigma) d\tau + p_3 \sin \sigma d\tau - q_3 \cos \sigma d\tau = 0. \end{aligned}$$

После сокращения на  $d\tau$ , запишем:



$$(t + a^1_{22}) \cos \sigma - \sin \sigma (g + N \sin \sigma) + (g + a^2_{11}) \sin \sigma - \cos \sigma (t + N \cos \sigma) + p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma = 0.$$

Отсюда имеем:

$$a^1_{22} \cos \sigma - N \sin^2 \sigma + a^2_{11} \sin \sigma - N \cos^2 \sigma + p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma = 0.$$

С учетом второго равенства и из (2.214), будем иметь:

$$a^1_{22} \cos \sigma + (q_3 + a^1_{33}) \cos \sigma - (p_3 - a^2_{33}) \sin \sigma + a^2_{11} \sin \sigma + p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma = 0;$$

$$(a^1_{22} + a^1_{33}) \cos \sigma + (a^2_{11} + a^2_{33}) \sin \sigma = 0. \quad (I)$$

Условие (2.215) является необходимым и достаточным условием для выполнения уравнения (2.205).

Найдем условие для выполнения первых двух равенств из (2.204). Для этого подставим равенства (2.214) в эти уравнения:

$$\begin{aligned} -d\tau \cdot \frac{v^1}{v} &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3 \sin \sigma + \cos \sigma \zeta \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge (-q_2 \omega^2 \cos \sigma + p_2 \omega^2 \sin \sigma) + (\cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}) d\tau; \\ -d\tau \cdot \frac{v^2}{v} &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \omega^3 \cos \sigma - \sin \sigma (\zeta \omega^3) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \\ &\wedge (q_1 \omega^1 \cos \sigma - p_1 \omega^1 \sin \sigma) + (\cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau. \end{aligned}$$

Эти два равенства перепишем в виде:

$$\begin{aligned} d\tau \cdot \frac{v^1}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \sin \sigma d\tau + \zeta \cos \sigma d\tau + q_2 \cos \sigma d\tau - p_2 \sin \sigma d\tau + \\ &+ (\cos \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}) d\tau; \\ d\tau \cdot \frac{v^2}{v} &= - \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \cos \sigma d\tau + \zeta \sin \sigma d\tau - q_1 \cos \sigma d\tau + \\ &+ p_1 \sin \sigma d\tau + (\cos \sigma a^3_{11} + \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau. \end{aligned}$$

После сокращения первого уравнения на  $d\tau$ , а второго на  $-d\tau$ , получим:

$$\begin{aligned} -\frac{v^1}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \sin \sigma + \zeta \cos \sigma + q_2 \cos \sigma - p_2 \sin \sigma + (\cos \sigma a^2_{13} - \\ &- a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}; \\ \frac{v^2}{v} &= \left( L + \frac{f^1}{Sv^2} \right) \cos \sigma - \zeta \sin \sigma + q_1 \cos \sigma - p_1 \sin \sigma - \cos \sigma a^3_{11} - \\ &- \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}). \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на  $\sin \sigma$ , а второе на  $\cos \sigma$  и складывая их, будем получать:



*Раньше народ увлекался спиритическими сеансами. Как это ни странно, но с развитием научного мировоззрения страсть к мистическим играм не ослабевает. Только в наше время это называется экстрасенсорикой, парапсихологией, биоэнергетикой, уфологией и пр. Человек мазохистски любит время от времени быть одуроченным. Так стоит ли создавать высокоученые комитеты по борьбе с лженаукой? Зачем лишать людей удовольствия?*

$$\begin{aligned}
& -\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = \left( L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} \right) \sin^2 \sigma + \zeta \cos \sigma \sin \sigma + q_2 \cos \sigma \sin \sigma - \\
& - p_2 \sin^2 \sigma + \cos \sigma \sin \sigma (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin^2 \sigma a^3_{22} + \left( L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} \right) \cos^2 \sigma - \\
& - \zeta \cos \sigma \sin \sigma + q_1 \cos^2 \sigma - p_1 \sin \sigma \cos \sigma - \cos^2 \sigma a^3_{11} - \cos \sigma \sin \sigma \cdot \\
& \cdot (a^3_{12} - a^1_{23})
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& -\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} + q_2 \cos \sigma \sin \sigma - p_2 \sin^2 \sigma + \cos \sigma \sin \sigma \cdot \\
& \cdot (a^2_{13} - a^3_{12}) - a^3_{22} \sin^2 \sigma + q_1 \cos^2 \sigma - p_1 \sin \sigma \cos \sigma - a^3_{11} \cos^2 \sigma - \\
& - \cos \sigma \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}).
\end{aligned}$$

С учетом первого равенства из (2.208), последнее равенство переписывается:

$$\begin{aligned}
& -\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) \sin \sigma \cos \sigma - \\
& - q_1 \cos^2 \sigma + \frac{f^\wedge}{Sv^2} - (p_1 - q_2 - a^2_{31} - a^1_{32}) \sin \sigma \cos \sigma - p_2 \sin^2 \sigma - \\
& - 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma - a^3_{22} \sin^2 \sigma + q_1 \cos^2 \sigma - a^3_{11} \cos^2 \sigma.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$-\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = \frac{f^\wedge}{Sv^2} - a^3_{11} \cos^2 \sigma - 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma - a^3_{22} \sin^2 \sigma.$$

С учетом формулы (2.211), первые два уравнения из системы (2.204) выполняются тогда и только тогда, когда

$$a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = 0. \quad (\text{II})$$

Тем самым, при выборе  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  для удовлетворения указанным выше

кинематическим уравнениям, должны принять равенства (I) и (II):

$$\begin{aligned}
& (a^1_{22} + a^1_{33}) \cos \sigma + (a^2_{11} + a^2_{33}) \sin \sigma = 0; \\
& a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = 0.
\end{aligned} \quad (2.215)$$

Разрешим систему (2.215) относительно  $\cos \sigma$  и  $\sin \sigma$ , при условии неравенства первого нулю, получаем для удовлетворения кинематических уравнений одно условие:

$$a^3_{11} - 2a^3_{12} \frac{a^1_{22} + a^1_{33}}{a^2_{11} + a^2_{33}} + a^3_{22} \left( \frac{a^1_{22} + a^1_{33}}{a^2_{11} + a^2_{33}} \right)^2 = 0. \quad (2.216)$$

Если рассмотреть движение жидкости по геодезическим, лежащим на поверхностях постоянной полной энергии, то к равенствам (2.206), в этом

случае, из равенств (2.214) добавятся следующие (из условий  $\frac{dv}{v} = 0$  и  $d\sigma + r = 0$ ):

$$t + a^{122} = 0; \quad g + a^{211} = 0; \quad L + \frac{f^{\wedge}}{Sv^2} = 0; \\ g + N \sin \sigma = 0; \quad t + N \cos \sigma = 0; \quad \zeta = 0. \quad (2.217)$$

Из равенств (2.217) получаем:

$$N^2 = (a^{211})^2 + (a^{122})^2. \quad (2.218)$$

Равенство (2.218) заменяет равенства, стоящие в первом и втором столбцах соотношений из (2.217).

Пусть теперь  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  выбраны таким образом, что выполняется уравнение неразрывности потока, то есть уравнение (2.205). В этом случае положим:

$$\frac{dv}{v} = (t + a^{122})\omega^1 + (g + a^{211})\omega^2 + (L + \frac{f^{\wedge}}{Sv^2})\omega^3; \quad (2.219) \\ d\sigma + r = (g + a^{211} + a^{233} + N \sin \sigma)\omega^1 - (t + a^{122} + a^{133} + N \cos \sigma)\omega^2 + \\ + \zeta\omega^3.$$

Проверим тождественную выполнимость уравнения (2.205). Для этого подставим значения для  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  из (2.219) в (2.205):

$$((t + a^{122})\omega^1 \cos \sigma - \sin \sigma (g + a^{211} + a^{233} + N \sin \sigma)\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \\ + ((g + a^{211})\omega^2 \sin \sigma - \cos \sigma (t + a^{122} + a^{133} + N \cos \sigma)\omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ + (p_3 \omega^3 \sin \sigma - q_3 \omega^3 \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

или

$$(t + a^{122}) \cos \sigma d\tau - \sin \sigma (g + a^{211} + a^{233} + N \sin \sigma) d\tau + (g + \\ + a^{211}) \sin \sigma d\tau - \cos \sigma (t + a^{122} + a^{133} + N \cos \sigma) d\tau + (p_3 \sin \sigma - \\ - q_3 \cos \sigma) d\tau = 0.$$

После сокращения на  $d\tau$  и после приведения подобных слагаемых, будем иметь:

$$a^{233} \sin \sigma + N + a^{133} \cos \sigma - p_3 \sin \sigma + q_3 \cos \sigma = 0.$$

Подставим значение для  $N$  из (2.208) в последнее равенство и после чего получим:

$$a^{233} \sin \sigma + (p_3 - a^{233}) \sin \sigma - (q_3 + a^{133}) \cos \sigma + a^{133} \cos \sigma - p_3 \sin \sigma + \\ + q_3 \cos \sigma = 0.$$

Отсюда видно, что равенство (2.205), при выборе  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  как в (2.219), выполняется тождественно.

Найдем условие для выполнения третьего равенства из (2.204). Для этого подставим равенства (2.180) в это равенство. Получим:

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge ((g + a^2_{11})\omega^2 \cos\sigma + \sin\sigma(t + a^1_{22} + a^1_{33} + N \cos\sigma)\omega^2 + \\ + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge ((t + a^1_{22})\omega^1 \sin\sigma + \cos\sigma(g + a^2_{11} + a^2_{33} + N \sin\sigma)\omega^1) + \\ + (-\cos\sigma a^2_{11} + \sin\sigma a^1_{22}) d\tau$$

или

$$0 = (g + a^2_{11}) \cos\sigma d\tau + \sin\sigma(t + a^1_{22} + a^1_{33} + N \cos\sigma) d\tau - (t + \\ + a^1_{22}) \sin\sigma d\tau - \cos\sigma(g + a^2_{11} + a^2_{33} + N \sin\sigma) d\tau + (-\cos\sigma a^2_{11} + \\ + \sin\sigma a^1_{22}) d\tau.$$

После сокращения обеих частей на  $d\tau$  и приведения подобных, будем иметь:

$$(a^1_{33} + a^1_{22})\sin\sigma - (a^2_{11} + a^2_{33}) \cos\sigma = 0. \quad (a)$$

Таким образом, третье равенство из (2.204) выполняется тогда и только тогда, когда верно равенство (а). И, наконец, найдем условие для выполнения первых двух равенств из (2.219). Для этого подставим соотношения (2.204) в эти уравнения.

$$d\tau \cdot \frac{v^1}{v} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge ((L + \frac{f^1}{Sv^2})\omega^3 \sin\sigma + \cos\sigma \zeta \omega^3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \\ \wedge (-q_2 \omega^2 \cos\sigma + p_2 \omega^2 \sin\sigma) + (\cos\sigma(a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin\sigma a^3_{22}) d\tau; \\ - d\tau \cdot \frac{v^2}{v} = \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge ((L + \frac{f^1}{Sv^2})\omega^3 \cos\sigma - \sin\sigma \zeta \omega^3) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \\ \wedge (q_1 \omega^1 \cos\sigma - p_1 \omega^1 \sin\sigma) + (\cos\sigma a^3_{11} + \sin\sigma(a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau$$

или

$$d\tau \cdot \frac{v^1}{v} = (L + \frac{f^1}{Sv^2})\sin\sigma d\tau + \zeta \cos\sigma d\tau + q_2 \cos\sigma d\tau - p_2 \sin\sigma d\tau + \\ + (\cos\sigma(a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin\sigma a^3_{22}) d\tau; \\ d\tau \cdot \frac{v^2}{v} = -(L + \frac{f^1}{Sv^2})\cos\sigma d\tau + \zeta \sin\sigma d\tau - q_1 \cos\sigma d\tau + p_1 \sin\sigma d\tau + \\ + (\cos\sigma a^3_{11} + \sin\sigma(a^3_{12} - a^1_{23})) d\tau.$$

