

В первом случае, при условии, что $\cos \sigma - \frac{t}{u} \sin \sigma = 0$ или $\operatorname{tg} \sigma = \frac{u}{t}$.

Подставляя $u = \operatorname{tg} \sigma \cdot t$ в выражение (3.39), возведя их в квадрат и сложив, получаем:

$$\left(\frac{dv}{v}\right)^2 + (d\sigma + r)^2 = \frac{t^2 (d\varepsilon)^2}{\cos^2 \sigma}$$

или

$$(d \ln v)^2 + (d\sigma + r)^2 = \frac{t^2 (d\varepsilon)^2}{\cos^2 \sigma} \quad (3.44)$$

В случае 2) имеем $\omega_1^2 = 0$. Так как форма ω_1^2 определяет поворот вокруг вектора \vec{e}_3 , то, в этом случае, кривая по направлению данного вектора движется без завихрений. Учитывая уравнения структуры евклидова пространства в ортонормированном репере:

$$D\omega^1 = r \wedge \omega^2 - q \wedge \omega^3, \quad D\omega^2 = -r \wedge \omega^1 + p \wedge \omega^3.$$

На поверхностях $\omega^3 = 0$ будем иметь

$$D\omega^1 = D\omega^2 = 0,$$

то есть в этом случае на поверхностях постоянной энергии формы ω^1 и ω^2 являются замкнутыми.

В перечисленных выше случаях, имеем:

$$d(\ln v) = -d(\ln \varphi(\sigma)).$$

Интегрируя последние равенства, запишем:

$$\ln v = -\ln \varphi(\sigma) + \ln C = \ln \frac{C}{\varphi(\sigma)}$$

или

$$v = \frac{C}{\varphi(\sigma)} = C \left(\sin \sigma + \frac{t}{u} \cos \sigma \right)^{-1}.$$

На основании последних формул сформулируем следующий вывод: скорость крови в рассматриваемой части сосуда обратно пропорциональна функции $\varphi(\sigma)$.

Если скорость постоянна, то уравнение (3.44) примет вид:

$$(d\sigma + r)^2 - \left(\frac{td\varepsilon}{\cos\sigma}\right)^2 = 0$$

$$(d\sigma + r - \frac{td\varepsilon}{\cos\sigma})(d\sigma + r + \frac{td\varepsilon}{\cos\sigma}) = 0$$

$$d\sigma + r = \pm \frac{td\varepsilon}{\cos\sigma}.$$

В случае 2) будем иметь:

$$\cos\sigma d\sigma = \pm td\varepsilon.$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\sin\sigma = \pm t\varepsilon + C.$$

Из последней формулы видно, что в случае отсутствия вращения вокруг вектора \vec{e}_3 , $\sin\sigma$ пропорционален площади поверхности постоянной полной энергии.

Выражая из формулы Рейнольдса $Re = \frac{vD\rho}{\eta}$ скорость, где D – диаметр сосуда, ρ – плотность, η – вязкость и Re – число Рейнольдса, после подстановки ее в формулу $v = \frac{C}{\varphi(\sigma)}$, получим:

$$\varphi(\sigma) = \frac{CD\rho}{Re \cdot \eta}.$$

Найдем производную от обеих частей последнего равенства, при условии постоянства ρ , Re и η в рассматриваемом участке сосуда. Тогда будем иметь:

$$\varphi'(\sigma) = \frac{C\rho}{Re\eta} D'.$$

Так как в первом случае $\varphi'(\sigma) = 0$, то $D' = 0$, а это говорит о том, что диаметр сосуда в этом случае постоянен. В случае 2) он может и меняться. Отличие этих двух случаев отметим в виде теоремы.

Теорема 4.6. Условия $\varphi'(\sigma) = 0$ и $r = 0$ приводят к тому, что в первом случае кровь движется по сосуду, диаметр которого остается постоянным на всем участке рассматриваемого сосуда, а во втором случае постоянство диаметра не обязательно.

Изменение диаметра сосуда подчеркивает его эластичность. Движение крови по сосуду осуществляется не только за счет сердечного выброса, но и за счет эластичности сосуда, который сжимаясь и расправляясь, проталкивает кровь.

Если в системе (3.31) положить $\sigma = 0$, то есть вектор \vec{e}_1 направлен по касательным к линиям тока, то, как следует из второго уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} r &= (\eta + N \sin \sigma)\omega^1 - (\xi + N \cos \sigma)\omega^2 + \zeta\omega^3, \\ N &= -q_3, \quad \eta = r_1, \quad \xi = q_3 - r_2, \quad \zeta = r_3, \end{aligned}$$

а поэтому

$$\frac{dv}{v} = (q_3 - r_2)\omega^1 - r_1\omega^2 + \left(-q_1 + \frac{f'}{Sv^2}\right)\omega^3 \quad (3.45)$$

Дифференцируя уравнение (3.45) внешним образом, мы получим условие его интегрируемости, из которого следует, что на каждом семействе поверхностей постоянной энергии мы получим, вообще говоря, два потока с равными по модулю скоростями и противоположными по направлению.

Пусть семейство поверхностей постоянной энергии представляет собой семейство параллельных плоскостей, тогда

$$H = f(z) = \frac{v^2}{2} + Q.$$

Будем иметь:

$$\frac{v^2}{2} = f(z) - Q_0, \quad \frac{p}{\rho} + U = Q_0, \quad \sigma = \sigma(z),$$

то есть Q не зависит от z и поэтому рассматривается Q_0 .

С учетом последних равенств:

$$\frac{v^2}{2} = f(z) - \frac{p}{\rho} - U.$$

Окончательно имеем:

$$v = \sqrt{2f(z) - \frac{2p}{\rho} - 2U}.$$

Из последнего равенства видно, что скорость крови в случае вихревого движения пропорциональна квадратному корню из падения давления вдоль сосуда.

С учетом формулы Рейнольдса, получим:

$$H = \left(\frac{\text{Re} \cdot \eta}{D\rho}\right)^2 + \frac{p}{\rho} + U \quad (3.46)$$

Формула (3.46) также подтверждает известный факт о том, что полная энергия частицы крови, находящейся на определенной поверхности постоянной энергии тем больше, чем больше число Рейнольдса и падение давления вдоль сосуда, а также чем меньше диаметр сосуда. Последнее будет выполняться при постоянстве вязкости крови на рассматриваемом участке сосуда, плотности крови и потенциале внешних сил, включающих в себя и силу тяжести, в поле которой происходит движение крови.

4.4. Винтовые линии при моделировании турбулентного движения крови

В данном параграфе будет рассмотрено стационарное турбулентное движение крови, линии тока скорости которого являются винтовыми линиями. Такой случай движения крови возможен, когда, сжимаясь, сосуд проталкивает кровь и

она наталкивается на препятствие (патологическое изменение в сосуде) и при отражении от него получается данный вид движения крови. Последнее позволяет выявлять изменения в движении крови. Исследования будут вестись по аналогии с работой [167].

Рассмотрим нормальную конгруэнцию линий к плоскому распределению в трехмерном евклидовом пространстве.

Присоединим к элементу (x, ξ) плоского распределения репер $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_3\}$, где $i = 1, 2$ и везде в дальнейшем малые латинские буквы будут принимать значения 1, 2. Вектора репера выбираем таким образом, чтобы $\vec{e}_i \in \xi$, а \vec{e}_3 ортогонален ξ и $|\vec{e}_3| = 1$. Тогда уравнения перемещения этого репера имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^A \vec{e}_A, \\ d\vec{e}_A &= \omega_A^B \vec{e}_B, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $A, B = 1, 2, 3$.

Основная система уравнений, определяющая распределение Δ^2 , запишется в виде:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij} \omega^j + \Lambda_i \omega^3, \quad (4.2)$$

где величины Λ_{ij} образуют тензор – основной тензор распределения Δ^2 , а величины Λ_i являются ковектором данного распределения.

