$$-rot\vec{\mathrm{v}}d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \mathrm{v}^1 r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p)) +$$
$$+\vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge$$
$$\wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \mathrm{v}^1 r)) \qquad (2.13)$$

Таким образом, показано существование тесной связи внешних дифференциалов с операторами векторного анализа: градиентом, дивергенцией и ротором.

Уравнение неразрывности потока крови имеет вид:

$$\begin{aligned}&(d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \mathrm{v}^1 r) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ &+(d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0\end{aligned} \qquad (2.14)$$

Если вектор $\vec{e}_3$ будет касательным к линии тока, то

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\vec{e}_3 \qquad (2.15)$$

В этом случае из (2.14) получаем эквивалентные соотношения:

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3,$$

или

$$\left(\frac{d\ln \mathrm{v}}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0\\ \omega^2=0}} = p_2 - q_1, \qquad (2.16)$$

где $\omega^3 = ds$.

Величина $p_2 - q_1$ есть средняя кривизна линий тока.

Теорема 4.1. В каждой точке потока логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруэнции линий тока.

Конгруэнцию линий, для которой $p_2 - q_1 = 0$, принято называть минимальной конгруэнцией.

Следствие. Если величина скорости потока постоянна вдоль каждой линии тока, то конгруэнция линий тока есть минимальная конгруэнция.

Вектор $\vec{v}$ есть вихревой вектор, для которого справедливо соотношение:

$$\vec{\nu} = \frac{1}{2} rot\vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\nu^A \vec{e}_A, \qquad (2.17)$$

тогда из формулы (2.13) будут определяться компоненты вихря:

$$-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \mathrm{v}^1 r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \\ +\mathrm{v}^2 p),$$

$$-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^2 = \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \\ +\mathrm{v}^3 q), \qquad (2.18)$$

$$-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^3 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \\ +\mathrm{v}^1 r).$$

Пусть имеет место представление вектора скорости в виде (2.15). В этом случае соотношения (2.18) примут вид:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^1 &= -\mathrm{v}p_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge d\mathrm{v} \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^2 &= \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge d\mathrm{v} + \mathrm{v}q_3 \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \nu^3 &= \mathrm{v}q_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - \mathrm{v}p_1 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 \end{aligned} .$$

Представляя дифференциал от скорости в виде $d\mathrm{v} = \mathrm{v}_A \omega^A$, получим:

$$\begin{aligned} \nu^1 &= \mathrm{v}p_3 - \mathrm{v}_3 \\ \nu^2 &= \mathrm{v}q_3 - \mathrm{v}_1 \\ \nu^3 &= -\mathrm{v}(p_1 + q_2) \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Из первых двух равенств (2.19) видно, что сумма производных от величины скорости по направлению линии тока и направлению, определяемую формой ω^1, равна сумме первой и второй компонентам вихревого вектора, взятых с противоположным знаком, а также произведению величины скорости на сумму $p_3 + q_3$, то есть

$$\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_3 = -(\nu^1 + \nu^2) + \mathrm{v}(p_3 + q_3).$$

Из последнего соотношения (2.19) получим равенство:

$$\frac{\nu^3}{\mathrm{v}} = -(p_1 + q_2)\,.$$

Известно, что полная кривизна K и гауссова кривизна K_g конгруэнций линий, касательными к которым является вектор $\vec{e}_3$, задаются соотношениями:

$$K = p_1 q_2 - p_2 q_1;\; K_g = p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1}{4}(p_1 + q_2)^2.$$

Из последних равенств получаем: $\sqrt{K - K_g} = \frac{1}{2}\left|p_1 + q_2\right|.$

Теорема 4.2. Отношение проекции вихря на касательную линии тока к величине скорости есть некоторый инвариант, определенным образом связанный с полной и гауссовой кривизной конгруэнции линий тока.

Так как движение крови происходит под действием силы тяжести, то можно принять, что внешние силы $\vec{F}$, действующие на частицы крови, консервативны, то есть имеют потенциал U такой, что $\vec{F} d\vec{x} = -dU.$

Величину $H = \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + U + \frac{p}{\rho}$, по аналогии, назовем полной энергией частицы крови. Тогда имеем:

$$grad\ H = 2[\vec{\mathrm{v}}, \vec{\nu}], \tag{2.20}$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение векторов скорости крови и вихревого вектора.

После умножения обеих частей равенства (2.20) скалярно на $d\vec{x}$, получим:

$$dH = 2\vec{\mathrm{v}}\vec{\nu}d\vec{x} \tag{2.21}$$

или

$$dH = \begin{vmatrix} \mathrm{v}^1 & \nu^1 & \omega^1 \\ \mathrm{v}^2 & \nu^2 & \omega^2 \\ \mathrm{v}^3 & \nu^3 & \omega^3 \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

Правая часть равенства (2.21) обращается в нуль для перемещений, направления которых совпадают либо с направлением скорости, либо с направлением вихря, либо же с любым направлением, компланарным первым двум. Все эти перемещения лежат на поверхностях семейства так называемой «постоянной энергии» ($H = const$). На этих поверхностях располагаются все линии тока и все вихревые линии, если последние существуют. Здесь следует иметь в виду, что, в основном, кровь по ССС движется ламинарно, то есть с отсутствием элементов завихрений, что приводит к отсутствию вихревых линий. Но в определенных участках ССС, как это отмечалось выше, турбулентное движение присутствует и это приводит к более «богатой» геометрической картине.

На поверхностях «постоянной энергии» располагаются все линии тока и все вихревые линии. В случае безвихревого потока, как видно из (2.21), функция H также будет постоянна. В предположении постоянства скорости на каждой поверхности полной энергии, определяется семейство последних таким образом, чтобы можно было построить на ней бесконечное множество конгруэнций линий тока.

В данном случае гемодинамические уравнения Гельмгольца, которые аналогичны гидродинамическим уравнениям Гельмгольца, можно записать одним векторным соотношением:

$$(\vec{\mathrm{v}}\ grad)\vec{v} = (\vec{v}\ grad)\vec{\mathrm{v}},$$

где скобками обозначено скалярное произведение вектора на оператор «набла».