Сокращая первое уравнение на элемент объема, а второе на эту же величину, но с противоположным знаком, получим:

$$-\frac{v^1}{v} = (L + \frac{f^1}{Sv^2})\sin\sigma + \zeta \cos\sigma + q_2 \cos\sigma - p_2 \sin\sigma + \cos\sigma(a^2_{13} -$$

$$\begin{aligned} & -a^3_{12}) - \sin \sigma a^3_{22}; \\ \frac{v^2}{v} = & (L + \frac{f^\wedge}{Sv^2}) \cos \sigma - \zeta \sin \sigma + q_1 \cos \sigma - p_1 \sin \sigma - \cos \sigma a^3_{11} - \\ & - \sin \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}). \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $\sin \sigma$ , а второе на  $\cos \sigma$  и сложив эти два равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} -\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = & L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} + q_2 \cos \sigma \sin \sigma - p_2 \sin^2 \sigma + \cos \sigma \sin \sigma \cdot \\ \cdot (a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin^2 \sigma a^3_{22} + & q_1 \cos^2 \sigma - p_1 \sin \sigma \cos \sigma - \cos^2 \sigma a^3_{11} - \\ - \sin \sigma \cos \sigma (a^3_{12} - a^1_{23}). \end{aligned}$$

С учетом равенств (2.208), последнее равенство примет вид:

$$\begin{aligned} -\frac{v^1}{v} \sin \sigma + \frac{v^2}{v} \cos \sigma = & \frac{f^\wedge}{Sv^2} - 2 a^3_{12} \sin \sigma \cos \sigma - a^3_{22} \sin^2 \sigma - \\ - a^3_{11} \cos^2 \sigma. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (2.211), последнее равенство будет верно тогда и только тогда, когда

$$a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = 0. \quad (\text{б})$$

Если выражения для  $\frac{dv}{v}$  и  $d\sigma + r$  имеют вид (2.219), то кинематические уравнения будут выполняться тогда и только тогда, когда верны условия (а) и (б), то есть:

$$\begin{aligned} (a^1_{33} + a^1_{22}) \sin \sigma - (a^2_{11} + a^2_{33}) \cos \sigma = & 0; \\ a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = & 0. \end{aligned} \quad (2.220)$$

Разрешим систему (2.220) относительно  $\cos \sigma$  и  $\sin \sigma$  и примем, что первая величина не равна нулю, после чего получим условие для выполнения кинематических уравнений:

$$a^3_{11} + 2a^3_{12} \frac{a^2_{11} + a^2_{33}}{a^1_{33} + a^1_{22}} + a^3_{22} \left( \frac{a^2_{11} + a^2_{33}}{a^1_{33} + a^1_{22}} \right)^2 = 0. \quad (2.221)$$

Если рассмотреть теперь движение жидкости по геодезическим, лежащим на поверхностях постоянной полной энергии, то к равенствам (2.206) нужно присоединить, исходя из условий  $\frac{dv}{v} = 0$  и  $d\sigma + r = 0$ , следующие равенства из (2.219):

$$\begin{aligned} t + a^1_{22} = 0; \quad g + a^2_{11} = 0; \quad L + \frac{f^\wedge}{Sv^2} = & 0; \\ g + a^2_{11} + a^2_{33} + N \sin \sigma = 0; \quad t + a^1_{22} + a^1_{33} + N \cos \sigma = & 0; \quad \zeta = 0. \end{aligned}$$

С учетом равенств, записанных в первой строке, будем иметь:

$$a^2_{33} + N \sin \sigma = 0; \quad a^1_{33} + N \cos \sigma = 0.$$

Откуда

$$N^2 = (a^1_{33})^2 + (a^2_{33})^2, \quad (2.222)$$

При движении по геодезическим, лежащим на поверхностях постоянной полной энергии, для данного случая будем иметь:

$$\sin \sigma = -\frac{a^2_{33}}{N}; \quad \cos \sigma = -\frac{a^1_{33}}{N}.$$

После подстановки этих равенств в (2.208) получим:

$$N^2 = (q_3 + a^1_{33})a^1_{33} - (p_3 - a^2_{33})a^2_{33} = q_3 a^1_{33} + (a^1_{33})^2 - p_3 a^2_{33} + (a^2_{33})^2.$$

С учетом (2.222) из последнего равенства будем иметь:

$$q_3 a^1_{33} - p_3 a^2_{33} = 0. \quad (2.223)$$

В этом случае к равенствам (2.206) добавляется равенство (2.223).

В уравнениях (2.212) получаем новые неизвестные функции  $t$ ,  $g$  и эти функции выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (2.212). Нахождение этих функций упрощается, если жидкость движется по геодезическим линиям, лежащим на поверхностях постоянной полной энергии. В этом случае  $t = -N \cos \sigma$ ,  $g = -N \sin \sigma$  и  $u = 0$ .

Уравнения (2.212) являются основными кинематическими уравнениями потока в субпроективном пространстве и служат исходными уравнениями для изучения потока, для которого существуют поверхности полной энергии, которые являются интегральными многообразиями для данного репера. В этом случае вектора второго порядка, задающие репер второго порядка, будут симметричны по нижним индексам.

Уравнения (2.212) для случая движения жидкости по геодезическим, лежащим на поверхностях постоянной полной энергии будут иметь вид:

$$t = 0; \quad g = 0; \quad L + \frac{f^{\wedge}}{Sv^2} = 0;$$

$$N = 0; \quad u = 0;$$

$$a^1_{33} \cos \sigma + a^2_{33} \sin \sigma = 0;$$

$$a^2_{11} \cos \sigma - a^1_{22} \sin \sigma = 0;$$

$$a^3_{11} \cos^2 \sigma + 2 a^3_{12} \cos \sigma \sin \sigma + a^3_{22} \sin^2 \sigma = 0.$$

**Уравнения Гельмгольца для движения жидкости в субпроективном пространстве.** Гидродинамические уравнения Гельмгольца для точки  $x$ , принадлежащей потоку жидкости для субпроективного пространства запишем в виде:

$$(\bar{v} \text{ grad})\bar{v} = (\bar{v} \text{ grad})\bar{v}, \quad (2.224)$$

где скобки обозначают скалярное произведение вектора на оператор «набла». Это уравнение лежит в основе изучения распределения вихрей в соуде. В репере, связанном с точкой  $x$ , принадлежащей окрестности  $U$ , имеем:

$$(\bar{v} \text{ grad})\bar{v} = (\bar{v} \text{ grad} v^1)\bar{e}_1 + (\bar{v} \text{ grad} v^2)\bar{e}_2 + (\bar{v} \text{ grad} v^3)\bar{e}_3.$$

Аналогично

$$(\bar{v} \text{ grad})\bar{v} = (\bar{v} \text{ grad} v^1)\bar{e}_1 + (\bar{v} \text{ grad} v^2)\bar{e}_2 + (\bar{v} \text{ grad} v^3)\bar{e}_3.$$

Исходя из формулы (2.171) имеем:

$$\text{grad} v^A = \frac{e^1 dv^A \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 dv^A \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 dv^A \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}$$

и

$$\text{grad} v^A = \frac{e^1 dv^A \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 dv^A \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 dv^A \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}.$$

На основании последних двух формул, получим:

$$\begin{aligned} (\bar{v} \text{ grad})\bar{v} &= (v^1 \frac{dv^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{dv^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{dv^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\bar{e}_1 + \\ &+ (v^1 \frac{dv^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{dv^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{dv^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\bar{e}_2 + \\ &+ (v^1 \frac{dv^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{dv^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{dv^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\bar{e}_3 = \\ &= (v^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}) \wedge d\bar{v} = \\ &= \Omega_{\bar{v}} \wedge d\bar{v}, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{\bar{v}} = v^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}$$

билинейная внешняя форма.

Аналогично получим:

$$(\bar{v} \text{ grad})\bar{v} = \Omega_{\bar{v}} \wedge d\bar{v},$$

где



$$\Omega_{\vec{v}} = v^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + v^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} -$$

билинейная внешняя форма.

Равенство (2.224), с учетом последних рассуждений, примет вид:

$$\Omega_{\vec{v}} \wedge d\vec{v} = \Omega_{\vec{v}} \wedge d\vec{v}. \quad (2.225)$$

Дифференцируя равенство  $\vec{v} = v^A \vec{e}_A$ , получим:

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}.$$

Аналогично

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}. \quad (2.226)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{v}} \wedge d\vec{v} &= \Omega_{\vec{v}} \wedge ((dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}) = \Omega_{\vec{v}} \wedge ((dv^A + \\ &+ v^B \omega_B^A) \vec{e}_A) + v^B v^A \vec{e}_{AB}. \end{aligned}$$

Аналогично получим:

$$\Omega_{\vec{v}} \wedge d\vec{v} = \Omega_{\vec{v}} \wedge ((dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^B v^A \vec{e}_{AB}).$$

Тогда равенства (2.225) примут вид:

$$\begin{aligned} \Omega_{\vec{v}} \wedge ((dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^B v^A \vec{e}_{AB}) &= \Omega_{\vec{v}} \wedge ((dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A) + \\ &+ v^B v^A \vec{e}_{AB}. \end{aligned}$$

Тем самым, уравнение (2.225) можно записать в виде трех уравнений:

$$\Omega_{\vec{v}} \wedge (dv^A + v^B \omega_B^A) = \Omega_{\vec{v}} \wedge (dv^A + v^B \omega_B^A). \quad (2.227)$$

Равенства (2.227) называются обобщенными уравнениями Гельмгольца и в случае симметричности векторов  $\vec{e}_{AB}$  по нижним индексам, совпадают с аналогичными уравнениями в евклидовом пространстве.

Пусть вектор  $\vec{e}_3$  является касательным к конгруэнции линий тока жидкости, то есть  $\vec{v} = v \vec{e}_3$ . Тогда уравнения Гельмгольца примут вид:

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^1 + v^2 \omega_2^1 + v^3 \omega_3^1) &= \Omega_{\vec{v}} \wedge \omega_3^1; \\ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1 \omega_1^2 + v^3 \omega_3^2) &= \Omega_{\vec{v}} \wedge \omega_3^2; \\ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^3 + v^1 \omega_1^3 + v^2 \omega_2^3) &= \Omega_{\vec{v}} \wedge \frac{dv}{v}, \end{aligned}$$

где принято  $\Omega_{\vec{v}} = v^1 \omega^2 \wedge \omega^3 + v^2 \omega^3 \wedge \omega^1 + v^3 \omega^1 \wedge \omega^2$ .

#### 2.4. Геометрия стационарного движения жидкости в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам

Пусть жидкость движется турбулентно и из одной точки сосуда в другую частица жидкости смещается по некоторому пути. То есть не существует поверхности, на которых бы располагались линии тока и вихревые линии. Поэтому рассмотрение геометрии такого движения частиц жидкости удобнее проводить как геометрию движения в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам.

В касательном пространстве к трехмерному субпроективному пространству зададим репер, определяемый точкой  $x \in C^3$  и векторами первого и второго порядка. Уравнения перемещения такого репера имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \quad (2.228)$$

где  $\vec{e}_{AB}$  — векторы, образующие совместно с векторами первого порядка, репер второго порядка, а также

$$\vec{e}_{AB} \neq \vec{e}_{BA}.$$

Формы  $\omega^1, \omega^2, \omega^3$  являются линейно-независимыми и  $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ . Дифференциальные формы  $\omega^A$  и  $\omega^A_B$  из уравнений (2.228) удовлетворяют уравнениям структуры субпроективного пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B; \quad D\omega^A_B = \omega^K_B \wedge \omega^A_K + R^A_{BKL} \omega^K \wedge \omega^L, \quad (2.229)$$

где  $R^A_{BKL}$  — тензор кривизны субпроективного пространства.