Асимптотические направления на этом распределении определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, \\ \Lambda_{ij} \omega^i \omega^j &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ввиду этого плоское распределение определяется условием:

$$\Lambda_{(ij)} = 0, \quad (4.4)$$

которое обозначает косую симметрию его основного тензора: $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$.

Для упрощения дальнейших вычислений, канонизируем репер $\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ таким образом, что $\Lambda_1 = 0$, а $\Lambda_2 \neq 0$. Это можно сделать следующим образом: вектор $\vec{\omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$ – вектор Дарбу или вектор инфинитезимального вращения репера $R_x = \{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ для выбранного перемещения $d\vec{x}$, а вектор $\vec{\theta} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$ – проекция вектора $\vec{\omega}$ на плоскость, ортогональную к \vec{e}_3 ; если $\vec{\theta}_0 = p_3\vec{e}_1 + q_3\vec{e}_2$ есть вектор $\vec{\theta}$ для перемещения вдоль вектора \vec{e}_3 , то выбирая вектор \vec{e}_1 в плоскости $(\vec{e}_3, \vec{\theta}_0)$ получим $q_3 = \Lambda_1 = 0$. Тогда уравнения (4.2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\omega_1^3 &= \Lambda_{12}\omega^2, \\ \omega_2^3 &= \Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3\end{aligned}\tag{4.5}$$

Продифференцируем уравнения (4.5) внешним образом, используя уравнения структуры евклидова пространства:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 &= d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 &= d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + \Lambda_{21}(\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1) + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + \Lambda_2(\omega^1 \wedge \\ &\wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3).\end{aligned}$$

С учетом (4.5) последние равенства примут вид:

$$\begin{aligned}d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}^2 \omega^3 \wedge \omega^1 - \Lambda_2 \omega_1^2 \wedge \omega^3 &= 0 \\ d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 - \Lambda_{21}^2 \omega^3 \wedge \omega^2 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + \Lambda_2 \Lambda_{12} \omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_2 \Lambda_{12} \omega^1 \wedge \omega^2 + \\ + (\Lambda_2)^2 \omega^2 \wedge \omega^3 &= 0.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 - \Lambda_{12}^2 \omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_2 \omega_1^2 \wedge \omega^3 &= 0 \\ d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + \Lambda_{21}^2 \omega^2 \wedge \omega^3 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + 2\Lambda_2 \Lambda_{12} \omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_2^2 \omega^2 \wedge \omega^3 &= 0.\end{aligned}$$

С учетом ранее принятых обозначений $r = \omega_1^2 = r_A \omega^A$, получим:

$$\begin{aligned}
d\Lambda_{21} \wedge \omega^1 + d\Lambda_2 \wedge \omega^3 + (\Lambda_{21}^2 + \Lambda_2^2)\omega^2 \wedge \omega^3 + 2\Lambda_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 &= 0 \\
d\Lambda_{12} \wedge \omega^2 - \Lambda_2 r_2 \omega^2 \wedge \omega^3 - (\Lambda_{12}^2 + \Lambda_2 r_1)\omega^1 \wedge \omega^3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Также напомним следующие обозначения для ортонормированного репера:

$$\begin{aligned}
\omega_1^1 &= 0, & \omega_2^3 &= -\omega_3^2 = p \\
\omega_2^2 &= 0, & \omega_3^1 &= -\omega_1^3 = q \\
\omega_3^3 &= 0, & \omega_1^2 &= -\omega_2^1 = r
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Тогда уравнения структуры евклидова пространства E^3 , примут вид:

$$\begin{aligned}
D\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = r \wedge \omega^2 - q \wedge \omega^3; \\
D\omega_2^3 &= Dp = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = r \wedge q \\
D\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2 = p \wedge \omega^3 - r \wedge \omega^1; \\
D\omega_3^1 &= Dq = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = p \wedge r \\
D\omega^3 &= \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = q \wedge \omega^1 - p \wedge \omega^2; \\
D\omega_1^2 &= Dr = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = q \wedge p
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Также предположим, что $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$, а также принимая формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ за базисные, положим:

$$p = p_A \omega^A, \quad q = q_A \omega^A, \quad r = r_A \omega^A.$$

С учетом (4.5), запишем:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \Lambda_{21}, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = \Lambda_2 \\
q_1 &= 0, \quad q_2 = p_1 = \Lambda_{21}, \quad q_3 = 0
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Пусть $d_1 \vec{x}$ и $d_2 \vec{x}$ - произвольные перемещения, ортогональные вектору \vec{e}_3 .

Отношение объемов параллелепипедов, построенных на тройке векторов $\vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_1 \vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_2 \vec{e}_3$ и на тройке $\vec{e}_3, d_1 \vec{x}, d_2 \vec{x}$, назовем полной кривизной поля \vec{e}_3 в выбранной точке. Полную кривизну будем обозначать $K_{\vec{e}_3}$. Тогда

$$K_t = \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + d_1\vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_3 + d_2\vec{e}_3)}{\vec{e}_3 d_1 \vec{x} \wedge d_2 \vec{x}} = \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + \omega_3^1 \vec{e}_1) \wedge (\vec{e}_3 + \omega_3^2 \vec{e}_2)}{\vec{e}_3(\omega^1 \vec{e}_1) \wedge (\omega^2 \vec{e}_2)} =$$

$$= \frac{\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2} = \frac{\omega_3^1 \wedge \omega_3^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{p \wedge q}{\omega^1 \wedge \omega^2},$$

при $\omega^3 = 0$.

Последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$K_t = \frac{(p_1 \omega^1 + p_2 \omega^2) \wedge (q_1 \omega^1 + q_2 \omega^2)}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{(p_1 q_2 - p_2 q_1) \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

С учетом (4.9) последнее равенство примет вид:

$$K_t = \Lambda_{21} \cdot (-\Lambda_{12}) = \Lambda_{21}^2 \neq 0 \quad (4.10)$$

Продифференцируем равенства (4.2) внешним образом, используя, при этом, уравнения структуры евклидова пространства, получим:

$$(\nabla \Lambda_{ij} - \Lambda_i \omega_j^3) \wedge \omega^j + (\nabla \Lambda_i - \Lambda_{ij} \omega_3^j) \wedge \omega^3 = 0, \quad (4.11)$$

где $\nabla \Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega_j^k - \Lambda_{kj} \omega_i^k$, $\nabla \Lambda_i = d\Lambda_i - \Lambda_j \omega_i^j$.

Применяя к равенствам (4.11) лемму Картана, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_{ij} - \Lambda_i \omega_j^3 &= \mu_{ijk} \omega^k + \mu_{ij} \omega^3, \\ \nabla \Lambda_i - \Lambda_{ij} \omega_3^j &= \mu_{ij} \omega^j + \mu_i \omega^3, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $\mu_{ijk} = \mu_{ikj}$.

Последние равенства перепишем более подробно:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik} \omega_j^k - \Lambda_{kj} \omega_i^k - \Lambda_i \omega_j^3 &= \mu_{ijk} \omega^k + \mu_{ij} \omega^3 \\ d\Lambda_i - \Lambda_j \omega_i^j - \Lambda_{ij} \omega_j^i &= \mu_{ij} \omega^j + \mu_i \omega^3 \end{aligned} .$$

Или, расписывая по всем индексам, получим:

$$\begin{aligned}
d\Lambda_{12} &= \mu_{12k}\omega^k + \mu_{12}\omega^3 \\
d\Lambda_{21} - \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 &= \mu_{21k}\omega^k + \mu_{21}\omega^3 \\
-\Lambda_{12}\omega_1^2 - \Lambda_{21}\omega_1^2 &= \mu_{11k}\omega^k + \mu_{11}\omega^3 \\
-\Lambda_{21}\omega_2^1 - \Lambda_{12}\omega_2^1 - \Lambda_2\Lambda_{21}\omega^1 - \Lambda_2^2\omega^3 &= \mu_{22k}\omega^k + \mu_{22}\omega^3 \\
-\Lambda_2\omega_1^2 - \Lambda_{12}\omega_3^2 &= \mu_{1j}\omega^j + \mu_1\omega^3 \\
d\Lambda_2 - \Lambda_{21}\omega_3^1 &= \mu_{2j}\omega^j + \mu_2\omega^3.
\end{aligned}$$

