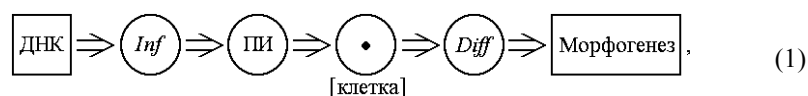


ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА-ЯШИНА: ДИСКРЕТНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ БИОИНФОРМАЦИИ В НООСФЕРНЫХ ПРОЦЕССАХ

— это суть обоснование двойственности предоставления информации в процессах и объектах ноосферы. Структурированный живой организм есть сложная функциональная система, строго упорядоченная в своей иерархии. Для поддержания жизнедеятельности такой системы необходима сложная по своей структуре, резервированная информационная связь. Более того, как утверждает Г. Хакен, в биосистеме «*ничто не происходит без кооперации отдельных ее частей на высоком уровне*». Поэтому, с синергетической точки зрения, роль биоинформационного обмена заключается в своего рода управлении и контроле за преобразованием энергии на молекулярном уровне и проявлением ее действия на макроскопическом уровне, то есть уровне органа, системы, организма, ноосферы в целом.

С точки зрения морфогенеза живого фундаментальную роль играет «позиционная информация» (ПИ), о которой мы уже говорили выше. Именно эта информация, эволюционно заложенная в биоткани, управляет клеткой, в частности, инициирует ее дифференцировку (*Diff*). То есть здесь процесс идет согласно диаграмме



а передачу информации в этой цепочке можно рассматривать как «длинные волны», сам же процесс осуществляется в течение жизненного цикла организма. Понятно, что в этом цикле информация передается как непрерывными (по самому определению «длинной волны»), так и дискретными сигналами. Все дело во временной их протяженности; это несколько непривычно для «физически» мыслящего исследователя, но не вызывает возражений у специалиста-биолога или биофизика.

Отталкиваясь от диаграммы (1), можно ввести и понятие «сверхдлинных» или «эволюционных волн». Действительно, эволюцию живого можно рассматривать как непрерывный процесс передачи исходной информации {*Inf*}, заложенной в первичной живой материи, далее через образование новых видов (с учетом принципа Дарвина, принципа «пробного нащупывания» и «отсечения боковых ходов» П. Тейяра де Шардена) и до текущего существования видов (рис. 1).

Этот макроскопический процесс является иерархическим отображением действия «эволюционных волн» на уровне биомолекул, которые размножаются автокаталитически или за счет циклического катализа в гиперциклах.

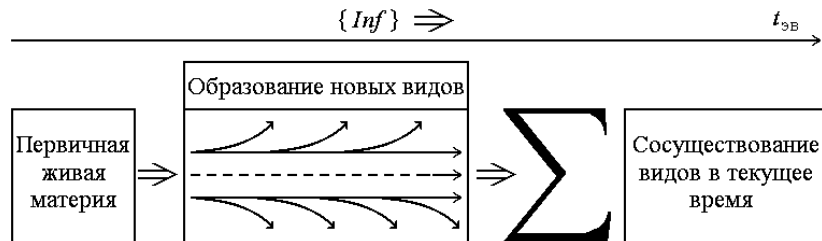


Рис. 1. Представление эволюции живого как «сверхдлинной волны»

Эволюционная волна по своему определению является непрерывным информационным сигналом, но, в то же время, каждый качественный переход — образование новой биомолекулы, нового вида — суть процесс дискретный — коллапс «волны» с передачей информации новой биосистеме.

В технических системах, создаваемых человеком, зачастую оба принципа передачи и обработки информации гибко сочетаются, но каналы их четко разделены, а взаимное преобразование цифровых и аналоговых сигналов выполняется с помощью специальных устройств: ЦАП и АЦП. В биосистемах, как мы убедились, ситуация качественно иная. Очевидно, это является специфическим законом природы, который устанавливает оптимальное и гибкое сочетание двух основных форм представления информационных сигналов: непрерывных и дискретных. Справедлива

Лемма 1. *Неограниченное возрастание роли и объема цифровой обработки и передачи информации в итоге приводит к ситуации «компьютерной патологии», что является следствием нарушения в глобальном информационном поле ноосферы априори заданного соотношения между дискретной и непрерывной формами представления информации — формулировка закона сохранения формы представления информации.*

Возвратимся к двойственности форм носителей биоинформации. Анализируя основные уравнения волновой и квантовой механики, то есть уравнение Леонтовича для огибающей волнового пакета и квантовое уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + u(r)\psi \equiv H\psi, \quad (2)$$

можно провести определенную связь, например, процессов, описываемых уравнением (2), и процессов биоинформационного обмена.