В качестве структурной группы этого пространства возьмем ортогональную группу  $O(3)$ , инвариантные формы которой удовлетворяют уравнениям  $\sigma^B_A + \sigma^A_B = 0$ , где  $\omega^A_B (\omega^A = 0) = \sigma^A_B$ . Тогда формы  $\omega^A_B$  также удовлетворяют уравнениям:

$$\omega^A_B + \omega^B_A = 0; \quad \omega^A_A = 0. \quad (2.230)$$

Как это делалось и раньше, найдем выражение для градиента функции  $\varphi$ , дивергенцию и ротор для рассматриваемого субпроективного пространства.

Выражение для градиента функции, как легко видно, будет иметь точно такой же вид, как и в случае евклидова пространства, так и для субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу:

$$\text{grad } \varphi = \frac{e^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}, \quad (2.231)$$

где  $e^1, e^2, e^3$  — взаимные векторы к векторам данного репера.

Пусть  $\vec{v}$  — вектор скорости частицы жидкости, который представим в

виде  $\vec{v} = v^A \vec{e}_A$ . Дифференцируя это равенство и используя второе равенство из (2.228), получим:

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB}. \quad (2.232)$$

Будем рассматривать ортогональный репер, для которого все базисные вектора первого порядка являются единичными. Дифференцируя их и используя (2.228), получим:

$$\omega_A^A + \omega^B \vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0.$$

С учетом (2.230) и в виду линейной независимости форм  $\omega^B$ , из последних равенств получим:

$$\vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0. \quad (2.233)$$

На основании равенств (2.233) распишем произведения векторов первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \vec{e}_{12} = 0; & \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{21} = 0; & \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{31} = 0; \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{13} = 0; & \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{22} = 0; & \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{32} = 0; \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{11} = 0; & \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{23} = 0; & \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{33} = 0. \end{aligned} \quad (2.234)$$

На основании равенств (2.234), имеем:

$$\vec{e}_{AB} = a_{AB}^K \vec{e}_K \quad (K \neq A). \quad (2.235)$$

Обозначим через  $d\tau$  — элемент объема. Тогда дивергенцию вектора скорости получим, используя теорему Гаусса-Остроградского для объема параллелепипеда, образованного в произвольной точке сосуда или биосистеме векторами трех произвольных элементарных перемещений  $d_1 \vec{x}$ ,  $d_2 \vec{x}$ ,  $d_3 \vec{x}$ . Тогда  $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$  — для ортогонального репера.

После несложных вычислений, которые проводились и ранее, получим:

$$\text{div } \vec{v} d\tau = d_1 \vec{v} d_2 \vec{x} d_3 \vec{x} + d_2 \vec{v} d_3 \vec{x} d_1 \vec{x} + d_3 \vec{v} d_1 \vec{x} d_2 \vec{x}. \quad (2.236)$$

С учетом (2.235) равенство (2.232) примет вид:

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B a_{AB}^K \vec{e}_K, \quad (K \neq A).$$

Тогда формула (2.236) будет иметь вид:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \text{div } \vec{v} = \begin{vmatrix} d_1 v^1 + v^B \omega_B^1 + v^K a_{KB}^1 \omega^B (K \neq 1) & \omega^2 & \omega^3 \\ d_1 v^2 + v^B \omega_B^2 + v^K a_{KB}^2 \omega^B (K \neq 2) & \omega^2 & \omega^3 \\ d_1 v^3 + v^B \omega_B^3 + v^K a_{KB}^3 \omega^B (K \neq 3) & \omega^2 & \omega^3 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{l} d_2 v^1 + v^B \omega_B^2 + v^K a_{KB}^1 \omega^B (K \neq 1) \quad \omega^3 \quad \omega^1 \\ d_2 v^2 + v^B \omega_B^2 + v^K a_{KB}^2 \omega^B (K \neq 2) \quad \omega^3 \quad \omega^2 \\ d_2 v^3 + v^B \omega_B^3 + v^K a_{KB}^3 \omega^B (K \neq 3) \quad \omega^3 \quad \omega^3 \end{array} \right| + \\
& \left| \begin{array}{l} d_3 v^1 + v^B \omega_B^3 + v^K a_{KB}^1 \omega^B (K \neq 1) \quad \omega^1 \quad \omega^2 \\ d_3 v^2 + v^B \omega_B^3 + v^K a_{KB}^2 \omega^B (K \neq 2) \quad \omega^1 \quad \omega^2 \\ d_3 v^3 + v^B \omega_B^3 + v^K a_{KB}^3 \omega^B (K \neq 3) \quad \omega^1 \quad \omega^3 \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

После преобразований в правой части, получаем:

$$\begin{aligned}
\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \operatorname{div} \vec{v} &= (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\
&+ (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v^K a_{KA}^A) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3, \quad (2.237)
\end{aligned}$$

где в последнем слагаемом предполагается вначале сумма по  $A$ , а затем сумма по  $K \neq A$ .

Для нахождения выражения для ротора вектора скорости жидкости воспользуемся формулой:

$$\iiint \operatorname{rot} \vec{v} \, d\tau = - \oint\!\!\!\oint [\vec{v}, \vec{d}\sigma],$$

где  $\vec{d}\sigma$  — вектор элемента поверхности.

Применив последнюю формулу к объему  $d\tau$ , получим:

$$\begin{aligned}
-\operatorname{rot} \vec{v} \, d\tau &= [(\vec{v} + d_1 \vec{v}), (\vec{d}\sigma_{23} + d_1 \vec{d}\sigma_{23})] + [\vec{v}, \vec{d}\sigma_{32}] + [(\vec{v} + d_2 \vec{v}), (\vec{d}\sigma_{31} + \\
&+ d_2 \vec{d}\sigma_{31})] + [\vec{v}, \vec{d}\sigma_{13}] + [(\vec{v} + d_3 \vec{v}), (\vec{d}\sigma_{12} + d_3 \vec{d}\sigma_{12})] + [\vec{v}, \vec{d}\sigma_{21}],
\end{aligned}$$

где  $\vec{d}\sigma_{AB} = [d_A \vec{x}, d_B \vec{x}]$  — элемент поверхности в точке  $x$ , образованный векторами, стоящими в скобках, обозначающих их векторное произведение.

Так как  $d_1(\vec{d}\sigma_{23}) + d_2(\vec{d}\sigma_{31}) + d_3(\vec{d}\sigma_{12}) = 0$ , то запишем:

$$-\operatorname{rot} \vec{v} \, d\tau = [d_1 \vec{v}, [d_2 \vec{x}, d_3 \vec{x}]] + [d_2 \vec{v}, [d_3 \vec{x}, d_1 \vec{x}]] + [d_3 \vec{v}, [d_1 \vec{x}, d_2 \vec{x}]].$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
& -rot \bar{v} d\tau = -d_1 \bar{x} \{ ((dv^A + v^B \omega_B^A) \wedge \omega^K)_{23} \bar{e}_A \bar{e}_K + (v^A \omega^B a_{AB}^K \wedge \omega^L)_{23} \bar{e}_K \bar{e}_L \} - \\
& -d_2 \bar{x} \{ ((dv^A + v^B \omega_B^A) \omega^K)_{31} \bar{e}_A \bar{e}_K + ((v^A \omega^B a_{AB}^K) \wedge \omega^L)_{31} \bar{e}_K \bar{e}_L \} - \\
& -d_3 \bar{x} \{ ((dv^A + v^B \omega_B^A) \wedge \omega^K)_{12} \bar{e}_A \bar{e}_K + ((v^A \omega^B a_{AB}^K) \wedge \omega^L)_{12} \bar{e}_K \bar{e}_L \}.
\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}
rot \bar{v} d\tau = & -\bar{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge (dv^K + v^L \omega_L^K) (\bar{e}_B \bar{e}_K) - \bar{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge \\
& \wedge (v^K \omega^L a_{KL}^S) (\bar{e}_B \bar{e}_S). \tag{2.238}
\end{aligned}$$

В ортогональном репере равенство (2.238) переписывается в виде:

$$\begin{aligned}
-rot \bar{v} d\tau = & \bar{e}_1 (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega_L^3) + \\
& + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K3}^2) - \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K2}^3)) + \bar{e}_2 (\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + \\
& + v^L \omega_L^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega_L^3) - \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K3}^1) + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \\
& \cdot (v^K a_{K1}^3)) + \bar{e}_3 (\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega_L^1) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + \\
& + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K2}^1) - \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K1}^2)).
\end{aligned}$$

Так как в случае ортогонального репера имеем  $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ , то последнее равенство переписывается в виде:

$$\begin{aligned}
-rot \bar{v} d\tau = & \bar{e}_1 (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega_L^3) + \\
& + d\tau (v^K a_{K3}^2 - v^K a_{K2}^3)) + \bar{e}_2 (\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega_L^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + \\
& + v^L \omega_L^3) + d\tau (v^K a_{K3}^1 - v^K a_{K1}^3)) + \bar{e}_3 (\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega_L^1) + \\
& + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + d\tau (v^K a_{K2}^1 - v^K a_{K1}^2)). \tag{2.239}
\end{aligned}$$

Как видно из равенства (2.239), выражение для ротора вектора скорости в этом случае сложнее, чем для евклидова пространства.

**Некоторые уравнения гидродинамики для субпроективного пространства, отнесенного к неголономным реперам.** Полученные в предыдущем разделе формулы для градиента, дивергенции и ротора позволяют записать основные уравнения гидродинамики для того случая, когда геометрия биосистемы ассоциируется с геометрией субпроективного пространства, отнесенного к неголономным реперам.

Уравнение  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v})$  называется уравнением неразрывности потока жидкости. Ввиду несжимаемости жидкости, ее объемный расход через замкнутую поверхность  $S$  должен быть равен нулю. Последнее соотношение, на основании формулы Гаусса-Остроградского, дает:

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (2.240)$$

С учетом (2.240), равенство (2.237) примет вид:

$$(d v^1 + v^B \omega^1_B) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d v^2 + v^B \omega^2_B) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (d v^3 + v^B \omega^3_B) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v^K a^K_{KA}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0. \quad (2.241)$$

Выбирая вектор  $\vec{e}_3$  по направлению касательной линии тока, перепишем соотношение (2.241) в виде:

$$v \omega^1_3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + v \omega^2_3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (d v) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (v^K a^K_{KA}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0.$$

С учетом обозначений  $\omega^1_3 = -\omega^3_1 = q_A \omega^A = q$ ;  $\omega^3_2 = -\omega^2_3 = p_A \omega^A = p$ , последнее переписывается:

$$v q_1 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - v p_2 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + d v \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + v(a^1_{31} + a^2_{32}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0.$$

Или

$$d v \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + v(q_1 - p_2) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + v(a^1_{31} + a^2_{32}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0.$$

А также

$$\frac{d v}{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - (a^1_{31} + a^2_{32}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\left( \frac{d \ln v}{ds} \right) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = (p_2 - q_1 - (a^1_{31} + a^2_{32})) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

или

$$\frac{d \ln v}{ds} = p_2 - q_1 - (a^1_{31} + a^2_{32}). \quad (2.242)$$

Правая часть равенства (2.242) является средней кривизной векторного поля или средней кривизной линий тока жидкости. Справедлива

**Теорема 2.16.** В каждой точке потока жидкости логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруэнций линий тока жидкости.

Правая часть равенства (2.242) обращается в нуль тогда и только тогда, когда разность  $p_2 - q_1$  равна сумме первой и второй координат векторов второго порядка  $\vec{e}_{31}$  и  $\vec{e}_{32}$  соответственно.