Складывая первые два равенства, получим:

$$d(\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) - \Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 = (\mu_{12k} + \mu_{21k})\omega^k + (\mu_{12} + \mu_{21})\omega^3$$

или

$$-\Lambda_2\Lambda_{12}\omega^2 = (\mu_{121} + \mu_{211})\omega^1 + (\mu_{122} + \mu_{212})\omega^2 + (\mu_{12} + \mu_{21})\omega^3.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned}
\mu_{121} &= -\mu_{211}, \quad \mu_{122} + \mu_{212} = -\Lambda_2\Lambda_{12}, \quad \mu_{12} = -\mu_{21} \\
\mu_{111} &= \mu_{112} = \mu_{11} = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Далее, из четвертого уравнения приведенной выше системы, получим:

$$-\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^1 - \Lambda_2^2\omega^3 = \mu_{221}\omega^1 + \mu_{222}\omega^2 + \mu_{22}\omega^3.$$

Из последнего запишем:

$$\mu_{221} = -\Lambda_2\Lambda_{21}, \quad \mu_{222} = 0, \quad \mu_{22} = -\Lambda_2^2 \tag{4.14}$$

Пятое уравнение системы примет вид:

$$-\Lambda_2\omega_1^2 + \Lambda_{12}\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_{12}\Lambda_2\omega^3 = \mu_{11}\omega^1 + \mu_{12}\omega^2 + \mu_1\omega^3.$$

Отсюда найдем выражение для формы ω_1^2 :

$$\omega_1^2 = -\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + \left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\right)\omega^3 \tag{4.15}$$

И, наконец, последнее уравнение системы перепишем в виде:

$$d\Lambda_2 + \Lambda_{21}\Lambda_{12}\omega^2 = \mu_{21}\omega^1 + \mu_{22}\omega^2 + \mu_2\omega^3.$$

Из второго уравнения системы найдем:

$$d\Lambda_{21} = \mu_{211}\omega^1 + (\Lambda_2\Lambda_{12} + \mu_{212})\omega^2 + \mu_{21}\omega^3.$$

Так как согласно равенствам (4.13) $\mu_{211} = -\mu_{121} = -\mu_{112} = 0$ и $\mu_{212} = \mu_{221} = -\Lambda_2\Lambda_{21}$, то

$$d\Lambda_{21} = -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3,$$

а

$$d\Lambda_2 = \mu_{21}\omega^1 + (\mu_{22} + \Lambda_{21}^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3.$$

Согласно (4.14) $\mu_{22} = -\Lambda_2^2$. Тогда, окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{21} &= -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3 \\ d\Lambda_2 &= \mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Продифференцируем уравнения (4.16) внешним образом:

$$\begin{aligned} 0 &= -2(d\Lambda_2 \cdot \Lambda_{21} + \Lambda_2 d\Lambda_{21}) \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\Lambda_{21}(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + d\mu_{21} \wedge \\ &\wedge \omega^3 + \mu_{21}(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3) \\ 0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21}(\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1) + (2\Lambda_{21}d\Lambda_{21} - 2\Lambda_2d\Lambda_2) \wedge \omega^2 + \\ &+ (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)(\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^3 \wedge \omega_3^2) + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \mu_2(\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3) \\ 0 &= -2((\mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \mu_2\omega^3)\Lambda_{21} + \Lambda_2(-2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3)) \wedge \omega^2 - \\ &- 2\Lambda_2\Lambda_{21}(\omega^1 \wedge (-\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3) - \omega^3 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \\ &+ \Lambda_2\omega^3)) + d\mu_{21} \wedge \omega^3 + \mu_{21}(\omega^1 \wedge (\Lambda_{12}\omega^2) + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)). \end{aligned}$$

Последнее перепишем:

$$\begin{aligned} 0 &= d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21}[\omega^2 \wedge (\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 + \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12})\omega^3) - \omega^3 \wedge \\ &\wedge (\Lambda_{12}\omega^2)] + [2\Lambda_{21}(-2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 + \mu_{21}\omega^3) - 2\Lambda_2(\mu_{21}\omega^1 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 + \\ &+ \mu_2\omega^3) \wedge \omega^2 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)[\omega^1 \wedge (-\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^1 - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3) - \\ &- \omega^3 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)] + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \mu_2(\omega^1 \wedge (\Lambda_{12}\omega^2) + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21}\omega^1 + \end{aligned}$$

$$+\Lambda_2\omega^3))$$

$$0 = -2(\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_2\Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^2 + \Lambda_2\mu_{21}\omega^3 \wedge \omega^2) - 2\Lambda_2\Lambda_{21}\left[-\frac{\mu_{12}}{\Lambda_2} \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^1\right] + d\mu_{21} \wedge \omega^3 + \mu_{21}[\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^1 + \Lambda_2\omega^2 \wedge \omega^3].$$

Выполняя вполне обычные преобразования, запишем:

$$0 = d\mu_{21} \wedge \omega^1 + \mu_{21}\left[\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2}\omega^2 \wedge \omega^1 + (\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12})\omega^2 \wedge \omega^3 - \Lambda_{12}\omega^3 \wedge \omega^2\right] + [2\Lambda_{21}\mu_{21}\omega^3 \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\mu_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 - 2\Lambda_2\mu_2\omega^3 \wedge \omega^2 + (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) \cdot (-\frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}\omega^1 \wedge \omega^2 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^1 \wedge \omega^3 - \Lambda_{21}\omega^3 \wedge \omega^1) + d\mu_2 \wedge \omega^3 + \mu_2\Lambda_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_2\Lambda_{21}\omega^2 \wedge \omega^1 + \mu_2\Lambda_2\omega^2 \wedge \omega^3$$

$$0 = (-2\mu_{21}\Lambda_{21} + 2\Lambda_{21}\mu_{12} + \mu_{21}\Lambda_{12} - \mu_{21}\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 2\Lambda_2\mu_{21} - \mu_{21}\Lambda_2)\omega^3 \wedge \omega^2 + (-2\Lambda_2\Lambda_{21}(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}) - 2\Lambda_2\Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_{21} \wedge \omega^3.$$

После приведения подобных членов будем иметь:

$$0 = d\mu_{21} \wedge \omega^1 + (-\mu_{21}\frac{\Lambda_{21}^2 + \mu_{11}}{\Lambda_2} - 2\Lambda_2\mu_{21} - \frac{\mu_{12}}{\Lambda_2}(\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) + \mu_2\Lambda_{12} - \mu_2\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + (\mu_{21}(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12}) + \mu_{21}\Lambda_{12} - 2\Lambda_{21}\mu_{21} + 2\Lambda_2\mu_2 + \mu_2\Lambda_2) \cdot \omega^2 \wedge \omega^3 + ((\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2} + \Lambda_{21}))\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3$$

$$0 = (-4\mu_{21}\Lambda_{21} + 2\Lambda_{21}\mu_{12})\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 3\Lambda_2\mu_{21})\omega^3 \wedge \omega^2 + (2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + 2\Lambda_{21}\mu_1 - 2\Lambda_2\Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_{21} \wedge \omega^3.$$

В конце получим следующую систему:

$$0 = -6\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\mu_2\Lambda_{21} - 3\Lambda_2\mu_{21})\omega^3 \wedge \omega^2 + (2\Lambda_{21}\mu_1)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_{21} \wedge \omega^3$$

$$0 = d\mu_{21} \wedge \omega^1 + (-3\Lambda_2\mu_{21} - 2\mu_2\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + (\mu_{21}(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - 2\Lambda_{21}) + 3\Lambda_2\mu_2) \cdot \\ \cdot \omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\mu_1}{\Lambda_2}(\Lambda_2^2 - \Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3.$$

Умножим внешним образом первое уравнение этой системы на ω^3 , получим:

$$0 = -6\mu_{21}\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \mu_{21}\Lambda_{21} = 0$$

Так как $\Lambda_{21} \neq 0$, то $\mu_{21} = 0$. Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$0 = -2\mu_2\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + 3\Lambda_2\mu_2\omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\mu_1}{\Lambda_2}(\Lambda_2^2 - \Lambda_{21}^2)\omega^1 \wedge \omega^3 + d\mu_2 \wedge \omega^3.$$

Также умножим внешним образом последнее уравнение на ω^3 :

$$0 = -2\mu_2\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \\ \mu_2\Lambda_{21} = 0$$

Так как $\Lambda_{21} \neq 0$, то $\mu_2 = 0$.