Если частица, не являясь свободной, движется в потенциальном поле

$u(r)$ (в (2) H — оператор Гамильтона; m — масса частицы; \hbar — постоянная Планка; ψ — волновая функция движения частицы), то суммарная энергия $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ (k — волновое число) есть сумма кинетической и потенциальной энергии. При этом, для случая множества частиц, $|\Psi|^2$ можно интерпретировать как плотность вероятности одинаковых бозе-частиц в данной точке пространства.

Тогда, как и в квантовой механике, дуализм двух форм носителей информации можно объяснить взаимной «перекачкой» энергии в двух ее основных формах текущего проявления: потенциальной и кинетической, причем потенциальная форма соответствует волновой, то есть непрерывной, передачи биоинформации, а кинетическая — коллапсу, то есть дискретной форме передачи.

Более того, функция Ψ в (2) имеет однозначный информационный смысл; это следует из соотношения

$$L = \langle \psi | \tilde{L} | \psi \rangle, \quad (3)$$

которое позволяет найти значение искомой физической величины L (в (3) \tilde{L} — соответствующий постановке задачи оператор; $\langle \dots \rangle$ — символика Дирака).

Однако ассоциация биоинформационного процесса с квантовой теорией требует объяснения (для корректности и аккуратности постановки задачи) следующего, центрального факта квантовой механики: каким образом волновая функция коллапсирует, или, говоря в терминах квантовой теории, почему и каким образом квантовая потенциальность, описываемая волновой функцией, трансформируется в «классическую реальность» при квантовом скачке?

Таким образом, переход $W_{\text{пот}} \rightarrow W_{\text{кин}}$ суть энергетически описывает коллапс волновой функции с выделением информации в любых квантовых системах, в том числе и в биосистемах. Отсюда и естественный дуализм дискретной и непрерывной форм передачи информации в биосистемах. Справедлива

Теорема 1 *о двойственности представления информации в биосистемах: Ритмические (циклические) процессы передачи информации в биосистеме можно рассматривать в контексте дуализма: как непрерывные, так и дискретные, причем непрерывный (волновой) процесс характеризуется квантовой потенциальностью и несет в себе интегральную информацию, а дискретный суть коллапс в волновом процессе — выделение квантов локальной информации.*

Доказательство теоремы со всей очевидностью вытекает из вышеприведенных рассуждений и доводов.

Обобщенная теорема Котельникова для биосистем. Наряду с теоремой Шеннона, устанавливающей связь между энтропией и информацией системы, теорема Котельникова является основной в теории информации, поскольку устанавливает связь между непрерывным и дискретным сигналом в их информационной адекватности:

$$T < \frac{1}{2F_g}, \quad (4)$$

где T — период дискретизации (рис. 2, а), F_g — наивысшая, учитываемая в (4), частота из спектра сигнала $f(t)$.

Теорема Котельникова, таким образом, утверждает информационную адекватность непрерывного сигнала $f(t)$ и последовательности $f_0, f_1, \dots, f_i, \dots$ выборок из этого сигнала при соблюдении условия (4) для величины периода дискретизации T . На этом принципе, в частности, построена работа АЦП и ЦАП системы ввода-вывода ЭВМ.

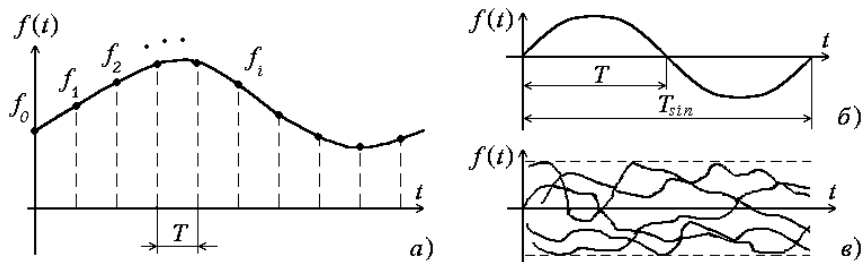


Рис. 2. Иллюстрация к теореме Котельникова

Соотношение (4) можно рассматривать в двух аспектах. Первый из них относится собственно к выбору величины T . Для чисто гармонического, синусоидального сигнала (рис. 2, б) максимально допустимая величина $T = 0,5T_{\sin}$, то есть этого достаточно для дискретного представления информации, содержащейся в полупериоде синусоидальной функции (сохранение информационного содержания). Теперь рассмотрим полярный случай — шумовой сигнал (рис. 2, в), для которого спектральная функция $S(\omega)$ не имеет выраженного «центрального всплеска», более того, для нее не имеет реального смысла средняя спектральная частота, как «центра тяжести» энергетического спектра сигнала:

$$\bar{\omega} = \int_0^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega / \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (5)$$

То есть, в отличие от нешумового сигнала $f(t)$ (рис. 2, а), для которого имеет смысл ограничение спектра $S(\omega)$ окном наблюдения (временным окном) $2\Delta\omega$ (рис. 3), для шумового сигнала $\Delta\omega \rightarrow \infty$, то есть соотношение (4) не имеет практического смысла.

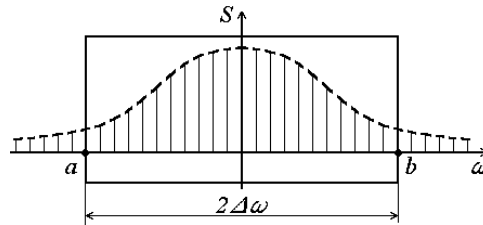


Рис. 3. К иллюстрации окна наблюдения для спектра нешумовой функции

Таким образом, при вычислении величины T в (4) для сигналов $f(t)$ с «конечным» спектром $S(\omega)$ (рис. 2, а) используется окно наблюдения $2\Delta\omega$ (рис. 3), то есть учитывается не весь спектр, но свертка истинного спектра сигнала со спектром функции окна наблюдения (окна Ханна, Хемминга, Наттола, Бартлета).

Для оценки текущего энергетического содержания спектра $S(\omega)$ сигнала $f(t)$ используются понятия мгновенного или текущего спектра

$$S_T(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_T(\tau) x(t + \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (6)$$

где $w_T(\tau)$ — окно наблюдения данных длительностью $T \equiv 2\Delta\omega$, и мгновенной частоты, которая вводится как производная полной фазы комплексного сигнала, построенного из исходного $f(t)$ с использованием преобразований Гильберта:

$$z(t) = [x(t) + iy(t)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (7)$$

$$y(t) = H[x] = \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x(t - \tau) - x(t + \tau)}{\tau} d\tau. \quad (8)$$

Огибающая колебаний и их мгновенная частота в (7), (8) определены как модуль и производная полной фазы сигнала $f(t)$ — как аналитической функции.

Соотношения (7)—(8) позволяют оценить текущие параметры энергии $E(t, \omega)$ для текущей частоты спектра сигнала $x(t) = k(t) \cos\{\varphi(t)\}$.

С учетом сказанного выше, смысл теоремы Котельникова состоит в том, что при замене непрерывной функции $f(t)$ выборками $\{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ для сохранения информационного содержания требуется сохранение в пределах окна $2\Delta\omega$ наблюдение энергии $E(t, \omega)$, несущей эту информацию.

Второй из рассматриваемых аспектов связан с тем, что условие (4) диктует выбор периода дискретизации T , но не предъявляет требований к соотношению амплитуд $\{f_0, f_1, \dots, f_i, \dots\}$ выборков. В АЦП и ЦАП это учитывается (в технической реализации) квантованием амплитуд по уровням разрядности формируемых цифровых кодов ($8 \div 14$ разрядов). Нам же важно выяснить информационно- и энергосодержательный смысл различия амплитуд при дискретизации сигнала $f(t)$.

Наиболее просто ответить на вопрос о энергосодержании выборков f_i : чем больше амплитуда выборки, тем бóльший парциальный энергетический вклад она вносит в общий ансамбль дискретных сигналов (выборки в их последовательности). Не столь однозначным будет утверждение о информационном коррелировании с энергосодержанием. Если обратиться к простейшему, синусоидальному сигналу (рис. 2, б), то амплитуда его единственной выборки f_0 в спектре не играет роли информационного характера. В шумовом сигнале (рис. 2, в) огибающая колебаний и их мгновенная частота являются медленно меняющимися функциями, но вести речь о информационном содержании не имеет смысла, ибо если в соотношении (4) положить $T \rightarrow 0$, как то и следует из вида спектра шумового сигнала, то приходим к абсурдному утверждению: энтропия S исчезающе мала; тогда из закона постоянства суммы энтропии и информации

$$S + Inf = const \quad (9)$$

следует, что шумовой сигнал несет гигантское информационное содержание (?!).

Итак, в случае монохроматического (синусоидального) сигнала имеем $O(S) + Inf = const$, а для шумового сигнала $S + O(Inf) = const$.

Для всех промежуточных (реальных в биосистемах) форм сигналов справедлива

Лемма 2. Информационное содержание каждой i -й выборки в дискретизированной функции $f(t)$, относящейся к классу измеримых, определяется как ее амплитудой $|f_i|$, так и динамикой изменения амплитуд всех выборок слева [$< i$] и справа [$> i$] на интервале $[a, b]$ окна наблюдения.

Доказательство. Выборки f_i можно интерпретировать как измеримые функции $f_i(t)$, ограниченные в их совокупности как по амплитудам $|f_i|$, так и интервалам $[a, b]$ действия. Каждой выборке-функции $f_i(t)$ соответствует ее информационное содержание Inf^i , то есть функция $\left\{ Inf^i \right\} |f_i|$ характеризует как энергетическое, так и информационное содержание функции-выборки $f_i(t)$. Тогда, применяя процедуру почленного интегрирования, получим на интервале $[a, b]$ интеграл $\int_a^b \left\{ Inf^i \right\} f_i(t) dt$, характеризующий информационное и энергетическое содержание совокупности функций $f_0(t), f_1(t), \dots, f_i(t), \dots [a, b]$.

При $T \rightarrow 0$, что соответствует $i \rightarrow \infty$, то есть при переходе от последовательности дискретных функций $f_i(t)$ к непрерывной функции $f(t)$ (рис. 2, а), используем теорему Лебега (доказанную в его диссертации, 1901 г.):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b \left\{ Inf^i \right\} f_i(t) dt = \int_a^b \left\{ Inf \right\} f(t) dt. \quad (10)$$

(В (10) оператор $\{ \dots \}$ означает, что непосредственно интегрирование — как в смысле Римана, так и Лебега по Inf^i не ведется; эта характеристика является только учитываемой — допустимый формальный прием).

Смысл соотношения (10) в том, что сходящаяся последовательность измеряемых функций является измеряемой функцией (основное положение теории интегрирования по Лебегу).

Таким образом, сходимость в процессе интегрирования по Лебегу однозначно указывает на информационную взаимосвязь всех выборок в окне наблюдения. Лемма доказана.

Примечание. В исследуемом процессе «дискретизация \leftrightarrow непрерывность» для функции $f(t)$ важную роль играет то фундаментальное свойство интеграла Лебега, что в формулировке последнего содержится восстановление естественной взаимосвязи операций дифференцирования и интегрирования — идея интегрирования как обращения дифференцирования.

В общем случае интеграл Лебега есть интеграл для функции $F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)$, заданной на множестве (или в области) M .

Что же касается операций суммирования выборок (10), то она подчиняется правилу о счетной (конечной) аддитивности интеграла Лебега:

$$\int_{\sum_{k=1}^{\infty} e_k} F d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} F d\zeta, \quad (11)$$

что опять-таки соответствует процессу «дискретизация \leftrightarrow непрерывность».

С учетом проведенного выше анализа, выводов из теоремы 1 и леммы 2 справедлива

Теорема 2. (Обобщенная теорема Котельникова-Яшина): Информационносодержащий сигнал, передаваемый в реальной (диссипативной технической, конденсированной биологической) среде обладает качеством дуализма, сочетая в себе квантовую потенциальность волновой функции и дискретность коллапсирования (или дискретизации), причем информационное содержание волновой функции определяется ее спектром — амплитудой (энергией) и динамической «позиционной информацией», содержащейся в остальных дискретах волновой функции.

Доказательство теоремы со всей очевидностью вытекает из содержания теоремы 1, леммы и приведенных выше рассуждений и доводов.

Примечание. В контексте темы настоящего параграфа важно учитывать, что дискретно-волновые процессы передачи информации в биосистемах являются пространственными, поэтому в строгих терминах математической физики анализ следует вести, например, в рамках обобщенного уравнения Гинзбурга-Ландау (уравнения Г. Хакена). Однако ограничимся полезными иллюстрациями, в частности, для учитываемых в плоскости (x, y) распространение сигнала $f(t)$ реальных характеристик среды распространения: диссипация, нелинейность, дисперсионность и пр. (рис. 4, 5). В такой среде характеристики сигнала, в частности, частота является функцией координат $\mathfrak{D}\{\omega(x, y)\}$ (рис. 4 — оператор вращения «текущей» координатной оси). Соответственно и вид спектральной функции $S(\omega)$ при вращении изменяется: $\mathfrak{D}S[\omega(x, y)]$; изменяется и учитываемая верхняя частота ω_g в формуле Котельникова (4):

$$\mathfrak{D}\{\mathcal{F}(T) < \pi/\omega_g(x, y)\} \Big|_{\sigma(\omega_g)}. \quad (14)$$

где $\sigma(\omega_g)$ — область изменения ω_g .

Изменение спектра соответствует изменению $\Theta\{x, y\}$ функции $f(t)$ в данной материальной среде (рис. 5), где $\mathcal{F}(T)$ — область изменения периода дискретизации T . Таким образом, формулу Котельникова (4) с учетом (14) можно записать в виде:

$$\Theta\{\mathcal{F}(T) < \pi/\omega_e(x, y)\} \Big|_{\sigma(\omega_e)}. \quad (15)$$

(Мы не рассматриваем обобщение (15) на случай более сложной структуры сигнала в биосистеме — голографического; хотя алгоритм тот же самый).

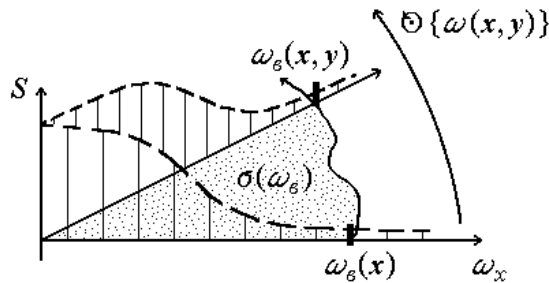


Рис. 4. К изменению спектра $S(\omega)$ в реальной среде распространения сигнала

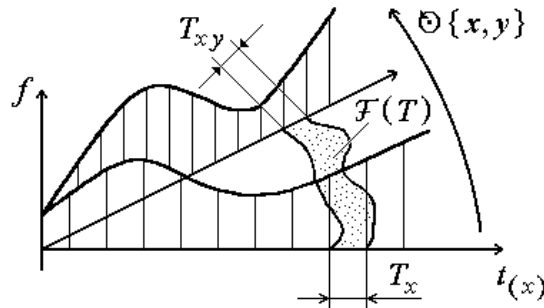


Рис. 5. К изменению функции $f(t)$ в реальной среде распространения сигнала

Лит. Яшин А. А. Живая материя: Онтогенез жизни и эволюционная биология / Предисл. В. П. Казначеева.— М.: Изд-во ЛКИ / URSS, 2007.— 240 с. (2-ое издание в 2010); Хакен Г. Информация и саморегуляция. Макроскопический подход к сложным системам: Пер. с англ.— М.: Ком Книга / URSS, 2005.— 248 с; Котельников В. А. Теорема потенциальной помехоустойчивости.— М.: Радио и связь, 1998.— 152 с.