Развертывая эти скалярные произведения по формулам (2.4), получим:

$$2\Theta_{\bar{\mathrm{v}}} d\vec{v} = \Theta_{\bar{v}} d\vec{\mathrm{v}}, \qquad (2.23)$$

где через $\Theta_{\bar{\mathrm{v}}}$ и $\Theta_{\bar{v}}$ обозначены билинейные внешние формы:

$$\Theta_{\bar{\mathrm{v}}} = \mathrm{v}^1\omega^2 \wedge \omega^3 + \mathrm{v}^2\omega^3 \wedge \omega^1 + \mathrm{v}^3\omega^1 \wedge \omega^2,$$
$$\Theta_{\bar{v}} = v^1\omega^2 \wedge \omega^3 + v^2\omega^3 \wedge \omega^1 + v^3\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Дифференцируя равенства (2.17), получим:

$$2d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A)\vec{e}_A,$$

то есть уравнение (2.23) распадается на три обобщенных уравнения Гельмгольца:

$$\Theta_{\bar{\mathrm{v}}}(dv^C + v^B \omega_B^C) = \Theta_{\bar{v}}(d\mathrm{v}^C + \mathrm{v}^B \omega_B^C).$$

Для ортогонального репера получим три соответствующих уравнения:

$$\Theta_{\bar{\mathrm{v}}}(dv^1 - v^2 r + v^3 q) = \Theta_{\bar{v}}(d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q),$$
$$\Theta_{\bar{\mathrm{v}}}(dv^2 - v^3 p + v^1 r) = \Theta_{\bar{v}}(d\mathrm{v}^2 - \mathrm{v}^3 p + \mathrm{v}^1 r),$$
$$\Theta_{\bar{\mathrm{v}}}(dv^3 - v^1 q + v^2 p) = \Theta_{\bar{v}}(d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p).$$

При исследовании стационарного потока крови можно освободиться от динамических элементов, сохраняя только кинематические и геометрические элементы. Это возможно сделать двумя способами: а) в рассмотрение вводится семейство поверхностей, на которых располагаются линии тока и вихревые линии; б) используются уравнения Гельмгольца как условия интегрируемости уравнения (2.22).

4.3. Поверхности постоянной энергии при моделировании движения крови

В данном параграфе, как и в предыдущем, предполагается, что кровь движется в части сосуда, а это позволяет вести исследования в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть поток крови является вихревым. То есть движение крови носит турбулентный характер [164]. Вводится функция H, которая рассматривалась также в предыдущем параграфе и которая аналогична функции Бернулли. Семейство поверхностей, на каждой из которых располагается одно семейство линий тока крови и одно семейство вихревых линий, а также функция H принимает постоянное значение, будем называть поверхностями постоянной энергии. Рассматриваются поверхности постоянной энергии и их свойства, которые используются для описания геометрии движения крови в трехмерном евклидовом пространстве, а отсюда и движение крови по участку сосуда системы кровообращения.

Для рассмотрения геометрии движущейся крови по части сосуда привлекается теория векторных полей. Зададим поле скоростей следующим образом:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}(x, y, z, t) \tag{3.1}$$

Репер выбираем таким образом, что вектор $\vec{e}_3$ направлен по касательной линии тока или интегральной линии вектора скорости крови, то есть

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\vec{e}_3, \tag{3.2}$$

где v – величина скорости крови.

Величины x, y, z, t называют переменными Эйлера. Поле скоростей называется стационарным, если оно не зависит от времени t. В противном случае векторное поле называется нестационарным.

Рассматривая движение крови в кровеносной системе, мы, в основном, рассматриваем уже установившееся движение, которое в части сосуда происходит по одним и тем же траекториям. То есть подходить к изучению движения крови можно как к установившемуся стационарному потоку. Исключение может составлять только то место сосуда, в котором произошло патологическое изменение, такое как образование атероматозных бляшек, которые способствуют местному развитию турбулентности и дальнейшее уменьшение диаметра приводит к изменению потока крови и к изменению турбулентного движения, а также геометрических объектов, применяемых для изучения движения крови. В этом случае происходит нарушение стационарности движения крови. Здесь, конечно, не затрагиваются внешние воздействия или внешние вмешательства, которые приводят к нарушению герметичности стенок кровеносных сосудов, что также приводит к нарушению стационарности потока крови.

В качестве векторного поля, исходя из формулы (3.2), будем рассматривать поле вектора $\vec{e}_3$, который является базисным вектором репера $R_x = \left\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$, связанного с каждой точкой x рассматриваемой области евклидова пространства E^3, через которую проходит поток крови и которая находится внутри рассматриваемого участка кровеносного сосуда. Причем модуль вектора $\vec{e}_3$ равен 1 и этот вектор ортогонален двум оставшимся базисным векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (рис. 8):

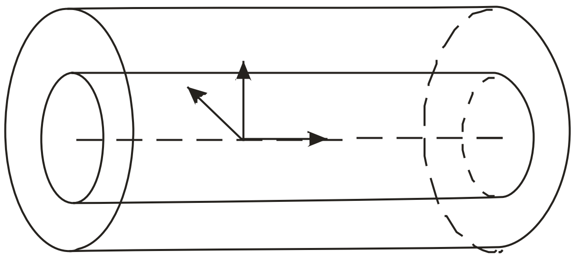

Рис. 8. К иллюстрации выбора репера для участка сосуда.

По принятой уже терминологии линии при заданном времени t, касающиеся в каждой точке (x, y, z) вектора скорости $\vec{\mathrm{v}}(x, y, z, t)$, называются линиями тока или интегральными линиями. Выбранная частица крови при движении описывает траекторию, которая в каждый момент времени t в любой точке пространства $E^3 - (x, y, z)$, находящейся внутри рассматриваемого участка сосуда, касается вектора скорости $\vec{\mathrm{v}}(x, y, z, t)$. Так как рассматривается стационарный поток, то переменную t можно не учитывать. Также для стационарного поля скоростей крови линии тока совпадают с траекториями движения частиц крови, чего нельзя утверждать для нестационарного поля, так как линии тока для него определяются для каждого конкретного момента времени. Поскольку кровь представляется идеальной несжимаемой жидкостью, то поле скоростей $\vec{\mathrm{v}}$ удовлетворяет системе уравнений, являющейся аналогом системы уравнений, установленной Эйлером для жидкости:

$di\mathrm{v}\,\vec{\mathrm{v}} = 0$ - уравнение несжимаемости; (3.3)

$\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + \nabla_{\vec{\mathrm{v}}} \vec{\mathrm{v}} = F - \dfrac{1}{\rho} grad\ p$ - уравнение в напряжениях (уравнение Эйлера),

где приняты следующие обозначения: $\nabla_{\vec{\mathrm{v}}} -$ производная вдоль вектора $\vec{\mathrm{v}}$; $F -$ плотность объемных сил; $\rho -$ плотность крови. Параметр p, который является функцией координат и времени, назовем гемодинамическим давлением. Гемодинамическое давление характеризует действие сил на бесконечно малую площадь, взятую в участке кровеносного сосуда в фиксированный момент времени и в фиксированной точке. Система (3.3) является системой четырех уравнений для четырех функций: три координаты вектора скорости $\vec{\mathrm{v}}$ и p. Также рассматривается случай, когда объемные силы имеют потенциал: $\vec{F} = -gradU$. Где эти условия не выполняются, будет оговорено особо.