С учетом последних равенств, соотношения (4.16) можно переписать следующим образом:

$$d\Lambda_{21} = -2\Lambda_2\Lambda_{21}\omega^2 \\ d\Lambda_2 = (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)\omega^2 \quad (4.17)$$

Также ввиду того, что $\mu_{11} = \mu_{12} = 0$, то равенство (4.15) примет вид:

$$\omega_1^2 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3$$

или

$$r_1\omega^1 + r_2\omega^2 + r_3\omega^3 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}\omega^1 + (\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2})\omega^3.$$

Из последнего равенства имеем:

$$r_1 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}.$$

Далее покажем, что $\mu_1 = 0$. Для этого продифференцируем внешним образом равенство:

$$-\Lambda_2 \omega_1^2 - \Lambda_{12} \omega_3^2 = \mu_{1j} \omega^j + \mu_1 \omega^3,$$

предварительно упростив его:

$$-\Lambda_2 \omega_1^2 - \Lambda_{12} \omega_3^2 = \mu_1 \omega^3$$

или

$$\Lambda_{12} \omega_2^3 - \Lambda_2 \omega_1^2 = \mu_1 \omega^3.$$

$$d\Lambda_{12} \wedge \omega_2^3 + \Lambda_{12} \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 - d\Lambda_2 \wedge \omega_1^2 - \Lambda_2 \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3 + \mu_1 (\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3).$$

С учетом (4.17) последнее равенство переписется:

$$\begin{aligned} & 2\Lambda_2 \Lambda_{21} \omega^2 \wedge (\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3) + \Lambda_{12} \left(\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2} \omega^1 + \left(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12} \right) \omega^3 \right) \wedge \Lambda_{12} \omega^2 - \\ & - (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) \omega^2 \wedge \left(-\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2} \omega^1 + \left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2} \right) \omega^3 \right) + \Lambda_2 \Lambda_{12} \omega^2 \wedge (\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3) = \\ & = d\mu_1 \wedge \omega^3 + \mu_1 (\omega^1 \wedge \Lambda_{12} \omega^2 + \omega^2 \wedge (\Lambda_{21} \omega^1 + \Lambda_2 \omega^3)). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, получим:

$$\begin{aligned} & 2\Lambda_2 \Lambda_{21}^2 \omega^2 \wedge \omega^1 + 2\Lambda_2^2 \Lambda_{21} \omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2} \omega^1 \wedge \omega^2 + \Lambda_{12}^2 \left(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12} \right) \omega^3 \wedge \omega^2 + \\ & + \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2} (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) \omega^2 \wedge \omega^1 - (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) \left(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2} \right) \omega^2 \wedge \omega^3 - \Lambda_2 \Lambda_{21}^2 \omega^2 \wedge \omega^1 + \\ & + \Lambda_2^2 \Lambda_{12} \omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3 + \mu_1 \Lambda_{12} \omega^1 \wedge \omega^2 + \mu_1 \Lambda_{21} \omega^2 \wedge \omega^1 + \mu_1 \Lambda_2 \omega^2 \wedge \omega^3. \end{aligned}$$

После приведения подобных членов, будем иметь:

$$\begin{aligned}
& (-2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2} - \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}(\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2) + \Lambda_2\Lambda_{21}^2 - \mu_1\Lambda_{12} + \mu_1\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + \\
& + (2\Lambda_2^2\Lambda_{21} - \Lambda_{12}^2(\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_{12}) - (\Lambda_{21}^2 - \Lambda_2^2)(\Lambda_{12} - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}) + \Lambda_2^2\Lambda_{12} - \\
& - \mu_1\Lambda_2)\omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

Перепишав последнее равенство в виде:

$$\begin{aligned}
& (-2\Lambda_2\Lambda_{21}^2 + \frac{\Lambda_{21}^4}{\Lambda_2} - \frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2} + \Lambda_{21}^2\Lambda_2 + \Lambda_2\Lambda_{21}^2 + 2\mu_1\Lambda_{21})\omega^1 \wedge \omega^2 + (2\Lambda_2^2\Lambda_{21} - \\
& - \frac{\mu_1}{\Lambda_2}\Lambda_{12}^2 + \Lambda_{12}^3 - \Lambda_{12}^3 + \Lambda_2^2\Lambda_{12} + \Lambda_{21}^2\frac{\mu_1}{\Lambda_2} - \Lambda_2^2\frac{\mu_1}{\Lambda_2} + \Lambda_2^2\Lambda_{12} - \mu_1\Lambda_2)\omega^2 \wedge \omega^3 = \\
& = d\mu_1 \wedge \omega^3.
\end{aligned}$$

Окончательно будем иметь:

$$2\mu_1\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-2\Lambda_2\mu_1)\omega^2 \wedge \omega^3 = d\mu_1 \wedge \omega^3.$$

После умножения последнего равенства внешним образом на ω^3 , получим:

$$\begin{aligned}
2\mu_1\Lambda_{21}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= 0 \\
\mu_1\Lambda_{21} &= 0
\end{aligned}$$

Так как $\Lambda_{21} \neq 0$, то

$$\mu_1 = 0 \quad (4.18)$$

Тогда

$$r_1 = -\frac{\Lambda_{21}^2}{\Lambda_2}, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \Lambda_{12} \quad (4.19)$$

Пусть \vec{r} – радиус-вектор точки x . Так как вектор \vec{e}_3 – касательный вектор к линиям тока, то можем взять $\vec{e}_3 = \dot{\vec{r}}$. Тогда

$$\ddot{\vec{r}} = d\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 = -\omega_1^3\vec{e}_1 - \omega_2^3\vec{e}_2 = -(\Lambda_{12}\omega^2)\vec{e}_1 - (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)\vec{e}_2.$$

Исходя из этого, найдем векторное произведение векторов $\dot{\vec{r}}$ и $\ddot{\vec{r}}$, при этом воспользуемся принятым при таком вычислении понятием «как бы определителя»:

$$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \Lambda_{21}\omega^2 & -(\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3) & 0 \end{vmatrix} = (\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)\vec{e}_1 + (\Lambda_{21}\omega^2)\vec{e}_2.$$

Отсюда

$$\left| [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] \right| = \sqrt{(\Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_2\omega^3)^2 + (\Lambda_{21}\omega^2)^2} \quad (4.20)$$

Так как рассматриваются интегральные линии векторного поля \vec{e}_3 , то можно положить $\omega^1 = \omega^2 = 0$. Тогда (4.20) примет вид:

$$\left| [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] \right| = \Lambda_2\omega^3 \text{ и}$$

$$k = \left| \frac{d\vec{e}_3}{ds} \right| = \left| \frac{-\Lambda_2\omega^3\vec{e}_2}{ds} \right| = |\Lambda_2| \pmod{\omega^i = 0} \quad (4.21)$$

Согласно второму равенству из (4.17) для интегральных линий векторного поля \vec{e}_3 при $\omega^i = 0$, имеем:

$$d\Lambda_2 = 0,$$

то, опять же, для интегральных линий векторного поля \vec{e}_3 получим:

$$\Lambda_2 = \text{const}.$$

Согласно формуле (4.21), где k – кривизна интегральных линий векторного поля \vec{e}_3 , можно заключить, что k также постоянно.