Конгруэнция линий тока в субпроективном пространстве, отнесенного к неголономному реперу, для которой  $p_2 - q_2 - (a^1_{31} + a^2_{32}) = 0$ , назовем минимальной конгруэнцией. Тем самым доказана

**Теорема 2.17.** *Величина скорости потока жидкости в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам, постоянна вдоль некоторой линии тогда и только тогда, когда данная линия представляет собой линию, принадлежащую минимальной конгруэнции.*

Пусть, как всегда, вихревой вектор имеет следующий вид:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} v^A \vec{e}_A. \quad (2.243)$$

Тогда из формулы (2.239) определим компоненты вихря:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega^2_L) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega^3_L) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a^2_{K3} - v^K a^3_{K2}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega^1_L) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega^3_L) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a^3_{K1} - v^K a^1_{K3}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega^1_L) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega^2_L) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a^1_{K2} - v^K a^2_{K1}). \end{aligned}$$

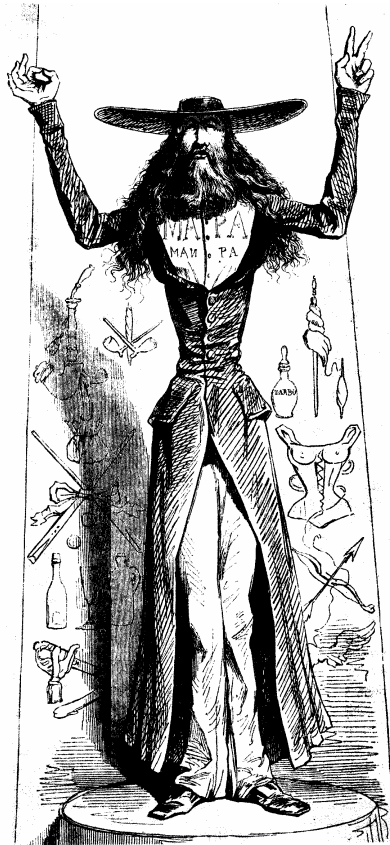
Направим вектор  $\vec{e}_3$  по касательной линии тока. Тогда последние формулы примут вид:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (v \omega^2_3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge dv + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v a^2_{33}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (v \omega^1_3) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge dv + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (-v a^1_{33}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (v \omega^1_3) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (v \omega^2_3) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v a^1_{32} - v a^2_{31}). \end{aligned}$$

С учетом введенных выше обозначений для форм  $\omega^1_3$  и  $\omega^2_3$ , а также  $\omega^3_2$  и  $\omega^2_3$  и  $dv = v_A \omega^A$ , запишем:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-v p_3 \omega^3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge v_2 \omega^2 + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v a^2_{33}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (v q_3 \omega^3) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge v_1 \omega^1 + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (-v a^1_{33}); \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (v q_2 \omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-v p_1 \omega^1) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v a^1_{32} - v a^2_{31}). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:



*Господи! Сколько же соблазнов на пути к познанию истины: женщины и вино, кальян и эполеты воина, мирская слава и покой домашнего очага... Все и вся сговорились против подвижника науки. Тем не менее — это суть диалектики познания: сопротивление нарастает по мере приближения к истине. А последняя, словно дразня, все дальше и дальше отбегает от своего преследователя...*



$$\begin{aligned}
-v^1 &= -v p_3 - v_2 + v a^2_{33}; \\
-v^2 &= -v q_3 + v_1 - v a^1_{33}; \\
-v^3 &= v q_2 + v p_1 + v a^1_{32} - v a^2_{31}.
\end{aligned} \tag{2.244}$$

Из последней формулы системы (2.244) получим:

$$\frac{v^3}{v} = -(q_2 + p_1 + a^1_{32} - a^2_{31}). \tag{2.245}$$

Гауссова кривизна векторного поля  $\vec{e}_3$ , коллинеарного вектору скорости, будет равна:

$$\begin{aligned}
K_g &= -(p_2 - \vec{e}_{32} \vec{e}_2)(q_1 + \vec{e}_{31} \vec{e}_1) - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - \vec{e}_{32} \vec{e}_1 - \vec{e}_{31} \vec{e}_2)^2 = -p_2 q_1 + \\
&+ q_1 \vec{e}_{32} \vec{e}_2 - p_2 \vec{e}_{31} \vec{e}_1 + (\vec{e}_{32} \vec{e}_2)(\vec{e}_{31} \vec{e}_1) - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - \vec{e}_{32} \vec{e}_1 - \vec{e}_{31} \vec{e}_2)^2 = \\
&= -p_2 q_1 + q_1 (a^1_{32} \vec{e}_1 + a^2_{32} \vec{e}_2) \vec{e}_2 - p_2 (a^1_{31} \vec{e}_1 + a^2_{31} \vec{e}_2) \vec{e}_1 + a^2_{32} a^1_{31} - \frac{1}{4}(p_1 - \\
&- q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})^2 = -p_2 q_1 + q_1 a^2_{32} - p_2 a^1_{31} + a^2_{32} a^1_{31} - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})^2.
\end{aligned}$$

Пусть  $d_1 \vec{x}$  и  $d_2 \vec{x}$  — два перемещения, ортогональных векторному полю  $\vec{e}_3$ . Рассмотрим отношение объемов параллелепипедов, построенных на тройке  $\vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_3$  и на тройке  $\vec{e}_3, d_1 \vec{x}, d_2 \vec{x}$  в окрестности  $U$  точки  $x$  субпроективного пространства, отнесенного к неголономным реперам и это отношение назовем полной кривизной поля  $K_t$ . На основании этого запишем:

$$\begin{aligned}
K_t &= \frac{\vec{e}_3 (\vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_3)}{\vec{e}_3 d_1 \vec{x} \wedge d_2 \vec{x}} = \\
&= \frac{\vec{e}_3 (\vec{e}_3 + (q + \omega^B a^1_{3B}) \vec{e}_1) \wedge (\vec{e}_3 + (-p + \omega^B a^2_{3B}) \vec{e}_2)}{\vec{e}_3 d_1 \vec{x} \wedge d_2 \vec{x}} = \\
&+ \frac{(p - \omega^B a^2_{3B}) \wedge (q + \omega^B a^1_{3B})}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \\
&= \frac{(p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2 - \omega^1 a^2_{31} - \omega^2 a^2_{32}) \wedge (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2 + \omega^1 a^1_{31} + \omega^2 a^1_{32})}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \\
&= \frac{p_1 q_2 \omega^1 \wedge \omega^2 + p_1 a^1_{32} \omega^1 \wedge \omega^2 - p_2 q_1 \omega^1 \wedge \omega^2 - p_2 a^1_{31} \omega^1 \wedge \omega^2 - q_2 a^2_{31} \omega^1 \wedge \omega^2 -}{\omega^1 \wedge \omega^2} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{-a_{31}^2 a_{32}^1 \omega^1 \wedge \omega^2 + q_1 a_{32}^2 \omega^1 \wedge \omega^2 + a_{31}^1 a_{32}^2 \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = p_1 q_2 + p_1 a_{32}^1 - p_2 q_1 -$$

$$- p_2 a_{31}^1 - q_2 a_{31}^2 - a_{31}^2 a_{32}^1 + q_1 a_{32}^2 + a_{31}^1 a_{32}^2$$

Тогда

$$K_t - K_g = p_1 q_2 + p_1 a_{32}^1 - q_2 a_{31}^2 - a_{31}^2 a_{32}^1 + \frac{1}{4} (p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} (p_1 + q_2 - (a_{31}^2 - a_{32}^1))^2$$

Тем самым будем иметь:

$$\sqrt{K_t - K_g} = \frac{1}{2} |p_1 + q_2 + a_{32}^1 - a_{31}^2|.$$

Сравнивая последнюю формулу с (2.245), получим:

$$\frac{|v^3|}{v} = |q_2 + p_1 + a_{32}^1 - a_{31}^2| = 2\sqrt{K_t - K_g}.$$

Справедлива

**Теорема 2.18.** *Отношение проекции вихря на касательную линии тока жидкости к величине скорости есть инвариант линии тока, который пропорционален квадратному корню из разности полной и гауссовой кривизны линии тока жидкости.*

Прежде чем сделать заключение к базовой тематике главы, рассмотрим следующий, важный момент, о котором мы говорили подробно во Введении.

### 2.5. Антропоморфизм в конструировании человеком технических устройств памяти и фундаментальные физические ограничения

Поскольку в процессе написания настоящей книги авторы параллельно публикуют базовые положения концепции ИММП в журнале «Вестник новых медицинских технологий», входящем в *Scopus*, а потому читаемом и рецензируемом, то к авторам же порой возникают вопросы и/или рекомендации: от «ерунду сочиняете» до «стоящее дело затеяли». Наиболее часто скептики урезонируют в том смысле, как это протон или молекула несут и записывают информацию? — Слишком просто и неубедительно. Когда же им (мягко) советуешь ознакомиться с теорией ИММП основательно и до завершения ее постатейной публикации, они либо обреченно махнут рукой («Не до того, Федя, не до того...»), или требуют аналогии, что называется у

«технарей» — в железе. Что ж, пожалуйста и «в железе». Тем более, что один из авторов, в числе прочего, доктор технических наук, то есть «технарь» в одной из своих ипостасей, и имеет титул профессора по кафедре «Электронные вычислительные машины».

...Кстати (или некстати?), участник создания столь могучей «железяки», как зенитный ракетно-пушечный комплекс «Панцирь – С1», что каждый год катают по Красной площади на параде 9-го Мая. В нем тоже хорошая техническая память: многоцелевая.

**Флеш-память оцифрованной информации.** Сразу ухватим быка за рога и ответим скептику в части аналогии, «железно» подтверждающей правомерность концепции ИММП. С учетом сказанного во Введении, справедлива

***Лемма 2.1.** С учетом принципа эволюционной консервативности, то есть экономии природой эволюционных ходов\*, человек изобретает технические устройства и системы антропоморфно, то есть по образцу своих систем жизнедеятельности, причем очень часто, особенно в сфере высоких информационных технологий, он еще не знает о принципах действия своих (антропных) аналогов изобретаемых устройств и систем.*

Назовем лемму 2.1 базовым принципом антропоморфизма в указанном в ее содержании аспекте. В контексте развиваемой ИММП справедлива вытекающая из предыдущей

***Лемма 2.2.** Онтологическая справедливость и действенность механизма ИММП человека, согласно лемме 2.1, подтверждается выбором в середине 1980-х гг. в качестве базовой технической системы памяти флеш-память оцифрованной информации (ФПОИ), причем память человека, согласно ИММП, и память ее технического аналога — ФПОИ, включая все их структурные элементы, основывается на ионно-молекулярных уровнях вещественно-полевой структуры: для ИММП — это уже свершившийся факт, а для ФПОИ, где элементом хранения является зафиксированная (электрическая) емкость р-п-перехода на полупроводниковой подложке (чипе), пределом является емкость межмолекулярного р-п-перехода, причем, при действующей ныне стандартной микросхемной технологии (планарной), ввиду наличия фундаментальных физических ограничений (ФФО), — см. об этом ниже, — но при неизбежном переходе к*

---

\* Не столь давно Григорий Перельман доказал знаменитую гипотезу Пуанкаре (см. об этом подробно в предыдущем томе<sup>252</sup> серии «ЖМФН») о гомеоморфности трехмерной сфере трехмерного замкнутого многообразия (то есть Вселенной). Обыватель узнал об этом только по поразившему его факту отказа Перельмана от 1 млн. \$ (несколько человек лишились рассудка...), но вся многообразная Вселенная образована только восемью (!?) базовыми структурами. Подлинно — экономия.

новым технологиям ФПОИ в итоге сведется к ситуации: (молекула  $\leftrightarrow$  молекула: емкость  $p$ - $n$ -перехода  $\rightarrow$  бит информации).

...Надеемся, что читатель, в отличие от оппонентов теории ИММП, все правильно и осознанно воспринял. Однако, чтобы не быть голословными, вкратце рассмотрим сущность устройства ФПОИ, как технического аналога (см. леммы 1, 2) памяти человека в концепции ИММП.

Авторство флэш-памяти принадлежит Фудзи Масуока (1984, фирма «Toshiba»), а его коллега Сёдзи Ариизуми дал имя эффекту: *flash* — фото-вспышка, которую по некоторой аналогии напоминает процесс стирания информации из памяти ФПОИ. Первоначально основными компонентами ФПОИ являлись: интерфейс *USB*, контроллер со встроенными *ROM* и *RAM*, хранитель информации *NAND*-чип, осциллятор, генерирующий синхронизирующий сигнал с управлением вывода данных, и используемая файловая система — для современных устройств с памятью более 64 гигабайт — *NTFS*. Технология — *MLC*.