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial t} + grad(\frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U) + [rot\vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{v}}] = \vec{0},$$

где функция $H = \frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U$ называется функцией Бернулли.

Для стационарного поля скоростей движения крови имеем следующую систему уравнений, которая получается из системы (3.3):

$$div\,\vec{\mathrm{v}} = 0; \qquad (3.3^{\backslash})$$

$$gradH = [\vec{\mathrm{v}}, rot\vec{\mathrm{v}}].$$

Выясним геометрические свойства поля $\vec{e}_3$, задающего направление скорости для стационарного поля скоростей крови. Первое из уравнений ($3.3^{\backslash}$) дает:

$$div\,\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}div\vec{e}_3 + (\vec{e}_3, grad\ \mathrm{v}) = 0.$$

Обозначив через $ds = \omega^3$ и через $\frac{d}{ds}$ производную по направлениям интегральных линий поля $\vec{e}_3$, получим:

$$\vec{\mathrm{v}}\ div\vec{e}_3 + (\vec{e}_3, \frac{d\mathrm{v}}{ds}\vec{e}_3) = 0 \text{ или}$$

$$\mathrm{v}\ div\vec{e}_3 + \frac{d\mathrm{v}}{ds} = 0.$$

Окончательно получим:

$$div\,\vec{e}_3 = -\frac{d\ln \mathrm{v}}{ds} \qquad (3.4)$$

С учетом (2.19) имеем:

$$div\,\vec{e}_3 = -(p_2 - q_1) \qquad (3.5)$$

Так как $(p_2 - q_1)$ есть средняя кривизна линий тока или интегральных линий векторного поля $\vec{e}_3$, то из уравнения (3.5) следует, что $div\vec{e}_3$ в каждой точке потока равна средней кривизне конгруэнции линий тока, взятой с противоположным знаком.

Теорема 4.3. Величина $div\,\vec{e}_3$ в каждой точке потока крови равна средней кривизне конгруэнции линий тока.

Следствие. Величина $div\,\vec{e}_3$ равна нулю тогда и только тогда, когда конгруэнция линий тока крови является минимальной конгруэнцией.

Из следствия следует, что в случае минимальной конгруэнции линий тока крови векторное поле $\vec{e}_3$ является соленоидальным.

Далее, рассмотрим более подробно второе уравнение системы ($3.3^{/}$). Для этого проанализируем соотношение:

$rot(\mathrm{v}\vec{e}_3) = \mathrm{v}\,rot\vec{e}_3 + [grad\ \mathrm{v},\ \vec{e}_3],$ которое подставим во второе уравнение системы ($3.3^{/}$):

$$grad\ \mathrm{H} = [\mathrm{v}\vec{e}_3,\ \mathrm{v}\,rot\vec{e}_3 + [grad\ \mathrm{v},\ \vec{e}_3]] = \mathrm{v}^2[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] + [\mathrm{v}\vec{e}_3,[grad\ \mathrm{v}, \vec{e}_3]] =$$
$$= \mathrm{v}^2[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] - \mathrm{v}((\vec{e}_3, grad\ \mathrm{v})\vec{e}_3 - grad\ \mathrm{v}) = \mathrm{v}^2[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] - \mathrm{v}(-\mathrm{v}\vec{e}_3 div\vec{e}_3 -$$
$$- grad\ \mathrm{v}) = \mathrm{v}^2[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] + \mathrm{v}^2\vec{e}_3 div\vec{e}_3 + \mathrm{v}\,grad\ \mathrm{v}.$$

Отсюда имеем:

$$grad\ H = \mathrm{v}^2[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] + \mathrm{v}^2\vec{e}_3 div\vec{e}_3 + \mathrm{v}\,grad\ \mathrm{v} \qquad (3.6)$$

Согласно соотношению (2.13) при условии, что $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\vec{e}_3$, запишем:

$$-rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-\mathrm{v}p) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v})) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge d\mathrm{v} +$$
$$+\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (\mathrm{v}q)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (\mathrm{v}q) - \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (\mathrm{v}p));$$

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$-rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)=\vec{e}_1(-\mathrm{v}\omega^1\wedge\omega^2\wedge(p_3\omega^3)+$$
$$+\omega^1\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}))+\vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v})+\omega^2\wedge\omega^1\wedge(\mathrm{v}q_3\omega^3)+$$
$$+\vec{e}_3(\mathrm{v}\omega^3\wedge\omega^1\wedge(q_2\omega^2)-\omega^3\wedge\omega^2\wedge(\mathrm{v}p_1\omega^1)).$$

В случае ортонормированного репера имеем $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3=1$, поэтому будем иметь:

$$-rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=\vec{e}_1(-\mathrm{v}p_3\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+\mathrm{v}(p_2-q_1)\omega^1\wedge\omega^3\wedge$$
$$\wedge\omega^3)+\vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^3\wedge\mathrm{v}(p_2-q_1)\omega^3+\mathrm{v}q_3\omega^2\wedge\omega^1\wedge\omega^3)+\vec{e}_3(\mathrm{v}q_2\omega^3\wedge\omega^1\wedge$$
$$\wedge\omega^2-\mathrm{v}p_1\omega^3\wedge\omega^2\wedge\omega^1).$$

С учетом вполне понятных преобразований, получим:

$$-rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3((-\mathrm{v}p_3)\vec{e}_1-\mathrm{v}q_3\vec{e}_2+(\mathrm{v}q_2+\mathrm{v}p_1)\vec{e}_3).$$

После сокращения на $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq0$ получим:

$$-rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)=(\mathrm{v}p_3)\vec{e}_1+(\mathrm{v}q_3)\vec{e}_2-(\mathrm{v}q_2+\mathrm{v}p_1)\vec{e}_3.$$