Положим $\vec{\tau}$ – касательный вектор к линиям тока, то есть $\vec{\tau} = \vec{e}_3$. Тогда

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{e}_3}{ds} = \frac{\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2}{ds} = -\frac{\omega_1^3\vec{e}_1 + \omega_2^3\vec{e}_2}{ds} = -\frac{\Lambda_2\omega^3\vec{e}_2}{ds} = -\Lambda_2\vec{e}_2 \pmod{\omega^i = 0}$$

С другой стороны, согласно формулам Френе: $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$, то есть $k = -\Lambda_2$, а

$\vec{\nu} = \vec{e}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\nu}}{ds} &= \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{\omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3}{ds} = \frac{-\Lambda_{12} \omega^3 \vec{e}_1 + \Lambda_2 \omega^3 \vec{e}_3}{ds} = -\Lambda_{12} \vec{e}_1 + \Lambda_2 \vec{e}_3 = \\ &= \Lambda_2 \vec{\tau} - \Lambda_{12} \vec{e}_1. \end{aligned}$$

С другой стороны: $\frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k\vec{\tau} + \chi\vec{\beta}$. Сравнивая последние две формулы, запишем:

$$k = -\Lambda_2, \quad \chi = -\Lambda_{12} = \Lambda_{21}, \quad \vec{\beta} = \vec{e}_1.$$

Тогда с учетом первого равенства из (4.17), можно записать:

$$d\Lambda_{21} = 0 \pmod{\omega^i = 0} \quad (4.22)$$

Тем самым, $d\chi = 0$ и $\chi = const$.

На основании вычислений получаем, что кривизна и кручение интегральной линии векторного поля \vec{e}_3 или линии тока вектора скорости крови принимают постоянное значение.

Теорема 4.7. Интегральные линии векторного поля, нормального к плоскому распределению, являются винтовыми линиями.

Следует отметить, что эти винтовые линии лежат на цилиндре. Таким образом, частицы крови движутся по винтовым линиям, лежащих на цилиндрах, образующие которых параллельны оси рассматриваемого участка сосуда.

Так как вектор скорости крови имеет направление вектора \vec{e}_3 , то из формулы (2.13) будем иметь:

$$\begin{aligned} -rot\vec{e}_A d\tau &= \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-p)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge q) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge q + \\ &+ \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-p)) = -p_3 \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + q_3 \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) + \vec{e}_3 \cdot \\ &\cdot (q_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - p_1 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1) = -p_3 \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) - q_3 \vec{e}_2 \cdot \\ &\cdot (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + (q_2 + p_1) \vec{e}_3(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\text{rote}_A = p_3 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 - (q_2 + p_1) \vec{e}_3.$$

Векторное поле \vec{e}_1 будет голономным тогда и только тогда, когда $(\vec{e}_1, \text{rote}_1) = p_3 = 0$. Но $p_3 = \Lambda_2 \neq 0$. Значит, векторное поле \vec{e}_1 не голономное.

Векторное поле \vec{e}_2 будет голономным тогда и только тогда, когда $(\vec{e}_2, \text{rote}_2) = q_3 = 0$. Но $q_3 = \Lambda_1 = 0$. Тем самым, векторное поле \vec{e}_2 является голономным.

Аналогично, векторное поле \vec{e}_3 будет голономным тогда и только тогда, когда $(\vec{e}_3, \text{rote}_3) = -(q_2 + p_1) = 0$. Согласно формулам (4.9) будем иметь: $\Lambda_{21} - \Lambda_{12} = 0$. Как следует из последнего равенства, распределение Δ^2 будет вполне интегрируемым, а, в данном случае, рассматривается плоское распределение. Значит, векторное поле \vec{e}_3 не будет голономным.

Получаем, что векторное поле \vec{e}_2 ортогонально цилиндрам, на которых лежат интегральные линии векторного поля \vec{e}_3 , представляющие собой винтовые линии. В этом случае данные соосные цилиндры определяются уравнением:

$$\omega^2 = 0.$$

Рассмотрим обратную задачу, то есть интегральные линии векторного поля \vec{e}_3 являются винтовыми линиями, которые лежат на соосных цилиндрах. Так как полная кривизна векторного поля \vec{e}_3 K_t не равна нулю, то оно не допускает семейства ортогональных поверхностей, и линии кривизны такого поля будут мнимыми.

Далее приведем довольно-таки понятные рассуждения, которые понадобятся несколько позднее. Запишем уравнение для координат точек одной из винтовых линий:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = b\varphi, \quad (4.23)$$

где $b = b(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Касательным вектором к винтовой линии является вектор \vec{e}_3 , но винтовая линия имеет уравнения вида (4.23) в прямоугольной системе координат $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ с началом в точке O , лежащей на оси всех цилиндров. Такой вид уравнения используется для более наглядного изложения дальнейшего материала.

Касательный вектор к винтовой линии, заданной уравнением (4.23) имеет координаты:

$$\vec{A}(x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi) = \vec{A}(-y, x, b).$$

Тогда единичный вектор этого поля \vec{a} будет иметь следующие координаты:

$$\vec{a}\left(\frac{-y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}\right).$$

Средняя кривизна векторного поля \vec{a} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} 2H = -\operatorname{div} \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} = \frac{-y \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}{\rho^2 + b^2} + \\ &+ \frac{x \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}}{\rho^2 + b^2} = \frac{-\frac{1}{2} y (\rho^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} 2x + \frac{1}{2} x (\rho^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} 2y}{\rho^2 + b^2} = \\ &= \frac{-xy + xy}{\sqrt{(\rho^2 + b^2)^3}} = 0. \end{aligned}$$

К аналогичному результату приводят вычисления с использованием формулы (2.10) и следующей за ней формулы для ортонормированного репера.

Для вычисления полной кривизны K векторного поля \vec{a} поступим следующим образом. Выразим K с помощью компонент вектора \vec{A} , коллинеарного

$\vec{a} : \vec{A} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \lambda \vec{a}$, где $\lambda = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + b^2}$. Рассмотрим век-

тор:

$$\vec{P} \{ (\vec{a}_y, \vec{a}_z, \vec{a}), (\vec{a}_z, \vec{a}_x, \vec{a}), (\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}) \},$$

где круглыми скобками обозначены смешанные произведения соответствующих векторов.

Согласно работе [127], имеем $K = (\vec{P}, \vec{a})$. Тогда

$$P = \lambda^{-3} \{ (\vec{A}_y \vec{A}_z \vec{A}), (\vec{A}_z \vec{A}_x \vec{A}), (\vec{A}_x \vec{A}_y \vec{A}) \}.$$

Так как $\vec{A}(-y, x, b)$, то

$$\begin{aligned} A_{1x} &= 0 & A_{2x} &= 1 & A_{3x} &= b \setminus 2x \\ A_{1y} &= -1 & A_{2y} &= 0 & A_{3y} &= b \setminus 2y \\ A_{1z} &= 0 & A_{2z} &= 0 & A_{3z} &= 0. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} K &= \lambda^{-4} \{ (\vec{A}_y \vec{A}_z \vec{A}) A_1 + (\vec{A}_z \vec{A}_x \vec{A}) A_2 + (\vec{A}_x \vec{A}_y \vec{A}) A_3 \} = \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} A_{1x} & A_{1y} & A_{1z} & A_1 \\ A_{2x} & A_{2y} & A_{2z} & A_2 \\ A_{3x} & A_{3y} & A_{3z} & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0 \end{vmatrix}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

С учетом предыдущих равенств, формула (4.24) примет вид:

$$K = - \frac{1}{(\rho^2 + b^2)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -y \\ 1 & 0 & 0 & x \\ b \setminus 2x & b \setminus 2y & 0 & b \\ -y & x & b & 0 \end{vmatrix} = \frac{-b(2\rho^2 b \setminus - b)}{(\rho^2 + b^2)^2}.$$