Как и положено в технике, поиск оптимального (мы скажем – антропоморфного) способа технической памяти велся, начиная с релейных электромеханических систем 30-х гг. XX века (первые ЭВМ, системы управления ракет фон Брауна и советскими и так дальше), далее магнитных носителей-дискет, «жесткой» магнитной памяти, лазерных дисков – CD и системы на их основе — в итоге ФПОИ стали (и останутся!) базовыми носителями технической памяти.

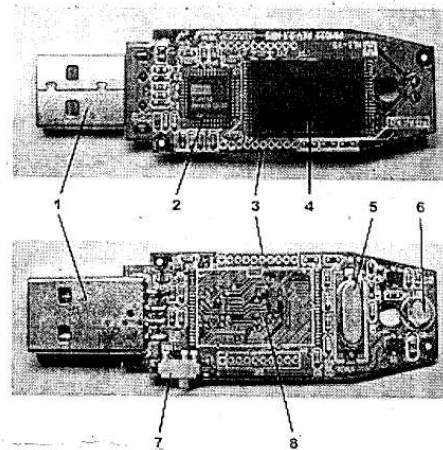


Рис. 2.9. Общий вид ФПОИ: 1 — USB-разъем; 2 — микроконтроллер; 3 — контрольные точки; 4 — микросхема флэш-памяти; 5 — кварцевый резонатор; 6 — светодиод; 7 — переключатель «защита от записи»; 8 — место для дополнительной микросхемы памяти

В основном, потребители ФПОИ в широкой своей массе имеют дело с обычными флешками (флэшками — технический жаргон) — см. рис. 2.9, то есть планарной полупроводниковой микросхемой с системой управления и ввода-вывода. Это есть «нулевое» приближение к ИММП, но уже содержащее все атрибуты организации памяти *h.s.* (см. гл. 1).

Заметим, что далее, анализируя ФПОИ, мы не будем каждый раз фиксировать внимание читателя на аналогии соответствующих систем и элементов ИММП и ФПОИ: это вполне самоочевидно, исключая принятую в биофизике/биохимии и технике терминологию. Так, микроконтроллер суть система управления (процессор + периферийные устройства, собственно оперативная память и пр.) ФПОИ, то есть однокристалльный компьютер. Неполный список периферии, которая присутствует в микроконтроллерах, включает в себя:

- универсальные цифровые порты, которые можно настраивать как на ввод, так и на вывод;
- АЦП и ЦАП;
- компараторы;
- широтно-импульсные модуляторы;
- таймеры;
- контроллеры бесколлекторных двигателей;
- контроллеры дисплеев и клавиатур;
- радиочастотные приемники и передатчики;
- массивы встроенной флеш-памяти;
- встроенный тактовый генератор и сторожевой таймер.

Здесь и далее частично пользуемся материалами статьи Р. Ризванова (Интернет).

Программирование микроконтроллеров выполняется на языке Ассемблера, Си, Форт и на языках (современных) более высокого уровня.

Напомним — тем кто был когда-либо связан с полупроводниковой микроэлектроникой, — что базовым технологическим процессом является формирование на поверхности полупроводниковой, кремниевой подложки калейдоскопически повторяющегося множества транзисторных структур. Например, в 2011-м году фирмой *Altera* была изготовлена по 28-нм (нанометровой) технологии самая большая на тот момент микросхема, содержащая 3,9 млрд. транзисторов.

На базе таких транзисторов, в зависимости от вида используемой логики, формируются диодные структуры. В совокупности они и образуют ячейки элементарной емкостной (электрической зарядовой) памяти в ФПОИ.

Принцип работы ФПОИ основан на изменении и регистрации электрического заряда в изолированной области («кармане») полупроводниковой структуры. Изменение заряда — («запись» и «стирание») — производится приложением между затвором и истоком большого потенциала, чтобы напряженность электрического поля в тонком диэлектрике между каналом транзистора и карманом оказалась достаточна для возникновения туннельного эффекта. Для усиления эффекта туннелирования электронов в карман при записи применяется небольшое ускорение электронов путем пропуска тока через канал полевого транзистора. Чтение (извлечение информации) выполняется полевым транзистором, для которого карман выполняет роль затвора. Потенциал плавающего затвора изменяет пороговые характеристики транзистора, что и регистрируется цепями чтения. Эта конструкция снабжается элементами, которые позволяют ей работать в большом массиве таких же ячеек (рис. 2.10).

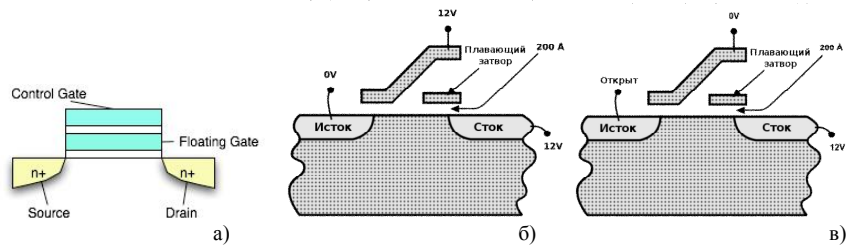


Рис. 2.10. Конструкция и принцип работы элементарной ячейки ФПОИ: разрез транзистора с плавающим затвором (а); программирование флеш-памяти (б); стирание флеш-памяти (в)

...А вот далее прямая «переключка» с ИММП! Даже выделим курсивом.

*Стирание, запись и чтение флеш-памяти всегда происходит относительно крупными блоками разного размера; размер блока стирания всегда больше чем блок записи, а размер блока записи обычно меньше, чем размер блока чтения. Как следствие, все микросхемы памяти имеют выраженную иерархическую структуру: память разбивается на блоки, блоки состоят из секторов, секторы из страниц. В зависимости от назначения конкретной микросхемы глубина иерархии и размер элементов может меняться.*

*Например, микросхема может иметь размер стираемого блока в сотни кбайт, размер страницы записи и чтения 4 кбайт. Для других микросхем размер стираемого блока варьируется от единиц до сотен кбайт, размер сектора записи — до сотен байт, страницы чтения — единицы-десятки байт. Скорость стирания — от единиц до сотен миллисекунд в зависимости от размера стираемого блока. Скорость записи — десятки-сотни микросекунд.*

Обычно скорость чтения нормируется в десятки наносекунд. Стремление достичь предельных значений емкости привело к «стандартизации брака» — праву создавать микросхемы с некоторым процентом бракованных ячеек и без гарантии непоявления новых блоков в процессе эксплуатации. Для минимизации потери данных каждая страница памяти снабжается небольшим дополнительным блоком, в котором записывается контрольная сумма, информация для восстановления при одиночных битовых ошибках, информация о сбойных элементах на этой странице и количестве записей на эту страницу.

Сложность алгоритмов чтения и допустимость наличия бракованных ячеек привело к оснащению микросхем памяти специфическим командным интерфейсом. То есть следует сначала подать специальную команду переноса указанной страницы памяти в специальный буфер внутри микросхемы, дождаться окончания этой операции, считать буфер, проверить целостность данных и, при необходимости, попытаться восстановить их. Слабое место ФПОИ — количество циклов перезаписи в одной странице. Ситуация ухудшается также в связи с тем, что стандартные файловые системы часто записывают данные в одно и то же место. Часто обновляется корневой каталог файловой системы, так что первые секторы памяти израсходуют свой запас значительно раньше.

...Обратим, в числе прочего, внимание на указанное «слабое место» ФПОИ; это же относится и к памяти человека, но ИММП (см. гл. 1) здесь «нашла выход», выражаемый поговоркой: повторенье — мать учения.

И еще один момент сугубой аналогии ИММП и ФПОИ: для переноса заряда, собственно являющегося физическим носителем информации в ФПОИ, используются два механизма, а именно: а) инжекция «горячих» электронов; б) туннелирование Фаулера – Нордхейма.

Поясим: инжекция «горячих» электронов суть перенос (информационнонесущего) заряда через энергетический барьер, образованный тонким диэлектриком, за счет увеличения кинетической энергии электронов  $W_{кин}^e$  в канале (полевого) транзистора ячейки между истоком и стоком (рис. 2.11).

Об общем механизме туннелирования достаточно было сказано в гл. 1. Поясим поэтому только специфику туннелирования Фаулера – Нордхейма в ФПОИ (рис. 2.12), используемом для стирания информации с ячейки.

То есть туннелирование Фаулера – Нордхейма есть переход электронов в плавающий затвор при смещении потенциального барьера электрическим полем. Поле возникает при приложении разницы потенциалов между управляющим затвором (–) и истоком (+) (рис. 2.12, а). Толщина изолирующего слоя  $SiO_2$  (рис. 2.12, б) порядка 100 Å.

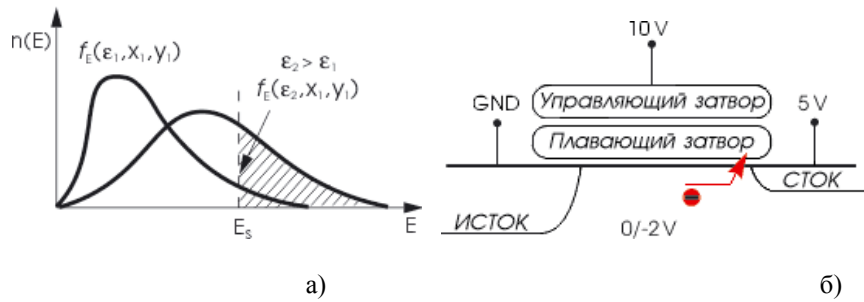


Рис. 2.11. Перенос информационносодежащего заряда в ФПОИ инъекцией «горячих» электронов: образование проводящего канала и появление тока в канале «исток – сток» при приложении положительного потенциала к стоку и управляющему затвору – суть инверсия подзатворной области (а); функция распределения энергии электронов в канале в зависимости от внешнего поля E (б) ( $E_s$  – величина потенциального барьера перехода  $Si/SiO_2$ )

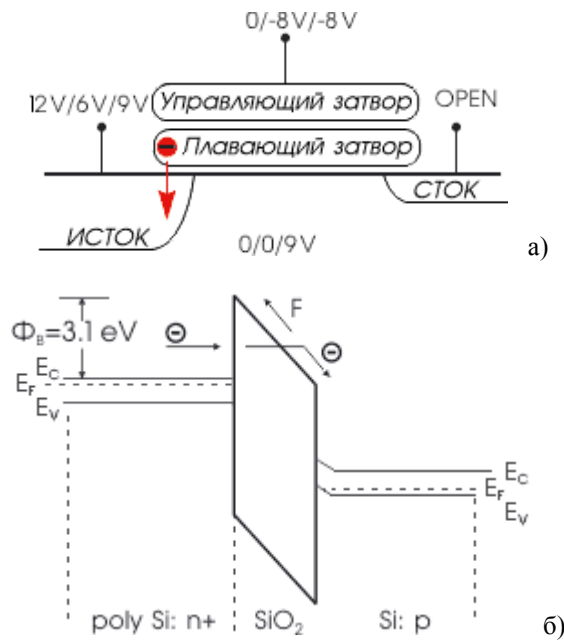


Рис. 2.12. Туннелирование Фаулера – Нордхейма при стирании информации ячейки в ФПОИ: стирание туннелированием электронов через изолирующий слой (а); стекание заряда с плавающего затвора за счет туннельного перехода через потенциальный барьер



Организация собственно ввода (записи), вывода (извлечения — «вспоминания»), а также коммутаторов, диспетчеров, каталогов и библиотек памяти во многом (технически) аналогична соответствующим операциям и структурам ИММП.

В заключении подпараграфа остановимся на надежности работы ФПОИ, что эквивалентно надежности памяти в ИММП — и вообще надежности памяти человека. В гл. 1 о последней говорилось достаточно и, что называется, «в различных наклонениях», анализировались факторы как усиления, так и ослабления памяти, ложной памяти и пр. Механизмы ФПОИ на современном уровне научного знания и технологии полупроводниковых микросхем «почти бесконечно» далеки от ИММП, что и видно из приводимых ниже данных.