Окончательно запишем:

$$rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)=\mathrm{v}(p_3\vec{e}_1+q_3\vec{e}_2-(q_2+p_1)\vec{e}_3)\qquad(3.8)$$

Второе уравнение из системы ($3.3^{/}$) запишется следующим образом:

$$grad\ H=[\mathrm{v}\vec{e}_3,\ \mathrm{v}(p_3\vec{e}_1+q_3\vec{e}_2-(q_2+p_1)\vec{e}_3)]=\mathrm{v}^2([\vec{e}_3,p_3\vec{e}_1]+q_3[\vec{e}_3,\vec{e}_2]-$$
$$-(q_2+p_1)[\vec{e}_3,\vec{e}_3])=\mathrm{v}^2(p_3[\vec{e}_3,\vec{e}_1]+q_3[\vec{e}_3,\vec{e}_2]).$$

Так как в случае ортонормированного репера $\vec{e}_3=[\vec{e}_1,\vec{e}_2]$, то $\vec{e}_1=[\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ и $\vec{e}_2=[\vec{e}_3,\vec{e}_1]$. На основании этого получаем:

$$grad\ \mathrm{H}=\mathrm{v}^2(p_3\vec{e}_2-q_3\vec{e}_1)\qquad(3.9)$$

Умножая (3.9) скалярно на произвольное перемещение $d\vec{x}$ частицы крови, получим:

$$dH = \mathrm{v}^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)d\vec{x} = \mathrm{v}^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3) =$$
$$= \mathrm{v}^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1),$$

то есть

$$dH = \mathrm{v}^2(-q_3\omega^1 + p_3\omega^2). \qquad (3.10)$$

Аналогично, как это было сделано для $rot(\mathrm{v}\vec{e}_3)$, получим:

$$rot\vec{e}_3 = p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2 - (q_2 + p_1)\vec{e}_3 \qquad (3.11)$$

Из последнего равенства будем иметь:

$$[\vec{e}_3, rot\vec{e}_3] = p_3[\vec{e}_3, \vec{e}_1] + q_3[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = p_3\vec{e_2} - q_3\vec{e}_1.$$

Умножая равенство (3.6) скалярно на перемещение частицы крови $d\vec{x}$, получим:

$$dH = \mathrm{v}^2(p_3\vec{e}_2 - q_3\vec{e}_1)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3) - \mathrm{v}^2\frac{d\ln\mathrm{v}}{ds}\vec{e}_3 d\vec{x} + \mathrm{v}d\mathrm{v}.$$

В случае ортонормированного репера будем иметь:

$$dH = \mathrm{v}^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1) - \mathrm{v}^2\frac{d\ln\mathrm{v}}{ds}\omega^3 + \mathrm{v}d\mathrm{v}.$$

Последнее равенство окончательно перепишем:

$$dH = \mathrm{v}^2(p_3\omega^2 - q_3\omega^1) - \mathrm{v}^2 d\ln\mathrm{v} + \mathrm{v}d\mathrm{v} \qquad (3.12)$$

Поскольку $\mathrm{v}d\mathrm{v} - \mathrm{v}^2 d\ln\mathrm{v} = 0$ на поверхности постоянной полной энергии, то из равенства (3.12) получим соотношение (3.10).

Случай покоя, когда $\vec{\mathrm{v}} = \vec{0}$ не рассматривается по вполне понятным причинам. Из равенства (3.10) можно сделать вывод: функция H постоянна тогда и только тогда, когда $p_3 = q_3 = 0$. Раскроем геометрический смысл последних равенств. Перемещения, для которых $dH = 0$, лежат на поверхностях семейства «постоянной энергии» $H = const$, которые характеризуются тем, что на них располагаются все линии тока и все вихревые линии. В случае, когда движение крови носит ламинарный характер, на таких поверхностях будут располагаться только линии тока.

Выберем за поле векторов $\vec{e}_3$ поле нормалей к данному семейству поверхностей. Вектор кривизны конгруэнции линий, ортогональных к этому семейству поверхностей или конгруэнция интегральных линий векторного поля $\vec{e}_3$, имеет вид:

$$\left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0\\ \omega^2=0}} = q_3\vec{e}_1 - p_3\vec{e}_2.$$

Учитывая, что $p_3 = q_3 = 0$, получим:

$$\left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0\\ \omega^2=0}} = \vec{0}, \tag{3.13}$$

то есть интегральные линии векторного поля $\vec{e}_3$ являются прямыми, а вектор $\vec{e}_3$ постоянен на каждой поверхности семейства. В этом случае частицы крови будут двигаться по прямой.

Как известно, векторное поле $\vec{e}_3$ будет голономным, то есть существует семейство поверхностей ортогональных этому полю, тогда и только тогда, когда $(\vec{e}_3, rot\vec{e}_3) = 0$. В случае, когда $(\vec{e}_3, rot\vec{e}_3) \neq 0$, такого семейства поверхностей не существует. С учетом (3.11) получаем, что векторное поле $\vec{e}_3$ голономно тогда и только тогда, когда $q_2 + p_1 = 0$, при условии, когда вектор $\vec{e}_3$ имеет направление скорости. Из формулы (2.13) найдем:

$$-rot\vec{e}_1 d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge r + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-q)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (-q)) +$$
$$+\vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge r).$$

Раскрывая формы r и q, получим:

$$-rot\vec{e}_1 d\tau = \vec{e}_1(r_3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - q_2\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2) - q_1\vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1) +$$
$$+r_1\vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1).$$

Последнее перепишем в виде:

$$-rot\vec{e}_1 d\tau = \vec{e}_1(r_3+q_2)\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 - q_1\vec{e}_2(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3) -$$
$$-r_1\vec{e}_3(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3).$$

Так как $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq 0$, то из последнего равенства будем иметь:

$$rot\vec{e}_1 = -(q_2+r_3)\vec{e}_1 + q_1\vec{e}_2 + r_1\vec{e}_3 \tag{3.14}$$

Используя равенство (3.14), получим:

$$(\vec{e}_1, rot\vec{e}_1) = -(q_2+r_3).$$

Как следует из последнего равенства, векторное поле $\vec{e}_1$ будет голономным тогда и только тогда, когда

$$q_2+r_3=0, \tag{3.15}$$

при условии, что вектор скорости имеет направление $\vec{e}_1$.