Далее, вычислим величину неголономности поля \vec{A} :

$$\begin{aligned}(\vec{A}, \text{rot } \vec{A}) &= (\vec{A}, \vec{i}(A_{3y} - A_{2z}) + \vec{j}(A_{1z} - A_{3x}) + \vec{k}(A_{2x} - A_{1y})) = \\ &= (\vec{A}, b \sqrt{2} y \vec{i} - b \sqrt{2} x \vec{j} + 2 \vec{k}) = -2b \sqrt{2} y^2 - 2b \sqrt{2} x^2 + 2b = 2b - 2b \sqrt{2} \rho^2.\end{aligned}$$

Найдем $\text{rot } \vec{a}$:

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot} \left(\frac{\vec{A}}{\lambda} \right) = \frac{2b \sqrt{2} y}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{i} - \frac{2b \sqrt{2} x}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{j} + \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \vec{k}.$$

Тогда

$$(\vec{a}, \text{rot } \vec{a}) = \frac{2(b - b \sqrt{2} \rho^2)}{\rho^2 + b^2} \quad (4.25)$$

Направление $d\vec{x}$, ортогональное полю \vec{a} , будет асимптотическим, если нормальная кривизна этого поля в направлении $d\vec{x}$ равна нулю. Нормальную кривизну поля \vec{a} определим как отношение $(d\vec{a}, d\vec{x})$ к $(d\vec{x})^2$. Тем самым, асимптотическое направление $d\vec{x}$ ортогонально $d\vec{a}$, а также $d\vec{x}$ ортогонально \vec{a} . Отсюда получаем, что $d\vec{x}$ коллинеарно направлению $[\vec{a}, d\vec{a}]$ и асимптотическое направление определяется из векторного уравнения

$$[\vec{a}, d\vec{a}] = \mu d\vec{x},$$

где $\mu \in R$.

Уравнения для определения асимптотических линий в координатном виде имеют следующий вид:

$$\xi_2 d\xi_3 - \xi_3 d\xi_2 = \mu dx$$

$$\xi_3 d\xi_1 - \xi_1 d\xi_3 = \mu dy$$

$$\xi_1 d\xi_2 - \xi_2 d\xi_1 = \mu dz,$$

где положено, что $\vec{a}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Координаты вектора \vec{a} выразим через ρ и φ :

$$\xi_1 = \frac{-\rho \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \xi_2 = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad \xi_3 = \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}.$$

С учетом последних равенств, уравнения асимптотических линий переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} (\rho \cos \varphi db - bd(\rho \cos \varphi)) &= (\rho^2 + b^2) \mu d(\rho \cos \varphi) \\ (\rho \sin \varphi db - bd(\rho \sin \varphi)) &= (\rho^2 + b^2) \mu d(\rho \sin \varphi) \\ \rho^2 d\varphi &= (\rho^2 + b^2) \mu dz \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для нахождения условия существования асимптотических направлений, используем такую систему координат, что в точке M_0 будем иметь $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$. Отсюда получаем, что в точке M_0 система уравнений для определения асимптотического направления имеет вид:

$$\begin{aligned} -(\xi_{2x} + \mu)dx - \xi_{2y}dy &= 0 \\ \xi_{1x}dx + (\xi_{1y} - \mu)dy &= 0 \\ dz &= 0. \end{aligned}$$

Последняя система будет иметь решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} -(\xi_{2x} + \mu) & -\xi_{2y} \\ \xi_{1x} & \xi_{1y} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, коэффициент μ определяется из квадратного уравнения:

$$\mu^2 - (\xi_{1y} - \xi_{2x})\mu + (\xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x}) = 0.$$

Далее получим:

$$(\vec{a}, \text{rot} \vec{a}) = \xi_{2x} - \xi_{1y}, \quad K = \xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x}.$$

Тогда уравнение для определения μ примет вид:

$$\mu^2 + (\vec{a}, \text{rot} \vec{a})\mu + K = 0.$$

Корни последнего уравнения будут находиться следующим образом:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\vec{a}, \text{rot} \vec{a}) \pm \sqrt{(\vec{a}, \text{rot} \vec{a})^2 - 4K}}{2} \quad (4.27)$$

Введем обозначение: $-4K_1 = (\vec{a}, \text{rot}\vec{a})^2 - 4K$. Тогда асимптотическое направление существует тогда и только тогда, когда $K_1 \leq 0$. При этом K_1 назовем полной кривизной первого рода.

Отсюда можно сделать вывод: существуют два асимптотических направления, ортогональные векторному полю \vec{a} , если $K_1 < 0$. В случае $K_1 = 0$ существует либо одно асимптотическое направление, либо все направления, ортогональные вектору \vec{a} , асимптотические.

Подкоренное выражение в (4.27) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \text{rot}\vec{a})^2 - 4K &= \frac{4(b - b\sqrt{\rho^2})^2}{(\rho^2 + b^2)^2} + 4 \frac{b(2\rho^2 b\sqrt{\rho^2} - b)}{(\rho^2 + b^2)^2} = \\ &= \frac{4b^2 - 8b\sqrt{b}\rho^2 + 4b\sqrt{b}\rho^4 + 8b\sqrt{b}\rho^2 - 4b^2}{(\rho^2 + b^2)^2} = \frac{4b\sqrt{b}\rho^4}{(\rho^2 + b^2)^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент μ может принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(b\sqrt{\rho^2} - b)}{\rho^2 + b^2} - \frac{2b\sqrt{\rho^2}}{\rho^2 + b^2} \right) = \frac{b\sqrt{\rho^2} - b - b\sqrt{\rho^2}}{\rho^2 + b^2} = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}; \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2(b\sqrt{\rho^2} - b)}{\rho^2 + b^2} + \frac{2b\sqrt{\rho^2}}{\rho^2 + b^2} \right) = \frac{b\sqrt{\rho^2} - b + b\sqrt{\rho^2}}{\rho^2 + b^2} = \frac{2b\sqrt{\rho^2} - b}{\rho^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Пусть $\mu = \mu_1 = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}$. Тогда система (4.26) примет вид:

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi db - bd(\rho \cos \varphi) &= -bd(\rho \cos \varphi) \\ \rho \sin \varphi db - bd(\rho \sin \varphi) &= -bd(\rho \sin \varphi) \\ \rho^2 d\varphi &= -bdz. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi db &= 0 \\ \rho \sin \varphi db &= 0 \\ \rho^2 d\varphi &= -bdz \end{aligned} \tag{4.28}$$

Из первых двух уравнений системы (4.28) получаем, что $db = 0$. С учетом (4.23), получаем: $dz = bd\varphi$ и $\rho^2 d\varphi = -b^2 d\varphi$, то есть $\rho = const$. Поэтому эта асимптотическая лежит на цилиндре $\rho = const$ и является винтовой линией. Семейство таких винтовых линий с заданным семейством винтовых линий образует на цилиндре регулярную ортогональную сеть.

Пусть теперь $\mu = \mu_2 = \frac{2b^1 \rho^2 - b}{\rho^2 + b^2}$. Система (4.26) примет вид:

$$\begin{aligned}\rho \cos \varphi db - bd(\rho \cos \varphi) &= (2b^1 \rho^2 - b)d(\rho \cos \varphi) \\ \rho \sin \varphi db - bd(\rho \sin \varphi) &= (2b^1 \rho^2 - b)d(\rho \sin \varphi) \\ \rho^2 d\varphi &= (2b^1 \rho^2 - b)dz.\end{aligned}$$

После приведения подобных, последняя система примет вид:

$$\begin{aligned}\rho \cos \varphi db &= 2b^1 \rho^2 d(\rho \cos \varphi) \\ \rho \sin \varphi db &= 2b^1 \rho^2 d(\rho \sin \varphi) \\ \rho^2 d\varphi &= (2b^1 \rho^2 - b)dz.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Из первого и второго уравнений системы (4.29), получим:

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d(\rho \cos \varphi)} db = 2b^1 \rho^2 \quad \text{и} \quad \frac{\rho \sin \varphi}{d(\rho \sin \varphi)} db = 2b^1 \rho^2.$$

Тогда имеем

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d(\rho \cos \varphi)} db = \frac{\rho \sin \varphi}{d(\rho \sin \varphi)} db.$$

Пусть $b^1 \neq 0$, тогда

$$\frac{\rho \cos \varphi}{d\rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi d\varphi} = \frac{\rho \sin \varphi}{d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi}.$$

После преобразований будем иметь:

$$d\rho \cdot \rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi d\varphi = d\rho \cdot \rho \cos \varphi \sin \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$\rho^2 d\varphi = 0$$

$$d\varphi = 0.$$

Из третьего уравнения системы (4.29) при $K \neq 0$ получаем, что $dz = 0$.