Как видно из рис. 2.11, 2.12, токи заряда и разряда плавающего затвора ячейки сконцентрированы в локальной области изолирующего затвор диэлектрика. Зависимость плотности тока от напряженности поля показана на рис. 2.13.

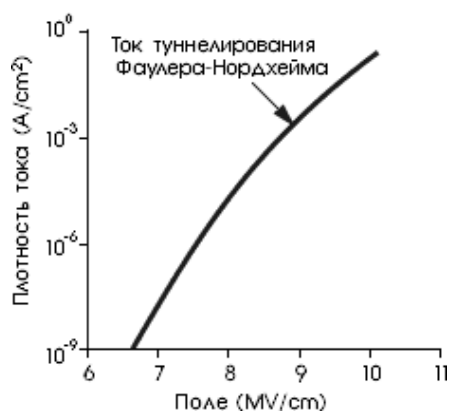


Рис. 2.13. Зависимость тока туннелирования Фаулера–Нордгейма от напряженности электрического поля

Экспоненциальная зависимость тока, проходящего через диэлектрик при операциях записи и стирания, требует решения сложных задач при управлении процессами; очень небольшие вариации толщины диэлектрика в ячейках внутри запоминающей матрицы приводят к существенному разбросу величин токов записи и стирания, то есть и времени реализации процессов. Флуктуации толщины диэлектрика внутри ячейки являются источником локальных неоднородностей напряженности поля, что вызывает по-

явление перегруженных участков. Циклическая нагрузка на диэлектрик на таких участках вызывает ускорение процессов его деградации: нарушения структуры и изменения сопротивления.

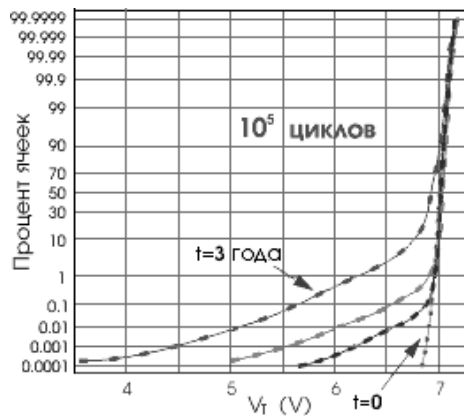


Рис. 2.14. Зависимость времени удержания заряда ячейками ФПОИ в зависимости от числа циклов записи-стирания

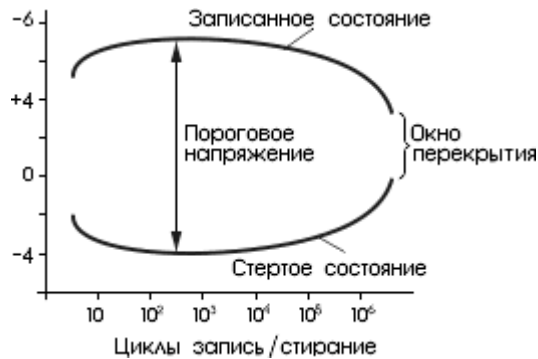


Рис. 2.15. Зависимость порогового напряжения ячейки от числа циклов записи-стирания

Причиной деградации может быть как появление и рост дефектов кристаллической решетки диэлектрика — дислокаций и разрывов Si-O связей, так и диффузия ионов, убаыстряющаяся при повышении температуры по причине локальных перегревов в областях повышенного тока. Эти процессы приводят к появлению «ловушек» для заряда в слое диэлектрика; в ре-

зультате появляется так называемый ток утечки, вызванный перегрузкой, который влияет как на надежность хранения информации ячейкой — время сохранения заряда на плавающем затворе — так и на скорость программирования и стирания.

Зависимость времени сохранения заряда от числа циклов записи-стирания ячеек матрицы показана на рис. 2.14, а порогового напряжения ячейки — на рис. 2.15.

***Почему флеш-память никогда не сможет стать полным аналогом ИММП, или фундаментальные физические ограничения.*** Выше мы установили достаточно факторов аналогии и сближения тенденций (ФПОИ → ИММП). Как указано в лемме 2.2, тах (ФПОИ → ИММП) явилась бы реализация записи информации в ФПОИ на ячейках (емкостях) р-п-переходов, они же канал «исток – сток» (см. выше) молекулярных размеров. Однако при существующей, доминирующей планарной полупроводниковой технологии это не представляется возможным ввиду наличия фактора ФФО<sup>54, 81</sup>. Возможен вариант предельного снижения ФФО вплоть до средне-, даже низкомолекулярного уровня переходом от планарной полупроводниковой технологии к объемной — созданием объемных интегральных схем (ОИС)<sup>60, 273</sup>, в которых все активные элементы (АЭ), активные устройство с распределенными параметрами (АУРП), собственно и образующие сверхбольшие интегральные схемы (СБИС), как мультипликацию интегральных схем (ИС), суть трехмерные структуры, работающие на сверхчастотах (СВЧ), крайне высоких частотах (КВЧ) и так далее вплоть до инфракрасного диапазона. Но — это дело еще не очень близкого будущего; см. также Заключение к настоящей главе.

Ввиду важности темы — в части максимизации тах (ФПОИ → ИММП) — рассмотрим вопрос о количественных характеристиках ФФО для планарной технологии изготовления ФПОИ. (Другие используемые в подпараграфе аббревиатуры расшифрованы в подписи к рис. 2.16). Ниже-следующий материал основан на данных работы<sup>81</sup>, систематизированных в нашей книге<sup>54</sup>, посвященной разработке ОИС СВЧ и КВЧ.

*Примечание:* сравнительные данные по ФФО приводятся в соотношении с годами до 2000-го, во-первых, как характеризующие тенденцию «рывка» данных технологий; во-вторых, ввиду общего экономического кризиса мирового капитализма в начале XXI века, замедлившего, в числе прочего, развитие полупроводниковых технологий.

Данные ФФО рассматриваются в двойном плане: как ограничение для АЭ ОИС, включая АУРП, так и ограничения для собственно ОИС, изготов-

ливаемых по полупроводниковой (монокристалльной) технологии. Учитывая специфику полупроводниковых ОИС СВЧ, КВЧ оценка их ФФО во многом базируется на анализе основных типов волн в твердых телах, пригодных в качестве рабочих в СВЧ, а особенно в КВЧ-диапазоне: электромагнитных в плазме твердого тела. Это быстрые и медленные волны геликоны и альфвеновские волны. Оптические, акустические и спиновые волны являются основными в устройствах функциональной микроэлектроники в ОИС КВЧ. Вообще говоря, ФФО полупроводниковых ОИС могут определяться не только характеристиками собственно микроэлектронной структуры ОИС, но и другими факторами. Например, в биосенсорных датчиках ФФО полупроводниковых структур «занижаются» предельными размерами сращенных с ними биологически активных структур.

*Характеристики ФФО полупроводниковых АЭ и ОИС.* Полупроводниковые АЭ (АУРП) и ОИС СВЧ характеризуются следующими основными параметрами:  $N$  — число АЭ на кристалле;  $\tau$  — время переключения элемента между двумя электрическими состояниями;  $\nu = 1/4\tau$  — тактовая частота;  $N\nu$  — функциональное быстроедействие (ФБ) схемы;  $P$  — мощность, рассеиваемая в процессе переключения;  $P\tau$  — показатель качества элемента, определяющий количество энергии, рассеиваемый элементом в единичном акте переключения;  $d$  — характерный размер АЭ в активной зоне (длина канала, ширина базы), определяемый разрешающей способностью технологического процесса (минимальной ширины линии). Сюда же добавляется относительная стоимость  $C$  и надежность работы АЭ.

Введенные параметры позволили охарактеризовать сравнительную динамику процесса развития полупроводниковой микроэлектроники (табл. 2.4) в 1980—1990 десятилетие; экстраполяция с учетом выполнения закона Мура (ежегодное удвоение плотности компоновки  $N$ ) позволяет оценить современное состояние и прогноз на будущее. Так к 2000-му году плотность достигала  $N=10^9$  элемент/кристалл. На рис. 2.16 приведена диаграмма, характеризующая для различных классов АЭ важнейшее сочетание основных параметров:  $P$  —  $\tau$ . Для тех же годов на рис. 2.17 приведены характеристики развития СБИС (процессоров). Вообще говоря, увеличение интеграции  $N$  следует наиболее общему закону природы, а именно — экспоненциальному. Что же касается динамики зависимости  $d_{\min}(t)$ , то здесь прослеживается квазилинейная зависимость.

Таблица 2.4.

Параметры, характеризующие состояние и динамику развития полупроводниковой микроэлектроники

Параметры	Годы	
	1980 г.	1985—1990 гг.
$N$ , элемент/кристалл	$10^4 — 10^5$	$3 \cdot 10^5 — 10^6$
$\tau$ , с	$10^{-5} — 10^{-6}$	$10^{-8} — 10^{-9}$
$\nu$ , Гц	$10^5$	$2,5 \cdot 10^7$
ФБ, элемент · Гц	$10^{10} — 10^{11}$	$10^{13}$
$P$ , Вт,	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$P\tau$ , Дж	$10^{-9} — 10^{-10}$	$10^{-13} — 10^{-14}$
$C$ , доллар/бит	$10^{-4}$	$10^{-5}$
$d$ , мкм	3,5	0,5

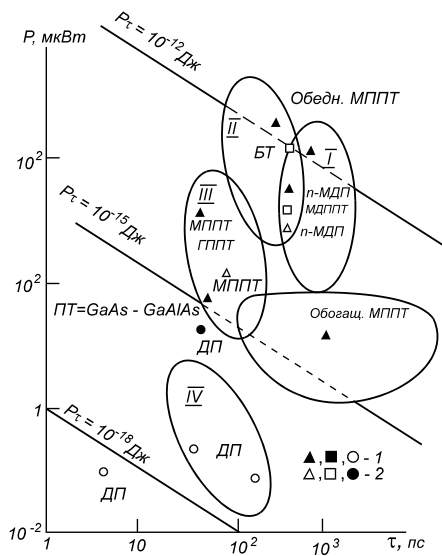


Рис. 2.16. Диаграмма: рассеиваемая мощность — время переключения ( $P — \tau$ ) для АЭ различных типов: 1 — характерные точки для АЭ: полевых транзисторов (ПТ), биполярных транзисторов (БТ), джоузефсоновских переходов (ДП); 2 — расчетные точки для тех же АЭ (МДП — металл-диэлектрик-проводник, МП — металл-полупроводник, ГП — гетеропереход). На рисунке изображены области параметров, характерных для ПТ со структурой металл-диэлектрик-полупроводник (МДППТ) — I, со структурой металл-полупроводник (МППТ) — II, для БТ — III, для ДП — IV

Рассмотренные характеристики в их динамике являются основными, по которым надлежит определять (устанавливать) ФФО. Вообще говоря, проблема ФФО возникла уже при планировании создания СБИС с  $N \approx 10^5$ , то есть не является некоторой абстракцией, но есть рабочий инструмент при разработке полупроводниковых элементов, в том числе АЭ и АУРП ОИС.

Характерно, что все основные ФФО полупроводниковой электроники связаны с предельно допустимым уменьшением размеров элементов. Эти ограничения укрупненно можно разбить на три группы: *а)* физические ограничения, возникающие в технологии производства; *б)* физические ограничения работоспособности отдельных элементов (смыкание *p-n*-переходов, пробой и т.п.); *в)* физические ограничения на степень интеграции *N* и размеры элементов, связанные с взаимодействием их друг с другом (джоулев разогрев).

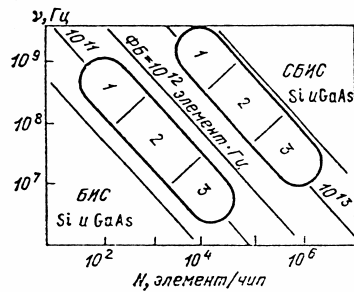


Рис. 2.17 Характеристики развития СБИС по состоянию на 1980 г. и 1990 г.: 1 — ИС для управления и вычисления; 2 — радиолокационный цифровой процессор; 3 — чувствительный сигнальный процессор (Значения ФБ области применения)

*Физические ограничения в технологии* рассмотрим на примере ПТ, составляющих основу активной элементной базы ОИС СВЧ. Для формирования элементов ИС в современной технологии существует около 100 способов, различающихся взаимной изоляцией приборов (разделение *p-n*-переходами или ДС), способом создания *p-n*-переходов (диффузия, ионная имплантация, эпитаксиальное наращивание); структурой формирования системы межсоединений (металлические соединения, линии поликристаллического Si, каналы проводимости) и межуровневой изоляции. В настоящее время наиболее используемыми являются методы: литография, легирование диффузий по окисным маскам, локальное окисление по нитридным маскам, эпитаксиальное наращивание, ионное легирование, анодирование, металлизация. Для создания субмикронных структур перспективно использовать методы: электронно-лучевую, рентгеновскую и ионную литографию; ионное, электронно-лучевое травление; лазерную и ионную обработки, молекулярно-лучевую эпитаксию и ионную имплантацию. Успехи в развитии методов позволили уже к началу 90-х гг. достичь разрешения в плоскости кристалла —  $100 \text{ \AA}$ , а в перпендикулярном — несколько ангстрем. Сопоставляя с данными табл. 2.4, можно считать, что в ближайшей перспективе разрешающая способность литографии не будет являться ФФО на уменьшение размеров элементов.

Наиболее существенными ограничениями, уже на границе ФФО, являются:

— размазка края экспонированной области для видимого света составляет около 1 мкм; для рентгеновской и электронной литографии минимальная размазка края засвеченной области составляет

$$\Delta x \geq \lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \approx 1 \div 0,1 \text{ \AA}, \quad (2.246)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $E = 10 - 10^3$  эВ — энергия электрона с массой  $m$ ;

— рассеяние луча в резисте и в полупроводнике (электромагнитного или электронного) связано со свойствами резиста. Последний имеет минимальную толщину порядка 50 Å; соответствующую величину имеет и размазка линии. Таким образом, это далеко от ФФО и не является существенным ограничением. Такого же порядка ограничения возникают при протравлении резиста. Эффект обратного рассеяния (из полупроводника) дополнительно размывает края. При использовании ионной, электронной и рентгеновской литографии эта размазка снижается до 100 Å;

— ограничения, обусловленные сферической аберрацией электронного луча; последнее суть увеличение размера пятна. В то же время аберрация есть следствие увеличения интенсивности электронного луча ( $I$ ), что необходимо для уменьшения длительности экспонирования. Минимальное значение радиуса пятна

$$R_{\min} = \left(\frac{f}{4}\right)^{1/4} \left(\frac{S_r q e N_m}{\pi C_m B S}\right)^{3/8}, \quad (2.247)$$

где  $f$  — постоянная сферической аберрации (~5 см);  $S_r$  — площадь экспонирования (кристалла);  $e$  — энергия электрона;  $q$  — стоимость работы экспонирующей установки в единицу времени;  $N_m$  — полное число электронов, попавших на мишень за время экспонирования;  $C_m$  — максимальная стоимость процесса экспонирования;  $B$  — яркость источника;  $S$  — площадь излучающей поверхности.

Полагая в (2.247)  $C_m = 10$  долл;  $S_r = 1 \text{ см}^2$ ;  $S = 10^{-10} \text{ см}^2$ ;  $B = 10^6 \text{ А/см}^2$ ;  $q = 10 \text{ долл/час}$ ;  $N_m = 200$ , получим минимальное значение:  $R_{\min} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ ;

— влияние флуктуаций примеси приводит к ограничениям размеров рабочих областей элементов ИС, характеристики которых чувствительны к уровню легирования ( $p$ - $n$ -переходы). Это ограничение равно



*Гоголевский городничий признавал, что у директора училища ума палата, но зачем стулья-то ломать? Однако и более ученые мужи крушат трактирную мебель — от отчаяния доказать истину в первой инстанции, то есть за обеденным столом. Как ни странно, но в чем-то они правы: очень часто истина лежит на поверхности; во всяком случае почти все законы гидромеханики были открыты из наблюдения за тарелкой с супом.*



$$\frac{d^2}{S} < 1 - \sqrt{2/\pi} \int_0^{\varepsilon_m (\bar{n}d^3)^{1/2}} e^{-y^2/2} dy, \quad (2.248)$$

где  $\varepsilon_m$  — максимально допустимое относительное отклонение количества примеси от среднего значения;  $\bar{n}$  — средняя концентрация легирующей примеси.

Подставляя в (2.248) характерные значения:  $\varepsilon_m = 0,1$ ;  $\bar{n} = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ;  $S = 10^{-2}$ , получим, что  $d > 10^{-5} \text{ см}$ ;

К другим технологическим ограничениям относятся: ограничения величиной (снизу) 0,1 мкм ширины  $p$ - $n$ -переходов истока и стока ПТ — влияние поверхностной диффузии, накопление ошибок при многократном наложении масок и др.

Таким образом, границы ФФО технологического характера еще далеко не достигнуты, однако требуется постоянное совершенствование методов.

*Физические ограничения, накладываемые механизмом работы АЭ и ОИС.* Для определения последних важно выполнить классификацию АЭ по размерам. Классификация производится сравнением размеров их рабочих областей с характерными данными, определяющими функционирование АЭ:  $L$  — ширина области пространственного заряда;  $l$  — длина свободного пробега носителей и  $\lambda$  — длина волны электрона. В зависимости от их соотношения имеем АЭ четырех групп; так БИС относятся к 1-ой группе ( $d > L, l, \lambda$ ); ПТ с субмикронными каналами — к 2-ой группе ( $L \geq d > l, \lambda$ ). К 4-ой группе ( $d \leq \lambda$ ) относятся GaAs-диоды, туннельные диоды, джозефсоновские переходы — с субмикронными размерами.

Другой важнейшей характеристикой является скейлинг параметров. Известно, что уменьшение геометрических размеров АЭ влечет за собой и изменение рабочих характеристик, поэтому вводится понятие скейлинга: скейлинг состоит в определении масштабных множителей  $F(K)$  (см. далее), с помощью которых параметры прибора, уменьшенного в  $K$  раз, выражаются через соответствующие параметры исходного прибора.

Пример: Опишем скейлинг для ПТ при постоянном электрическом поле  $E_s$ . Пусть геометрические размеры ПТ ( $d$  — длина канала,  $w$  — ширина канала,  $a$  — толщина окисла) уменьшаются в  $K$ -раз. Для неизменности поля в рабочих областях ПТ необходимо все напряжения уменьшить в  $K$ -раз, а концентрацию примесей увеличить в  $K$ -раз, поскольку  $E_s \sim \sqrt{(V_g - E_1 a) N_a}$ , где  $E_1$  — поле в диэлектрике,  $N_a$  — концентрация акцепторов в полупроводнике,  $V_g$  — напряжение «затвор-исток». Отсюда из физи-

ки работы ПТ следует, что выражение для тока в области напряжений затвора, существенно больших порогового ( $V_g \gg V_n$ ), имеет вид:

$$J_D = \frac{w}{d} \mu_n \frac{\varepsilon_i}{a} V_g V_D, \quad (2.249)$$

где  $\mu_n$  — подвижность электронов в канале;  $\varepsilon_i$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика ПТ;  $V_D$  — напряжение «сток-исток».

Таблица 2.5

Скейлинг элементов

(изменение параметров МДП полевых транзисторов при уменьшении их размеров в  $K$ -раз)

Параметры	Расчетные формулы	Масштабные множители
1. Геометрические размеры $d, w, L, a$		$K^{-1}$
2. Напряжения $V_D, V_g$	$E = \text{const}, V_D = E_D d$	$K^{-1}$
3. Концентрация примеси в подложке $N_a$	$E_S \sim \sqrt{(V_g - E_i a)} \approx \text{const}$	$K$
4. Ток в линейной области ВАХ $J_D$	$J_D = \frac{w}{d} \frac{\varepsilon_s}{a} V_g V_D$	$K^{-1}$
5. Площадь затвора $S_g$	$S_g \approx wd$	$K^{-2}$
6. Емкость затвора $C_g$	$C_g \approx \frac{\varepsilon_1 wd}{a}$	$K^{-1}$
7. Максимальная плотность элементов на чипе	$\bar{N} = 1/S_g$	$K^2$
8. Время задержки переключения $\tau$	$\tau = \max \left( \frac{d^2}{\mu V_D}; \frac{C_g V_g}{J_D} \right)$	$K^{-1}$
9. Джоулева мощность, рассеиваемая на постоянном токе	$P = J_D V_D$	$K^{-2}$
10. Джоулева мощность, расходуемая на управление переключением	$P = \frac{1}{2} C_g \Delta V_g^2$	$K^{-3}$
11. Параметр качества прибора $\Pi$	$\Pi = P\tau$	$K^{-3}$
12. Функциональное быстродействие ИС, ФБ	$\Phi Б = \bar{N}\tau^{-1}$	$K^3$

Таблица 2.6.

Скейлинг межсоединений:  
изменение параметров межсоединений при уменьшении их размеров

Параметры	Формулы, примечания	Масштабный множитель $F(K)$
1. Сопротивление линий межсоединений (ЛМС)	$R_l = \rho_l l / (w_l h_l)$ ; $l, w_l, h_l$ — длина, ширина и толщина линии	$K$
2. Нормализованное падение напряжения на ЛМС	$J_D \cdot R_l / V_D$	$K$
3. Время отклика ЛМС $\tau_l$	$\tau_l = \begin{cases} R_l C_l; \\ l / v_0; \end{cases}$ $C_l$ — емкость соединения; $v_0$ — скорость электромагнитной волны	1
4. Плотность тока в ЛМС $j_l$	$j_l = \frac{J_D}{w_l h_l}$	$K$
5. Контактное сопротивление $R_k$	$R_k \sim w_l h_l$	$K^2$
6. Контактное падение напряжения $V_k$	$V_k \sim J_D R_k$	$K$
7. Нормализованное контактное падение напряжения	$\frac{V_k}{V_D}$	$K^2$
8. Нормализованное время отклика ЛМС	$\frac{\tau_l}{\tau} \approx \frac{R_l C_l}{\tau}$	$K$

Из (2.249) следует, что  $J_D$  обратно пропорционально  $K$ . Зависимость параметров АЭ (плотность упаковки, рассеиваемая мощность) от коэффициента подобия  $K$  приведены в табл. 2.5, а в табл. 2.6 приведены данные о скейлинге межсоединений в АЭ и ОИС. Из последней видно, что уменьшение размеров межсоединений ухудшает общие характеристики ИС (ОИС). Обозначение параметров в табл. 2.5, 2.6 — общепринятые в полупроводниковой электронике.

Причины отказа скейлинга. Формальное использование скейлинга приводит к выводу, что размеры АЭ можно уменьшать неограниченно. Однако, в действительности, начиная с некоторого размера, формализм скейлинга начинает отказывать. Причины здесь следующие:

— условие работы ПТ:  $V_g > V_n$  при  $V_n$  не зависящем от  $K$  вступает в противоречие с п. 2 табл. 2.5;

— соблюдение условия:  $V_D > 10 kT/e$ , то есть малости тепловых флуктуаций тока по сравнению с величиной тока;

— во избежание прокола ПТ необходимо, чтобы соблюдалось условие:  $d > 2L$ ;

— напряжение пробоя  $p$ - $n$ -перехода «сток-подложка» резко падает при уменьшении длины канала;

— при сравнении длины канала ( $d$ ) с шириной области обеднения истока и стока происходит уменьшение порогового напряжения  $V_n$  — эффект «короткого канала». Это уменьшение характеризуется коэффициентом

$$f = 1 - \left( \sqrt{1 + 2L/X_j} - 1 \right) X_j / d, \quad (2.250)$$

где  $L$  — ширина области обеднения при инверсии;  $X_j$  — ширина области  $p$ - $n$ -перехода стока и истока. Соотношение (2.250) хорошо совпадает с экспериментальными данными;

— уменьшение ширины канала  $w$ , начиная с некоторого значения, приводит к увеличению  $V_n$  — эффект «узкого канала», что связано с эффективным увеличением заряда в слое обеднения  $Q_B$ . Эффективное увеличение  $Q_B$ , то есть изменение порогового напряжения описывается зависимостью:

$$Q_B^* = -eN_a w X_j (1 + \pi X_j / 2w) = Q_B (1 + \pi X_j / 2w). \quad (2.251)$$

Таким образом, из (2.251) следует, что  $V_n$  зависит как от изменения длины, так и ширины канала;

— уменьшение длины канала без соответствующей оптимизации других параметров приводит к резкому увеличению предпорогового тока и его зависимости от напряжения «исток-сток». Эта (минимальная) длина канала равна

$$d_{\min} = c(X_j a w_1^2)^{1/3}, \quad (2.252)$$

где  $c = 0,41 \text{ \AA}^{-1/3}$  — постоянная;  $a$  — толщина диэлектрика;  $w_1$  — суммарная ширина областей обеднения стока и истока. Из (2.252) следует, что  $d_{\min} \sim K^{-4/3}$  (а согласно скейлингу:  $d_{\min} \sim K^{-1}$ ).

Ограничения, вызванные сильными электрическими полями, на длину канала ПТ возникает из-за выполнения совместных требований: а) поле в окисле ПТ, необходимое для инверсии канала, долж-

но быть меньше пробивного поля окисла; б) не должно происходить смыкания областей пространственного заряда  $p$ - $n$ -переходов сток и исток (прокола). Из этих соображений минимальная длина канала равна

$$d_{\min} \approx 12\varepsilon_s \psi_B / \varepsilon_i m E_c, \quad (2.253)$$

где  $E_c = 6 \cdot 10^6$  В/см — пробивное поле в окисле;  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_i$  — диэлектрические проницаемости полупроводника и диэлектрика;  $\psi_B$  — высота барьера  $p$ - $n$ -перехода. На величину  $a$  достаточно жесткое ограничение накладывает возможность пробоя диэлектрика:

$$a > V_g / m E_c. \quad (2.254)$$

При  $V_g = 2$  В из (2.254) находим:  $a > 130$  Å.

Другие ограничения связаны с эффектами разогрева электронов, усиливающимися с уменьшением длины канала. По оценке<sup>91</sup> разогрева электронов не происходит при  $d_{\min} = 20$  мкм. Еще отметим ограничение  $d_{\min} \approx 10^{-5}$  см — следствие минимизации дробового шума. Наконец, следствием ограничения площади поперечного сечения канала из-за насыщения дрейфовой скорости является ограничение на ширину поперечного сечения канала:  $w > w_{\min} = 10^{-2}$  мкм.

Ограничения размеров элементов памяти существенны при разработке цифровых ОИС СВЧ. Информационный заряд элементов памяти может сохраняться достаточно долго, не исчезая из-за туннельного переноса, при условии, что область, в которой находится захваченный заряд, отделена от других областей (элементов) достаточно широким и высоким потенциальным барьером. Отсюда минимальная ширина барьера, то есть минимальный размер элемента памяти равен

$$d_{\min} \approx \frac{10}{\hbar} 2m\Delta\varepsilon, \quad (2.255)$$

где  $\Delta\varepsilon \geq 100$  кТ — высота барьера. Из (2.255) следует:  $d_{\min} = 0,01$  мкм. Размеры также ограничиваются вследствие инверсии битов под действием радиации. Для того, чтобы индуцированный облучением заряд  $Q_g$  не приводил к инверсии состояния памяти, нужно, чтобы он был мал по сравнению с информационным зарядом  $Q_1$ . Отсюда:  $d_{\min} \approx 0,6$  мкм.

*Ограничения интеграции элементов.* При планарной технологии максимальная степень интеграции для невзаимодействующих элементов с линейными размерами  $d$ , то есть максимальная плотность компоновки, равна  $N_{\max} = S/d^2$ , однако реально достижимая интеграция  $N \ll N_{\max}$ . Ограничения в интеграции возникают вследствие взаимодействия элементов друг с другом и особенно существенны при уменьшении их размеров. Наиболее серьез-

езное физическое ограничение на степень интеграции, ФБ и  $d_{\min}$  накладывает разогрев кристалла. Ограничение на функциональное быстродействие (ФБ) имеет вид:

$$N_v < 2Q_m S / C \Delta V^2, \quad (2.256)$$

где  $Q_m$  — максимальное количество тепла, отводимое с единицы площади;  $S$  — площадь кристалла;  $C$  — емкость элемента, к которому приложено напряжение  $\Delta V$ .

Неравенство (2.256) можно переписать в виде ( $\overline{Nv} = Nv/S$ ):

$$\overline{Nv} < 2Q_m / \varepsilon^* dn^2 (kT/e)^2, \quad (2.257)$$

поскольку  $C = \varepsilon d^2 / 4\pi a \approx \varepsilon^* d$  ( $\varepsilon^* = \varepsilon d / 4\pi a = \text{const}$ ). Из (2.256), (2.257) видно: ФБ ограничено некоторой предельной величиной, зависящей только от  $d$ ,  $Q_m$  и  $T$ . Для реальных значений ФБ менее  $10^{18}$ — $10^{20}$  элемент · Гц. В то же время ограничение ФБ приводит к ограничению на минимальные размеры элементов. Это связано с уменьшением расстояния между элементами, как основным следствием микроминиатюризации, а также с последствиями увеличения тактовой частоты. Это выражается соотношением:

$$d > \begin{cases} \left( \frac{\varepsilon^* \mu \Delta V^3}{2mp^2 Q_m} \right)^{1/3} & \text{при } \mu V / d < v_n, \\ \left( \frac{\varepsilon^* \Delta V^2 v_n}{2mp^2 Q_m} \right)^{1/2} & \text{при } \mu V / d > v_n. \end{cases} \quad (2.258)$$

В (2.258)  $v_n = 10^7$  см/с — скорость насыщения носителей. Для практических значений параметров получим:  $d \geq 10^{-5}$  см и  $a > 10^{-4}$  см.

Другими причинами ограничения степени интеграции являются:

- паразитные связи между элементами;
- разогрев межсоединений и выход их из строя;
- паразитные связи между соединениями.

Таким образом, при условии постоянного совершенствования технологии и конструкций полупроводниковых АЭ и собственно ОИС повышение интеграции вплоть до 0,1 мкм — размера элементов только приближает к границам ФФО. При достижении этих границ дальнейшее увеличение плотности компоновки будет возможным при разработке принципиально новых технологий, схемотехнических решений, использовании перспективных материалов. В этом смысле концепция ОИС СВЧ представляет широкое поле деятельности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ К ГЛАВЕ

Таким образом, в настоящей главе, в контексте основного содержания книги, разработаны математические основы обратного метода электрогидродинамической аналогии. Еще раз отметим, что метод этот вызван к жизни сложностью граничных условий (геометрия, топология, электрофизические характеристики и т.п.) соответствующих краевых задач электродинамики живых систем, тем более — процессов памяти.

Разработанная выше полная и общая теория гидродинамики разветвленных биосистем (см. рис. 2.2) позволяет, используя формальные соотношения табл. 2.1—2.3, качественно оценить электродинамические процессы в таких системах.

Наконец, данный метод показывает изящество и высокий уровень строгости аппарата современной дифференциальной геометрии, в том числе дифференциальных форм (внешней алгебры). Несомненно, что рабочий аппарат биоэлектродинамики — это дело будущих исследований — будет создаваться на основе этой математики. Это в полной мере относится к ИММП, как в достаточной степени полноты было сказано во введении к главе и к книге в целом.

С другой стороны, материал главы, имеющийся в виду сугубо математические §§ 2.2—2.4, наглядно показывает, что физико-математическое (а еще есть аспект логический! — См. предыдущие тома серии «ЖМФН») описание процессов памяти человека есть задача вполне решаемая на современном уровне знания и при наличии априорных моделей функционирования мышления и памяти, той же ИММП, но требующая, во-первых, сугубо системного подхода; во-вторых, привлечения специалистов различного профиля. Ибо одному-двум-трем, хотя и системно-разносторонним, исследователям в более-менее достаточной априорности эту задачу возможности решить не представляется.

Все же полагаем, что включение математического аппарата ОМЭГДА в настоящую книгу показательно и логически оправдано. ...Что-то похожее на извинение авторов за доставленное «неудовольствие» читателям, не привыкшим к математическим упражнениям. Однако — слово сказано, дело сделано. Главное, что суть этого дела понятна.

Несомненно, включение в главу раздела (параграфа) на тему антропоморфизма в конструировании человеком технических устройств памяти — ФПОИ и фундаментальных физических ограничений — ФФО, во-первых, логически завершает концепцию главы как физико-математической и физико-технической, во-вторых и в-главных, — служит хотя и опосредованным, но достаточно веским, мы бы сказали — онтологиче-

ским, подтверждением априорности теории ИММП. Об онтологической же аналогии ИММП и ФПОИ: в первой имеем память на ионно-молекулярном уровне, во второй — устремление к таковой, в идеале: запись ФПОИ на емкости (заряде) *p-n*-ячейки молекулярных размеров.

Но, как показано выше в подпараграфе о ФФО, при существующей, правильнее — господствующей ныне планарной полупроводниковой технологии СБИС, в том числе СБИС с функциями ФПОИ, неограниченное возрастание памяти ФПОИ невозможно; уже сейчас плотность компоновки ячеек памяти близка к ФФО, до «молекулярных ячеек» дело не дойдет ... значит, далеко не дойдет до ФБ ИММП.

Понятно, что НТП, тем более в части информационных и полупроводниковых технологий, неостановим. Поэтому качественное повышение ФБ ФПОИ, ее максимальное приближение к ФБ ИММП мы видим в переходе от планарных, то есть плоскостных, СБИС к ОИС — объемным интегральным схемам, работающим на СВЧ, КВЧ и еще более высоких частотах: от инфракрасных до ультрафиолетовых, а может и еще более высоких.

...В контексте предыдущего изложения заметим: в 80—90-е гг. инициативной группой ученых-электродинамиков (Е. И. Нефедов, А. А. Яшин и их многие коллеги из различных научных центров СССР, прежде всего РСФСР и УССР) были разработаны физико-технические основы<sup>60</sup> и конструктивная архитектура<sup>273</sup> ОИС СВЧ и КВЧ с объемными прямыми электромагнитными связями, то есть де-факто базис компьютера 6-го поколения, он же — технический аналог работы мышления и памяти головного мозга человека, сочетающие ИММП и распространение в нейронной сети кортекса СГ ЭМВ. Издавался специализированный в части ОИС журнал «Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот» (главный редактор Е. И. Нефедов, зам. главного редактора А. А. Яшин), а на базе Центрального конструкторского бюро аппаратостроения (г. Тула) под руководством зам. руководителя предприятия В. В. Кандлина и ведущего технолога Л. Н. Плотниковой (см. книгу<sup>273</sup>) была создана конструкторско-технологическая база (ЦКБА на тот момент времени являлось ведущим предприятием Миноборонпрома по микроэлектронике)... Но тут, как обычно значитесь в русских народных сказках, появилась «гайдарномика». Все рухнуло в одночасье и насовсем.

В качестве *intermezzo*: накануне пресловутого «миллениума» мировая пресса с радостью сообщила, что «израильскими учеными (читай: бывшими москвичами) создан принципиально новый тип полупроводниковых приборов: объемные интегральные схемы». *No comment*, как говорится.



*Не углубляясь дальше в лирическо-ностальгические воспоминания, только заметим: теория ИММП должна авторами и их коллегами в России и на Украине всячески популяризоваться, что мы и делаем: параллельно с работой над настоящей книгой данная теория в достаточной полноте излагается в цикле статей, публикуемых из номера в номер в журнале «Вестник новых медицинских технологий», начиная с № 4, 2013. А иначе дело может дойти до очередного «intermezzo»...*