Аналогично найдем условие голономности векторного поля $\vec{e}_2$. Для этого также воспользуемся формулой (2.13):

$$-rot\vec{e}_2 d\tau = \vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^3\wedge p) + \vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^3\wedge p - \omega^2\wedge\omega^1\wedge r) +$$
$$+\vec{e}_3(\omega^3\wedge\omega^1\wedge(-r)).$$

Расписывая формы p и r по базисным формам, получим:

$$-rot\vec{e}_2 d\tau = p_2\vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^3\wedge\omega^2) + \vec{e}_2(p_1\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^1 - r_3\omega^2\wedge\omega^1\wedge\omega^3) -$$
$$-r_2\vec{e}_3(\omega^3\wedge\omega^1\wedge\omega^2).$$

После несложных преобразований будем иметь:

$$-rot\vec{e}_2 d\tau = -p_2\vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3) + \vec{e}_2(p_1+r_3)(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3) -$$
$$-r_2\vec{e}_3(\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3).$$

Деля обе части последнего равенства на $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq 0$, запишем:

$$rot\vec{e}_2 = p_2\vec{e}_1 - (p_1+r_3)\vec{e}_2 + r_2\vec{e}_3 \tag{3.16}$$

Из равенства (3.16) имеем:

$$(\vec{e}_2, rot\vec{e}_2) = -(p_1 + r_3).$$

Как видно из этого равенства, векторное поле $\vec{e}_2$ будет голономным тогда и только тогда, когда

$$p_1 + r_3 = 0, \tag{3.17}$$

при условии, что вектор скорости крови имеет направление вектора $\vec{e}_2$.

Таким образом, условия $p_1 + q_2 = 0$, (3.15) и (3.17) говорят о том, что к векторам репера $\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ существуют семейства поверхностей, ортогональных к этим векторам.

Далее, продифференцируем функцию Бернулли, то есть $H = \frac{\vec{\mathrm{v}}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U$, при условии, что на поверхности постоянной энергии $H = const$:

$$\vec{\mathrm{v}}\, d\vec{\mathrm{v}} + \frac{dp}{\rho} + dU = 0,$$

где учтено, что параметр ρ(плотность) крови на рассматриваемом участке сосуда принимает постоянное значение. Так как $dU = -\vec{F}d\vec{x}$, где F содержит и составляющую, порожденную силой тяжести, то

$$\vec{\mathrm{v}}\, d\vec{\mathrm{v}} + \frac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0.$$

Кроме того, $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\vec{e}_3$ и $d\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\omega_3^1\vec{e}_1 + \mathrm{v}\omega_3^2\vec{e}_2 + d\mathrm{v}\,\vec{e}_3$. Последнее означает, что $\vec{\mathrm{v}}d\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}d\mathrm{v}$ и последнее равенство примет вид:

$$\mathrm{v}d\mathrm{v} + \frac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0.$$

Из формулы (2.19) получим, что $\mathrm{v}d\mathrm{v} = \mathrm{v}^2(p_2 - q_1)\omega^3$. Тогда при условии ортогональности равнодействующей всех сил $\vec{F}$, действующих на частицу крови в рассматриваемом участке сосуда, смещению $d\vec{x}$, будем иметь:

$$\mathrm{v}^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} = 0, \text{ или}$$

$$dp = \mathrm{v}^2(q_1 - p_2)\omega^3 \tag{3.18}$$

Из формулы (3.18) можно сделать вывод, который сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.4. Если все перемещения $d\vec{x}$ частиц крови принадлежат соответствующему семейству поверхностей постоянной энергии и вектор $\vec{F}$ коллинеарен вектору $\vec{e}_3$, то гемодинамическое давление в участке сосуда пропорционально средней кривизне конгруэнции линий тока.

Если воспользуемся понятием минимальной конгруэнции, то получим следующее.

Следствие. Если все перемещения $d\vec{x}$ частиц крови, принадлежащие соответствующему семейству поверхностей постоянной энергии, а вектор силы $\vec{F}$ ортогонален этому семейству, то гемодинамическое давление на участке сосуда постоянно тогда и только тогда, когда конгруэнция линий тока является минимальной конгруэнцией.

Величина скорости потока жидкости будет постоянной на каждой поверхности семейства поверхностей постоянной энергии тогда и только тогда, когда будут выполняться следующие два условия:

- конгруэнция линий тока минимальна;
- для каждой точки потока вектор кривизны линии тока является градиентом соответствующей поверхности полной энергии.

В этом случае семейство поверхностей постоянной энергии принято называть семейством поверхностей постоянной полной энергии. На каждой из таких поверхностей модуль вектора скорости принимает постоянное значение. Это значение величины скорости меняется от поверхности к поверхности. На поверхностях постоянной полной энергии имеем:

$$dp = -\rho(\vec{F}d\vec{x}) \qquad (3.19)$$

Как видно из формулы (3.19), гемодинамическое давление постоянно в участке рассматриваемого сосуда тогда и только тогда, когда сила $\vec{F}$ ортогонально перемещению $d\vec{x}$.

Здесь следует отметить, что при ламинарном движении крови, когда каждая из ее частиц движется параллельно стенки сосуда, равнодействующая всех сил, действующих на частицы, должна быть ортогональна стенкам сосуда.

В случае ламинарного движения крови по поверхностям постоянной полной энергии гемодинамическое давление принимает постоянное значение в рассматриваемом участке сосуда тогда и только тогда, когда равнодействующая всех сил, действующих на частицы данного участка, ортогональна стенкам сосуда.

Использование поверхностей постоянной полной энергии, то есть поверхностей, на каждой из которых величина скорости крови принимает постоянное значение, является полезным при описании геометрии движущейся крови и, при случае, этим будем пользоваться.

Далее, представим равнодействующую всех сил, действующих на кровь, находящуюся в рассматриваемом участке сосуда, в виде $\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$, где $F_1, F_2, F_3 -$ координаты этой силы и $d\vec{x} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3$. Так как рассматриваются интегральные линии векторного поля $\vec{e}_3$, то можно положить $\omega^1 = \omega^2 = 0$. Отсюда имеем, что $\vec{F}d\vec{x} = F_3\omega^3$. После подстановки получившегося равенства в формулу $\mathrm{v}^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \dfrac{dp}{\rho} - \vec{F}d\vec{x} = 0$ получим:

$$\mathrm{v}^2(p_2 - q_1)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} - F_3\omega^3 = 0 \text{ или}$$

$$(\mathrm{v}^2(p_2 - q_1) - F_3)\omega^3 + \frac{dp}{\rho} = 0 \qquad (3.20)$$

Рассмотрим случай постоянства гемодинамического давления для участка сосуда. Из равенства (3.20) получаем:

$(\mathrm{v}^2(p_2 - q_1) - F_3)\omega^3 = 0$ или, воспользовавшись тем, что форма ω^3 - базисная, запишем:

$$F_3 = \mathrm{v}^2(p_2 - q_1) \qquad (3.21)$$

Теорема 4.5. В случае постоянства давления вдоль участка рассматриваемого сосуда, сила, действующая на кровь в направлении ее движения, прямо пропорциональна квадрату величины скорости и средней кривизне линий тока.

Следствие. Если же конгруэнция линий тока является минимальной, то составляющая равнодействующей сил по направлению движения крови равна нулю.

Известно, что на семействе поверхностей полной энергии с заданными на них линиями тока можно построить бесчисленное множество потоков тогда и только тогда, когда это семейство является семейством постоянной полной энергии.

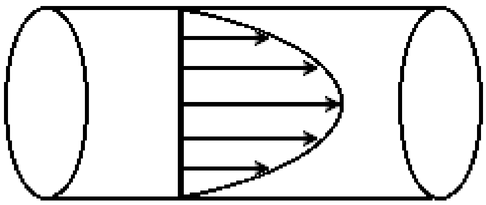

Рис. 9. Профиль скоростей при ламинарном движении крови.

То есть скорость максимальна вдоль оси сосуда и уменьшается по мере приближения к стенкам сосуда. Это объясняется тем, что в граничных слоях на кровь действуют большие силы со стороны стенок сосуда. Эти силы называются силами внешнего трения.

Последний факт, с помощью формулы (3.21), можно объяснить следующим образом. Пусть все линии тока имеют одну и ту же среднюю кривизну линий. Так составляющая F_3, как составляющая в направлении скорости крови, в граничных слоях принимает меньшие значения за счет сил трения, то это приводит к уменьшению скорости. Так как, согласно формуле (3.21) сила и квадрат скорости имеют прямую пропорциональную зависимость.

В общем случае уравнение (3.20) можно переписать в виде:

$$\frac{dp}{\rho} = (F_3 - \mathrm{v}^2(p_2 - q_1))ds \quad \text{или}$$

$$dp = \rho(F_3 - \mathrm{v}^2(p_2 - q_1))ds \tag{3.22}$$

Если же конгруэнция линий тока является минимальной конгруэнцией, то из равенства (3.22) получим:

$$dp = \rho F_3 ds \tag{3.23}$$

Хорошо известно, что для стационарного вихревого течения давление также пропорционально потенциалу объемных сил. Тем самым можно сделать вывод, что случай рассмотрения минимальной конгруэнции линий тока равносилен рассмотрению стационарного вихревого течения. В этих случаях гемодинамическое давление пропорционально потенциалу сил. В этом случае движение крови характеризуется геометрией единичного поля $\vec{e}_3$, которое удовлетворяет уравнениям:

$$rot\vec{e}_3 = \mu\vec{e}_3,$$
$$div\vec{e}_3 = 0.$$

В заключении этого параграфа выясним вопрос, что из себя представляют поверхности полной энергии и это исследование проведем как и в работе [165].

Одной из «постановочных» задач в гемодинамике сосудов является выяснение физико-математической структуры поверхности «постоянной энергии» в случае, когда кровеносные сосуды не подвергаются искажению, то есть представляют собой жесткие трубы, а кровь является идеальной несжимаемой жидкостью. В нашем случае, когда рассматривается участок сосуда, с большой степенью удовлетворяются описанные выше условия.

Пусть скорость крови постоянна на каждой поверхности постоянной энергии, то есть будут рассматриваться поверхности постоянной полной энергии. В случае ламинарного движения крови это так и есть, а в случае турбулентного движения скорость крови меняет свое направление, но остается постоянной по величине. Это и имеется в виду, когда говорится о постоянстве скорости крови, имея в виду постоянство модуля скорости. Рассмотрения будем вести для вихревого потока крови. Случай ламинарного движения можно описать, основываясь на формуле (3.21), а также этот случай будет рассмотрен несколько ниже.

Вихревой поток имеет семейство поверхностей, которому принадлежат все линии тока и все вихревые линии. Выберем за поле векторов $\vec{e}_3$ - поле нормалей к этому семейству поверхностей.

Дифференциальное уравнение последнего семейства будет иметь вид:

$$\omega^3 = 0 \tag{3.24}$$

Линии тока и вихревые линии лежат на этих поверхностях. Следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned} &\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(\cos\sigma\vec{e}_1 + \sin\sigma\vec{e}_2) \\ &2\vec{\nu} = rot\vec{\mathrm{v}} = \nu^1\vec{e}_1 + \nu^2\vec{e}_2,\ \omega^3 = 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где $\vec{\mathrm{v}}-$ вектор скорости крови и $\sigma -$ угол между вектором скорости и вектором $\vec{e}_1$.
Семейство поверхностей должно быть вполне интегрируемо, то есть должно выполняться условие:

$$D\omega^3 \wedge \omega^3 = 0 \tag{3.26}$$

Поскольку в качестве формы ω^3 можно взять длину дуги линии тока, поэтому запишем:

$$\omega^3 = Sds \tag{3.27}$$

Из соотношения (2.25) получим:

$$dH = S\mathrm{v}(-\frac{\nu^1}{2}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{2}\cos\sigma)dS \tag{3.28}$$

Из равенства (3.28) следует, что H должна быть некоторой функцией от s:

$$H = f(s) \tag{3.29}$$

Из равенств (3.28) и (3.29) будем получать:

$$S\mathrm{v}(-\frac{\nu^1}{2}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{2}\cos\sigma) = f^{/}(s) \tag{3.30}$$

Уравнения компонентов вихря будут иметь вид:

$$-\frac{\nu^1}{\mathrm{v}}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 = (\sin\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \cos\sigma(d\sigma + r))\wedge\omega^1\wedge\omega^2 + (q\cos\sigma -$$
$$-p\sin\sigma)\wedge\omega^3\wedge\omega^1;$$

$$-\frac{\nu^2}{\mathrm{v}}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 = (-\cos\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \sin\sigma(d\sigma + r))\wedge\omega^1\wedge\omega^2 - (q\cos\sigma -$$
$$-p\sin\sigma)\wedge\omega^2\wedge\omega^3;$$

$$0 = (-\cos\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \sin\sigma(d\sigma + r))\wedge\omega^1\wedge\omega^2 + (q\sin\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \cos\sigma(d\sigma +$$
$$+r))\wedge\omega^2\wedge\omega^3,$$

где как и прежде p, q, r означают ранее обозначенные формы.

Уравнение непрерывности имеет вид:

$$(\cos\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} - \sin\sigma(d\sigma + r))\wedge\omega^2\wedge\omega^3 + (\sin\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \cos\sigma(d\sigma + r))\wedge\omega^3\wedge$$
$$\wedge\omega^1 + (p\sin\sigma - q\cos\sigma)\wedge\omega^1\wedge\omega^2 = 0.$$

Введем обозначения:

$$L = p_2\sin^2\sigma + (p_1 - q_2)\sin\sigma\cos\sigma - q_1\cos^2\sigma;$$
$$N = p_2\sin\sigma - q_3\cos\sigma;$$

и, удовлетворяя всем гемодинамическим уравнениям, примем, что:

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = \xi\omega^1 + \eta\omega^2 + (L + \frac{f^{/}}{S\mathrm{v}^2})\omega^3;$$
$$d\sigma + r = (\eta + N\sin\sigma)\omega^1 - (\xi + N\cos\sigma)\omega^2 + \varsigma\omega^3, \tag{3.31}$$

где ξ, η, ς – некоторые функции, которые выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (3.31).

Поскольку $d\mathrm{v}=0$ на каждой поверхности постоянной полной энергии, то, как это следует из первого уравнения (3.31), имеем:

$$\xi=\eta=0.$$

Однако при переходе от одной поверхности к другой скорость крови меняется. В этом случае

$$L+\frac{f^{/}}{S\mathrm{v}^2}=0: \ f^{/}=-S\mathrm{v}^2L.$$

Окончательно запишем выражение для $f^{/}$ в виде:

$$f^{/}=-S\mathrm{v}^2(p_2\sin^2\sigma+(p_1-q_2)\sin\sigma\cos\sigma-q_1\cos^2\sigma) \qquad (3.32)$$

Будем также считать, что вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направлены по линиям кривизны поверхностей (3.24), то есть $p_1=q_2=0$.

Окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=(p_2\sin^2\sigma-q_1\cos^2\sigma+\frac{f^{/}}{S\mathrm{v}^2})\omega^3; \\ &d\sigma+r=(p_3\sin\sigma-q_3\cos\sigma)(\sin\sigma\omega^1-\cos\sigma\omega^2)+\varsigma\omega^3. \end{aligned} \qquad (3.33)$$

Дифференцируя внешним образом равенства (3.33), будем иметь:

$$\begin{aligned} &\sin^2\sigma(dp_2\wedge\omega^3+(p_2q_2+p_1p_2)\omega^1\wedge\omega^2+p_2q_3\omega^1\wedge\omega^3-p_2p_3\omega^2\wedge\omega^3)+ \\ &+2\sin\sigma\cos\sigma(p_2+q_1)\wedge\omega^3-\cos^2\sigma(dq_1\wedge\omega^3+(q_1q_2+p_1q_1)\omega^1\wedge\omega^2+ \\ &+q_1q_3\omega^1\wedge\omega^3-q_1p_3\omega^2\wedge\omega^3)=0 \end{aligned} \qquad (3.34)$$

После внешнего дифференцирования второго равенства из (3.33) будем получать:

$$\begin{aligned} &\sin^2\sigma((dp_3+q_3)\wedge\omega^1+(p_3r+p_3)\wedge\omega^2-p_3q\wedge\omega^3-p\wedge q)+ \\ &+\cos^2\sigma((-q_3-q_3r)\wedge\omega^1+(dq_3-p_3)\wedge\omega^2+q_3p\wedge\omega^3-p\wedge q)+ \\ &+\sin\sigma\cos\sigma((2p_3-dq_3+p_3r)\wedge\omega^1+(-q_3r-2q_3-dp_3)\wedge\omega^2+ \\ &+(q_3q-p_3p)\wedge\omega^3)+d\varsigma\wedge\omega^3+\varsigma(q\wedge\omega^1+p\wedge\omega^2)=0 \end{aligned} \qquad (3.35)$$

После умножения равенства (3.35) внешним образом на ω^3, получим:

$$\sin^2\sigma((dp_3+q_3)\wedge\omega^1\wedge\omega^3+(p_3r+p_3)\wedge\omega^2\wedge\omega^3-p\wedge q\wedge\omega^3)+$$
$$+\cos^2\sigma((-q_3-q_3r)\wedge\omega^1\wedge\omega^3+(dq_3-p_3)\wedge\omega^2\wedge\omega^3-p\wedge q\wedge\omega^3)+$$
$$+\sin\sigma\cos\sigma((2p_3-dq_3+p_3r)\wedge\omega^1\wedge\omega^3-(q_3r+2q_3+dp_3)\wedge\omega^2\wedge\omega^3)+$$
$$+\varsigma(q\wedge\omega^1\wedge\omega^3+p\wedge\omega^2\wedge\omega^3)=0 \qquad (3.36)$$

Соотношения (3.34) и (3.36) не дают конечных уравнений для функции на семействе поверхностей постоянной энергии, однако из них получаем ряд условий, к которым присоединим и уравнения структуры евклидова пространства. Все эти условия будут удовлетворены, если положить:

$$p_3=q_3=0;\ r=0;\ p_2q_1=0,$$

причем, случаи $p_2=0$ и $q_1=0$ симметричны. Возьмем $p_2=0$ и получим:

$$p=r=0;\quad q=q_1\omega^1;$$
$$d\vec{e}_1=-q\vec{e}_3;\ d\vec{e}_2=\vec{0};\ \mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_3=q\vec{e}_1;$$
$$dq_1\wedge\omega^1+q_1^2\omega^3\wedge\omega^1=0;\ dq_1\wedge\omega^3=0;$$
$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=(-q_1\cos^2\sigma+\frac{f^{/}}{S\mathrm{v}^2})\omega^3;\ d\sigma=\varsigma\omega^3.$$

Решения последних уравнений дают следующие соотношения:

$$q=d\theta;\ \omega^1=\frac{d\theta}{q_1};\ \omega^3=-\frac{dq_1}{q_1^2}$$
$$\vec{e}_1=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{k};\ \vec{e}_2=\vec{j}$$
$$\vec{e}_3=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{k};$$
$$\vec{x}=\frac{1}{q_1}\vec{e}_3+y\vec{j}=\frac{\cos\theta}{q_1}\vec{i}+y\vec{j}+\frac{\sin\theta}{q_1}\vec{k};$$
$$\sigma=\sigma(q_1),$$

где $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ −некоторый ортонормированный базис.

С другой стороны, можно записать:

$$\vec{x}=\bar{x}\,\vec{i}+\bar{y}\,\vec{j}+\bar{z}\,\vec{k}.$$

Сравнивая равенства для $\vec{x}$, получим:

$$\bar{x}^2 + \bar{z}^2 = \frac{\cos^2\theta}{q_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{q_1^2} = \frac{1}{q_1^2},$$

то есть имеем семейство круговых цилиндров, для которых неподвижной осью будет ось OY, определяемая направляющим вектором $\vec{j}$.

Таким образом, семейство поверхностей постоянной энергии представляет собой семейство круговых цилиндров, образующие которых параллельны оси OY. Тем самым, частицы крови будут двигаться по цилиндрам, образующие которых параллельны оси сосуда (рис. 10):

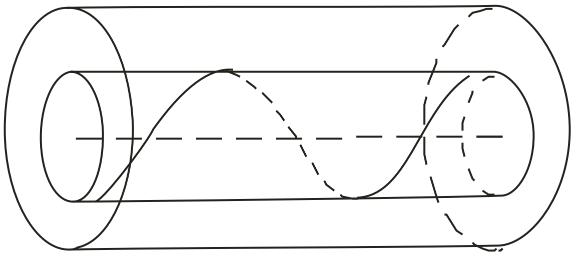

Рис. 10. Пример поверхностей постоянной энергии.

При ламинарном движении крови, скорость частицы будет постоянна на поверхности, находящейся на данном расстоянии от оси сосуда. Легко видно, что в этом случае поверхности постоянной полной энергии также представляют собой круговые цилиндры, образующие которых также параллельны оси сосуда.

В подавляющем большинстве мелких сосудов, которые являются «каналами сопротивления», поток крови носит ламинарный характер, поэтому гемодинамические и кинематические особенности движения крови в таких сосудах объясняется этим типом потока. Однако поток крови остается ламинарным до достижения кровью критической скорости, после чего поток крови приобретает завихрения или кровь движется турбулентно. Так как при движении крови с завихрением происходит большая потеря энергии, вследствие расхода энергии на создание кинетической энергии в завихрениях, то такой поток не является нормой для периферического артериального или венозного кровотока. Однако, как было уже отмечено, такие изменения, как образование атероматозных бляшек, влечет за собой развитие локальной турбулентности сразу же за пределами того участка сосуда, где диаметр сосуда уменьшен. Вихревое движение крови в норме имеет место в желудочках сердца и, в некоторой степени, в предсердиях. Здесь это проявление турбулентности носит положительный характер, так как благодаря этому происходит перемешивание крови в правом и левом сердце.

При развитии вихревого движения крови, а это происходит постепенно, поток крови становится пропорциональным квадратному корню из показателя падения давления вдоль сосуда. Как известно, поток крови остается ламинарным до достижения критической скорости, после чего кровь движется турбулентно.

Так как линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях $\omega^3 = 0$, то запишем уравнения для компонент вихря и уравнения неразрывности для этих поверхностей при условии, что эти поверхности являются поверхностями постоянной энергии, а не постоянной полной энергии:

$$
\begin{gathered}
(\sin\sigma \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \cos\sigma(d\sigma + r)) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \\
(-\cos\sigma \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \sin\sigma(d\sigma + r)) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \\
(p\sin\sigma - q\cos\sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0
\end{gathered}
\tag{3.37}
$$

$d\varepsilon = \omega^1 \wedge \omega^2$ – элемент площади поверхности постоянной энергии H.

Равенства (3.37), с учетом последних вычислений, можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
(\sin\sigma \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \cos\sigma(d\sigma + r)) \wedge d\varepsilon = 0, \\
(-\cos\sigma \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} + \sin\sigma(d\sigma + r)) \wedge d\varepsilon = 0, \\
(p\sin\sigma - q\cos\sigma) \wedge d\varepsilon = 0.
\end{gathered}
\tag{3.38}
$$

Применяя к выражениям (3.38) лемму Картана, запишем:

$$\sin\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+\cos\sigma(d\sigma+r)=td\varepsilon,$$
$$-\cos\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+\sin\sigma(d\sigma+r)=ud\varepsilon, \qquad (3.39)$$
$$p\sin\sigma-q\cos\sigma=kd\varepsilon.$$

Из второго уравнения (3.39) найдем:

$$d\varepsilon=\frac{1}{4}(-\cos\sigma\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+\sin\sigma(d\sigma+r)).$$

и после подстановки в первое уравнение (3.39), получим:

$$(\sin\sigma+\frac{t}{u}\cos\sigma)\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+(d\sigma+r)(\cos\sigma-\frac{t}{u}\sin\sigma)=0 \qquad (3.40)$$

В формуле (3.40) введем обозначение:

$$\sin\sigma+\frac{t}{u}\cos\sigma=\varphi(\sigma),$$

то она примет вид:

$$\varphi(\sigma)\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+(d\sigma+r)\varphi^{/}(\sigma)=0$$

или

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=-(d\sigma+r)\frac{\varphi^{\backslash}(\sigma)}{\varphi(\sigma)} \qquad (3.41)$$

Равенство (3.41) перепишем в виде:

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}=-\frac{\varphi^{\backslash}(\sigma)}{\varphi(\sigma)}d\sigma-\frac{\varphi^{\backslash}(\sigma)}{\varphi(\sigma)}r \qquad (3.42)$$

Также соотношение (3.42) можно представить в следующем виде:

$$d(\ln\mathrm{v})=-d(\ln\varphi(\sigma))-\frac{\varphi^{\backslash}(\sigma)}{\varphi(\sigma)}r \qquad (3.43)$$

Рассмотрим уравнение (3.42) при условиях:

1) $\varphi^{\backslash}(\sigma)=0$ и 2) $r=0$.