Отсюда можно заключить, что асимптотические линии второго семейства – лучи, проведенные из оси цилиндров и параллельные плоскости OXY .

Последние свойства были получены в предположении, когда $b \neq 0$. Но нас больше интересует случай, когда $b = 0$. Тогда $\mu_1 = \mu_2 = \frac{-b}{\rho^2 + b^2}$ и первые два уравнения системы (4.26) выполняются тождественно. Третье уравнение этой системы принимает вид: $\rho^2 d\varphi = -bdz$. Это уравнение отражает тот факт, что асимптотическое направление ортогонально полю \vec{a} . Причем, любое направление, ортогональное полю \vec{a} , является асимптотическим, то есть распределение Δ^2 , ортогональное полю \vec{a} , является плоским.

Имеем винтовые линии, располагающиеся на соосных цилиндрах, которые бесконечное число раз обвиваются вокруг соответствующего цилиндра. При этом с каждым витком любая из винтовых линий поднимается на высоту $2\pi b$. Если $b = const$, то есть не зависит от ρ^2 , то любое направление, ортогональное вектору, являющимся касательным к любой винтовой линии, будет асимптотическим. Это будет выполняться в любой точке, где расположено семейство винтовых линий. Тем самым, в данной области будет определено распределение, все направления которого являются асимптотическими. Заданное распределение является плоским.

Теорема 4.8. Распределение Δ^2 в евклидовом пространстве E^3 является плоским тогда и только тогда, когда линии нормальной конгруэнции к нему будут винтовыми линиями, которые с каждым витком поднимаются на одну и ту же постоянную высоту.

Голономность векторного поля, порожденного конформным отображением между областями в евклидовом пространстве E^3 , рассматривалось аналогичным образом в работе [170].

Используем приведенную выше теорию для изучения геометрии линий тока крови, когда кровь движется турбулентно и линии тока являются винтовыми линиями.

При ламинарном движении крови по сосуду распределение скоростей по сечению сосуда носит параболический профиль. В случае турбулентного течения профиль распределения скоростей становится практически вертикальным. Это является следствием того факта, что жидкость движется не только параллельно оси сосуда, но и поперек сосуда. Ввиду этого средняя скорость движения крови оказывается почти постоянной по всему сечению сосуда и только в незначительном слое около стенок сосуда, благодаря прилипанию, скорость начинает уменьшаться. Профиль скоростей выглядит следующим образом (рис. 11):

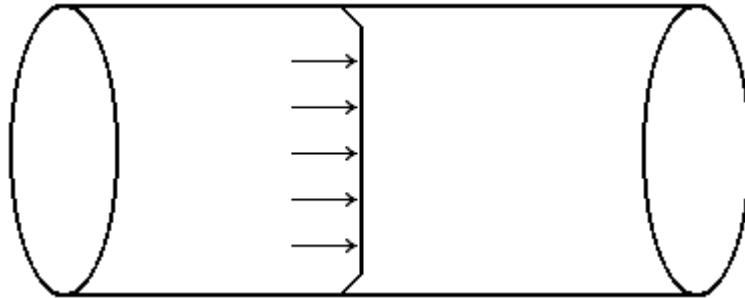


Рис. 11. Профиль скоростей при турбулентном движении крови.

В данном случае считаем, что скорость крови по абсолютной величине постоянна при данном турбулентном движении, при котором линии тока представляют собой винтовые линии, лежащие на цилиндрах, не зависит от радиуса цилиндра, по которому движется рассматриваемая частица крови или на котором расположена соответствующая винтовая линия.

В формулах (4.23) в качестве b возьмем модуль вектора скорости v . Тогда полная кривизна векторного поля скорости крови будет иметь вид:

$$K = \frac{-v(\rho^2 v^1 - v)}{(\rho^2 + v^2)^2} = \frac{v^2}{(\rho^2 + v^2)^2}, \quad (4.30)$$

так как $v \neq 0$ ввиду наложенного выше условия о постоянстве модуля скорости v .

Величина неголономности вектора скорости крови \vec{v} вычисляется следующим образом:

$$(\vec{v}, \text{rot} \vec{v}) = 2v.$$

Так как $\vec{v} = v\vec{e}_3$, то $\text{rot} \vec{e}_3 = \frac{2v}{\sqrt{\rho^2 + v^2}} \vec{e}_3$, а

$$(\vec{e}_3, \text{rot} \vec{e}_3) = \frac{2v}{\rho^2 + v^2} \quad (4.31)$$

Ввиду того, что $v \neq 0$ во всем рассматриваемом участке сосуда, то из формулы (4.31) следует, что поле вектора \vec{e}_3 будет неголономным и для него не существует семейства поверхностей таких, что в каждой точке вектор поля направлен по нормали к поверхности семейства, проходящей через эту точку. Значит, данное векторное поле будет ортогонально распределению Δ^2 , которое не является голономным.

Направление смещения $d\vec{x}$, принадлежащее распределению Δ^2 и ортогональное векторному полю \vec{e}_3 , будет асимптотическим, если нормальная кривизна этого поля в направлении $d\vec{x}$ равна нулю. Отсюда следует, что асимптотическое направление определяется из векторного уравнения:

$$[\vec{e}_3, d\vec{e}_3] = \mu d\vec{x},$$

где $\mu \in R$.

Аналогично тому, как это делалось несколько выше, находится уравнение, из которого определяется μ :

$$\mu^2 + (\vec{e}_3, \text{rot} \vec{e}_3)\mu + K = 0 \quad (4.32)$$

Корни уравнения (4.32) находятся следующим образом:

$$\mu_{1,2} = \frac{-(\vec{e}_3, \text{rote}_3) \pm \sqrt{(\vec{e}_3, \text{rote}_3)^2 - 4K}}{2} \quad (4.33)$$

Из формул (4.30) и (4.31) легко видно, что $(\vec{e}_3, \text{rote}_3)^2 - 4K = 0$, то есть $\mu_1 = \mu_2$. Тогда, с учетом того, что $[\vec{e}_3, d\vec{e}_3] = \mu d\vec{x}$, любое направление, ортогональное полю \vec{e}_3 и принадлежащее распределению Δ^2 , является асимптотическим, то есть распределение Δ^2 будет плоским.

Теорема 4.9. Если турбулентное движение крови имеет в качестве линий тока винтовые линии, то данные винтовые линии ортогональны плоскому распределению, тем самым турбулентному движению крови в участке сосуда, линии тока которого представляют собой винтовые линии, соответствует плоское распределение и наоборот.

Следует также отметить, что при более точном описании геометрии такого движения крови, последние рассуждения будут верны для всего диаметра сосуда, за исключением незначительного слоя, непосредственно примыкающего к стенке сосуда.

Замечание. Здесь нужно помнить, что независимо от радиуса цилиндра, на котором лежит винтовая линия, частица крови будет подниматься на постоянную высоту.

Изучение турбулентного движения крови, основывающееся на геометрии интегральных линий векторного поля скорости крови, можно проводить, основываясь не только на геометрии поверхностей, но и на геометрии распределений, а также на геометрии нормальной конгруэнции линий к распределению. В этом параграфе было рассмотрено плоское распределение и соответствующий ему поток. Такой подход, во многом, позволяет облегчить задачу рассмотрения такого сложного движения крови как турбулентное, которое имеет место в сердце, при выбросе крови из сердца, в местах разветвления сосудов, при патологических изменениях в сосудах, а также в тех случаях, когда число Рейнольдса по каким-либо причинам превышает критическое значение.

4.5. Геометрия ламинарного движения крови

Рассмотрения в этом параграфе ведутся на участке сосуда, поэтому можно пренебречь кривизной пространства и использовать, при рассмотрении геометрии ламинарного движения крови, трехмерное евклидово пространство. Следует иметь в виду, что ламинарное движение присуще, в основном, крови по всему кровеносному руслу, за исключением тех случаев, которые перечислялись выше.

Еще Пуазейль показал, что при ламинарном движении частицы крови перемещаются с наибольшей скоростью в центральной части сосуда. Скорость частицы одинакова во всех точках, лежащих на одной и той же окружности, полученной при поперечном разрезе сосуда и имеющей некоторый радиус, который не больше радиуса сосуда. На основании этого можно движущуюся ламинарно кровь по сосуду считать состоящей из цилиндрических слоев, на каждом из которых кровь имеет постоянную скорость, зависящую от радиуса слоя. При этом скорость меняется от слоя к слою, оставаясь на каждом слое постоянной.

Если рассмотреть сечение участка сосуда плоскостью, проходящей через ось сосуда, то зависимость скорости частицы крови от радиуса сосуда имеет следующий вид:

$$v = \frac{p}{4l\eta}(R^2 - r^2), \quad (5.1)$$

где p — давление, l — длина рассматриваемого участка сосуда, η — вязкость, R — радиус сосуда, r — радиус рассматриваемого цилиндра.

Уравнение (5.1) есть уравнение параболы. Тем самым, профиль скоростей при ламинарном движении представляет собой параболу. Так как v — есть расстояние, проходимое за единицу времени, то все частицы жидкости, лежащие в плоскости, ортогональной оси сосуда в некоторое начальное время, по истечению некоторого единичного времени будут лежать на поверхности параболоида. Объем данного параболоида равен объему жидкости Q , протекающей за единицу времени.

Выясним, что собой представляют цилиндрические слои и параболоид для ламинарного движения крови. Эти поверхности охарактеризуем с точки зрения геометрии данного вида движения крови.

Пусть \vec{F} – силы, включая и силу тяжести, действующие на кровь и эти силы носят консервативный характер, то есть им можно поставить в соответствие потенциал U такой, что

$$\vec{F}d\vec{x} = -dU,$$

где $d\vec{x}$ – перемещение рассматриваемой произвольной частицы крови.

Величина

$$H = \frac{1}{2}v^2 + U + \frac{p}{\rho} \quad (5.2)$$

представляет собой полную энергию частицы. Уравнения Lamb-Громеки запишем в виде:

$$\text{grad } H = 2 [\vec{v}, \vec{v}], \quad (5.3)$$

где $\vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ – вихревой вектор.

Умножим равенство (5.3) скалярно на $d\vec{x}$, после чего получим:

$$dH = 2 \vec{v}d\vec{x} \quad (5.4)$$

Как видно из равенства (5.4) функция H постоянна во всем пространстве потока, если $[\vec{v}, \vec{v}] = \vec{0}$. Последнее равенство возможно либо для безвихревого потока $\vec{v} = \vec{0}$, либо для винтового потока, в котором вихревые линии совпадают с линиями тока. В рассматриваемом случае ламинарного движения $\vec{v} = \vec{0}$. Тогда $dH = 0$ и

$$H = \text{const} \quad (5.5)$$

Такие поверхности, которые называются поверхностями постоянной энергии и, как это не раз показывалось выше, являются цилиндрическими поверхностями, по которым движутся частицы.

Здесь следует иметь в виду, что на данных поверхностях постоянной энергии, скорость крови, ввиду ламинарного движения, будет иметь постоянное значение и, следовательно, эти поверхности будут являться и поверхностями постоянной полной энергии.

Далее, рассмотрим геометрическую природу параболоида, исходя из которого, получается профиль скоростей при ламинарном движении крови. Для этого каждой точке x на оси сосуда, перпендикулярно скорости частицы, поставим в соответствие плоскость (x, ξ) . Тем самым вдоль оси сосуда определено распределение Δ^2 , а (x, ξ) – элемент этого распределения, состоящий из точки x и проходящей через нее плоскости $\xi = \xi(x)$, перпендикулярной вектору \vec{e}_3 , задающего направление скорости.

С точкой x на оси сосуда свяжем множество реперов $\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_3\}$, где $\vec{e}_i \in \Delta^2$ и $i, j = 1, 2$, а вектор \vec{e}_3 направлен по направлению скорости частицы крови, то есть ортогонален Δ^2 и $|\vec{e}_3| = 1$. Интегральные линии вектора \vec{v} , а, следовательно, и вектора \vec{e}_3 являются прямыми линиями – ввиду того, что при ламинарном движении крови линии тока – прямые. На основании этого факта нормальная конгруэнция линий к распределению Δ^2 представляет собой прямые линии. Выясним, когда это возможно для распределения Δ^2 . Для этого запишем дифференциальные уравнения данного распределения в рассматриваемом репере уже в привычном виде:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i\omega^3, \quad (5.6)$$

где Λ_{ij} – основной тензор распределения Δ^2 , характеризующий ее вид, а Λ_i – ковектор данного распределения. Интегральные линии векторного поля \vec{e}_3 являются прямыми, согласно выводам второй главы тогда и только тогда, когда

$$\text{Так как } d\vec{e}_3 = \omega_3^i \vec{e}_i = -g^{ij} \omega_j^3 \vec{e}_i = -g^{ij} (\Lambda_{jk} \omega^k + \Lambda_j \omega^3) \vec{e}_i.$$

$$d\vec{e}_3 = -g^{ij}\Lambda_j\omega^3\vec{e}_i \pmod{\omega^i=0}.$$

Отсюда видно, что в ортогональном репере $d\vec{e}_3 = \vec{0} \pmod{\omega^i=0}$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i = 0$. Тем самым, интегральные линии векторного поля \vec{e}_3 являются прямыми тогда и только тогда, когда $\Lambda_i = 0$.

Тогда в случае ламинарного течения крови дифференциальные уравнения распределения Δ^2 примут вид:

$$\omega_i^3 = \Lambda_{ij}\omega^j \quad (5.7)$$

Дифференцируя уравнения (5.7) внешним образом и используя, при этом, уравнения структуры евклидова пространства, получим:

$$\begin{aligned} D\omega_i^3 &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}D\omega^j \\ \omega_i^j \wedge \omega_j^3 &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}(\omega^k \wedge \omega_k^j + \omega^3 \wedge \omega_3^j). \end{aligned}$$

После подстановки равенств (5.7) в последние соотношения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \omega_i^j \wedge (\Lambda_{jk}\omega^k) &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}\omega_k^j \wedge \omega^k - \Lambda_{ij}\omega_3^j \wedge \omega^3 \\ \Lambda_{jk}\omega_i^j \wedge \omega^k &= d\Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}\omega_k^j \wedge \omega^k - \Lambda_{ij}\omega_3^j \wedge \omega^3 \\ (d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}\omega_j^k - \Lambda_{kj}\omega_i^k) \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}\omega_3^j \wedge \omega^3 &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\nabla\Lambda_{ij} \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}\omega_3^j \wedge \omega^3 = 0,$$

где $\nabla\Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}\omega_j^k - \Lambda_{kj}\omega_i^k$.

Применяя лемму Картана, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla\Lambda_{ij} &= \mu_{ijk}\omega^k + \mu_{ij}\omega^3 \\ -\Lambda_{ij}\omega_3^j &= \mu_{ij}\omega^j + \mu_i\omega^3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Так как вектор \vec{e}_3 ортогонален векторам \vec{e}_i , то $\vec{e}_3\vec{e}_i = 0$. Дифференцируя последнее равенство, будем иметь: