

$$\omega_3^j = -g^{jk} \omega_k^3 = -g^{jk} (\Lambda_{kl} \omega^l).$$

Тогда, сравнивая последние равенства со вторыми равенствами из (5.8) получим:

$$\mu_i = 0.$$

Также, исходя из этих равенств, запишем:

$$\Lambda_{ij} g^{jk} \Lambda_{kl} \omega^l = \mu_{ij} \omega^j$$

или

$$\Lambda_{il} g^{lk} \Lambda_{kj} \omega^j = \mu_{ij} \omega^j.$$

Значит

$$\mu_{ij} = \Lambda_{il} g^{lk} \Lambda_{kj} = \Lambda_i^k \Lambda_{kj}.$$

В ортонормированном репере последние равенства можно переписать в виде:

$$\mu_{ij} = \Lambda_{i1} g^{11} \Lambda_{1j} + \Lambda_{i2} g^{22} \Lambda_{2j} = \Lambda_{i1} \Lambda_{1j} + \Lambda_{i2} \Lambda_{2j} \quad (5.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \Lambda_{11}^2 + \Lambda_{12} \Lambda_{21} \\ \mu_{12} &= \Lambda_{11} \Lambda_{12} + \Lambda_{12} \Lambda_{22} = \Lambda_{12} (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \\ \mu_{21} &= \Lambda_{21} \Lambda_{11} + \Lambda_{22} \Lambda_{21} = \Lambda_{21} (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \\ \mu_{22} &= \Lambda_{21} \Lambda_{12} + \Lambda_{22}^2 \end{aligned}$$

Ротор вектора скорости для ортогонального репера имеет вид:

$$\begin{aligned} -rot \vec{v} d\tau &= \vec{e}_1 (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p)) + \\ &+ \vec{e}_2 (\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 - v^1 q + v^2 p) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q)) + \\ &+ \vec{e}_3 (\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 - v^2 r + v^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 - v^3 p + v^1 r)) \end{aligned}$$

Так как вектор \vec{e}_3 направлен по направлению касательной линии тока, то

$$\vec{v} = v \vec{e}_3, \quad (5.10)$$

то предыдущая формула примет вид:

$$-rot\vec{v}d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-vp) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) + \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (vq)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (vq) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-vp)),$$

где

$$p = \omega_2^3 = \Lambda_{21}\omega^1 + \Lambda_{22}\omega^2$$

$$q = -\omega_1^3 = -\Lambda_{11}\omega^1 - \Lambda_{12}\omega^2.$$

Тогда

$$-rot\vec{v}d\tau = \vec{e}_1(-vp_3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) + vq_3\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3) + \vec{e}_3(vq_2\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - vp_1\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1).$$

Так как $p_3 = q_3 = 0$, то

$$-rot\vec{v}d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv)) + \vec{e}_3(vq_2 + vp_1) \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

В случае ламинарного движения $rot\vec{v} = 0$, тогда из последнего равенства будем иметь:

$$\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv) = 0$$

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv) = 0$$

$$-v\Lambda_{12} + v\Lambda_{21} = 0.$$

Из последнего равенства этой системы получаем:

$$\Lambda_{21} = \Lambda_{12} \quad (5.11)$$

Последнее равенство говорит о том, что распределение Δ^2 голономное. Этот вывод сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.10. Ламинарному потоку крови вдоль оси сосуда соответствует голономное распределение, которое ортогонально линии тока.

Форма ω_1^2 , а, следовательно, и форма ω_2^1 , определяют поворот репера вокруг вектора \vec{e}_3 . При ламинарном течении репер не вращается вокруг вектора

\vec{e}_3 . Значит, при описании такого вида движения крови можно положить $\omega_1^2 = 0$, то есть $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^3 \vec{e}_3 = \omega_i^3 \vec{e}_3 = \Lambda_{ij} \omega^j \vec{e}_3 \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^i \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Но так как точка x смещается только вдоль вектора \vec{e}_3 , то можно принять $\omega^1 = \omega^2 = 0$. Тогда, как видно из приведенных выше формул, вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ постоянны.

Далее, положим $\omega^i = dx^i$ и $\vec{e}_i = \vec{f}_i + \Lambda_{ij} x^j \vec{f}_3$, $\vec{e}_3 = \vec{f}_3$, где \vec{f}_i, \vec{f}_3 — базисные вектора неподвижной системы координат. Тогда

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i = dx^i (\vec{f}_i + \Lambda_{ij} x^j \vec{f}_3)$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\vec{x} = x^i \vec{f}_i + \frac{1}{2} \Lambda_{ij} x^i x^j \vec{f}_3 \quad (5.12)$$

Равенство (5.12) есть векторное уравнение параболоида и, следовательно, интегральным многообразием распределения Δ^2 является данный параболоид.

Следствие. Интегральным многообразием распределения Δ^2 является параболоид, ось которого совпадает с осью сосуда при ламинарном движении крови по данному сосуду.

Так как распределение Δ^2 голономное, то в равенствах (5.8) величины μ_{ijk} и μ_{ij} симметричны по всем индексам. Чтобы найти дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины μ_{ijk} , продифференцируем внешним образом первое равенство из (5.8) и применяя лемму Картана, будем получать:

$$\begin{aligned} -d\Lambda_{ik} \wedge \omega_j^k - \Lambda_{ik} D\omega_j^k - d\Lambda_{kj} \wedge \omega_i^k - \Lambda_{kj} D\omega_i^k &= d\mu_{ijk} \wedge \omega^k + \mu_{ijk} D\omega^k + \\ + d\mu_{ij} \wedge \omega^3 + \mu_{ij} D\omega^3. \end{aligned}$$

Из первого уравнения (5.8) также получим:

$$d\Lambda_{ij} = \Lambda_{ik}\omega_j^k + \Lambda_{kj}\omega_i^k + \mu_{ijk}\omega^k + \mu_{ij}\omega^3.$$

Используя последнее, запишем:

$$\begin{aligned} & -(\Lambda_{il}\omega_k^l + \Lambda_{lk}\omega_i^l + \mu_{ikl}\omega^l + \mu_{ik}\omega^3) \wedge \omega_j^k - \Lambda_{ik}\omega_j^l \wedge \omega_l^k - \Lambda_{ik}\omega_j^3 \wedge \omega_3^k - \\ & -(\Lambda_{kl}\omega_j^l + \Lambda_{lj}\omega_k^l + \mu_{kjl}\omega^l + \mu_{kj}\omega^3) \wedge \omega_i^k - \Lambda_{kj}\omega_i^l \wedge \omega_l^k - \Lambda_{kj}\omega_i^3 \wedge \omega_3^k = \\ & = d\mu_{ijk} \wedge \omega^k + \mu_{ijk}\omega^l \wedge \omega_l^k + \mu_{ijk}\omega^3 \wedge \omega_3^k + d\mu_{ij} \wedge \omega^3 + \mu_{ij}\omega^l \wedge \omega_l^3. \end{aligned}$$

Или

$$(\nabla\mu_{ijk} - \mu_{ij}\omega_k^3 - (\Lambda_{il}\Lambda_{jk} + \Lambda_{lj}\Lambda_{ik})\omega_3^l) \wedge \omega^k + (\nabla\mu_{ij} - \mu_{ijk}\omega_3^k) \wedge \omega^3 = 0,$$

$$\text{где } \nabla\mu_{ijk} = d\mu_{ijk} - \mu_{ijl}\omega_k^l - \mu_{ilk}\omega_j^l - \mu_{ljk}\omega_i^l, \quad \nabla\mu_{ij} = d\mu_{ij} - \mu_{ik}\omega_j^k - \mu_{kj}\omega_i^k.$$

Применяя к последнему равенству лемму Картана, после несложных преобразований, запишем:

$$\begin{aligned} \nabla\mu_{ijk} - \mu_{ij}\omega_k^3 - 2\Lambda_{(i|l|\Lambda_{j)k}\omega_3^l} &= \mu_{ijkl}\omega^l + \mu_{ijk3}\omega^3 \\ \nabla\mu_{ij} - \mu_{ijk}\omega_3^k &= \mu_{ij3k}\omega^k + \mu_{ij33}\omega^3, \end{aligned}$$

причем величины μ_{ijkl} симметричны по всем индексам.

Величины Λ_{ij} , μ_{ijk} , μ_{ijkl} , ... образуют фундаментальную последовательность геометрических объектов распределения Δ^2 .

4.6. Движение крови как геодезический поток

Геодезический поток определяется на многообразии $T = T(M)$ касательных векторов к поверхности постоянной энергии. Согласно принципу Мопертюи движение частицы крови в потенциальном поле сил $U(x)$ тяжести по поверхности постоянной энергии H будет происходить по геодезическим линиям. Тем самым, геодезический поток представляет для нас интерес только в качестве одномерного слоения на H . Рассмотрим некоторые вопросы, которые касаются геометрии геодезического потока в евклидовом пространстве E^3 в духе статьи [172].

Пусть поток крови является геодезическим. Свяжем с каждой точкой потока репер, базисными векторами которого являются единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тогда уравнения перемещения репера будут иметь вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B, \quad (6.1)$$

где $A, B = 1, 2, 3$.

1-формы ω^A и ω_A^B удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A \quad (6.2)$$

Будем рассматривать ортонормированный репер, для которого

$$\omega_A^A = 0, \quad \omega_B^A + \omega_A^B = 0 \quad (6.3)$$

Для дальнейших упрощений введем уже известные обозначения:

$$\begin{aligned} \omega_2^3 &= -\omega_3^2 = p = p_A \omega^A, \\ \omega_3^1 &= -\omega_1^3 = q = q_A \omega^A, \\ \omega_1^2 &= -\omega_2^1 = r = r_A \omega^A \end{aligned} \quad (6.4)$$

В качестве основного возьмем векторное поле \vec{e}_3 . Геодезической линией поля будем называть такую линию, главная нормаль которой совпадает с вектором поля. Геодезическая линия должна удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, \\ ds \cdot d^2\vec{x} - (d\vec{x})d^2s &= m\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Распишем последнее равенство. Согласно (6.1) $d\vec{x} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2$, то

$$d^2\vec{x} = (d\omega^1 - r\omega^2) \vec{e}_1 + (d\omega^2 + r\omega^1) \vec{e}_2 + (-q\omega^1 + q\omega^2) \vec{e}_3.$$

Далее найдем:

$$\begin{aligned} \vec{b} = [d\vec{x}, d^2\vec{x}] &= (-q\omega^1\omega^2 + p(\omega^2)^2) \vec{e}_1 + (q(\omega^1)^2 - p\omega^1\omega^2) \vec{e}_2 + (d\omega^2 \cdot \omega^1 + \\ &+ r(\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^2 + r(\omega^2)^2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда вектор главной нормали будет находиться следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{N} = [\vec{b}, d\vec{x}] = & (-d\omega^2 \cdot \omega^1 \omega^2 + d\omega^1 (\omega^2)^2 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^2) \vec{e}_1 + (d\omega^2 \cdot \\ & \cdot (\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^1 \omega^2 + r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^1) \vec{e}_2 + (-q\omega^1 (\omega^2)^2 + p(\omega^2)^3 - q(\omega^1)^3 + \\ & + p(\omega^1)^2 \omega^2) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Так как $\vec{N} = m\vec{e}_3$, то из последнего равенства получаем:

$$\begin{aligned} -d\omega^2 \cdot \omega^1 \omega^2 + d\omega^1 (\omega^2)^2 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^2 &= 0 \\ d\omega^2 (\omega^1)^2 - d\omega^1 \cdot \omega^1 \omega^2 + r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) \omega^1 &= 0 \\ -q\omega^1 (\omega^2)^2 + p(\omega^2)^3 - q(\omega^1)^3 + p(\omega^1)^2 \omega^2 &= m. \end{aligned}$$

Первые два равенства дают:

$$d\omega^1 \cdot \omega^2 - d\omega^2 \cdot \omega^1 - r((\omega^1)^2 + (\omega^2)^2) = 0 \quad (6.5)$$

Совместно с $\omega^3 = 0$ уравнения (6.5) являются условиями, которым удовлетворяет геодезическая линия.

Пусть геодезическая линия с вектором \vec{e}_1 образует угол σ . Тогда $\vec{N}_0 = \cos \sigma \vec{e}_1 + \sin \sigma \vec{e}_2$, где \vec{N}_0 – касательный вектор к этой линии, причем $|\vec{N}_0| = 1$. Тогда $d\vec{N}_0 \perp \vec{N}_0$ и, значит, коллинеарен вектору \vec{N} . Имеем

$$\begin{aligned} d\vec{N}_0 = & (-\sin \sigma d\sigma + \sin \sigma \cdot \omega_2^1) \vec{e}_1 + (\cos \sigma \cdot \omega_1^3 + \cos \sigma d\sigma) \vec{e}_2 + \\ & + (\cos \sigma \cdot \omega_1^3 + \sin \sigma \cdot \omega_2^3) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Чтобы линия была геодезической, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} -\sin \sigma d\sigma + \sin \sigma \cdot \omega_2^1 &= 0, \\ \cos \sigma \cdot \omega_1^2 + \cos \sigma d\sigma &= 0, \\ \cos \sigma \cdot \omega_1^3 + \sin \sigma \cdot \omega_2^3 &= m. \end{aligned}$$

Первые два равенства дают:

$$d\sigma + r = 0.$$

Тогда уравнения, определяющие геодезические линии, принимают вид:

$$\begin{aligned}\omega^3 &= 0 \\ d\sigma + r &= 0\end{aligned}\tag{6.6}$$

Считаем поток крови вихревым, то есть он имеет семейство поверхностей, содержащих все линии тока и все вихревые линии. Вектор \vec{e}_3 направлен по нормали к этому семейству поверхностей в каждой точке. Дифференциальное уравнение семейства поверхностей имеет вид:

$$\omega^3 = 0\tag{6.7}$$

Ввиду интегрируемости этого семейства поверхностей запишем:

$$D\omega^3 \wedge \omega^3 = 0,\tag{6.8}$$

или с учетом уравнений (6.2), (6.3) и (6.4), получим:

$$p_1 + q_2 = 0\tag{6.8'}$$

1-форма, удовлетворяющая равенству (6.8), имеет вид:

$$\omega^3 = Sds\tag{6.9}$$

Так как линии тока крови и ее вихревые линии лежат на поверхности (6.7), то:

$$\vec{v} = v(\cos \sigma \vec{e}_1 + \sin \sigma \vec{e}_2), \quad 2\vec{v} = \text{rot} \vec{v} = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2\tag{6.10}$$

Ввиду того, что полная энергия частицы крови удовлетворяет условию $dH = 2\vec{v}\vec{v}d\vec{x}$, то H должна быть функцией параметра s :

$$H = f(s)\tag{6.11}$$

Далее имеем:

$$Sv(-v^1 \sin \sigma + v^2 \cos \sigma) = f'(s)\tag{6.12}$$

В этом случае уравнения компонентов вихря будут иметь следующий вид:

$$-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \frac{v^1}{v} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left(\sin \sigma \frac{dv}{v}\right) + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (q \cos \sigma - p \sin \sigma),$$

$$-\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \frac{v^2}{v} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \left(-\cos \sigma \frac{dv}{v}\right) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (q \cos \sigma - p \sin \sigma),$$

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \left(-\cos \sigma \frac{dv}{v}\right) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \left(\sin \sigma \frac{dv}{v}\right).$$

Уравнение непрерывности принимает вид:

$$\left(\cos \sigma \frac{dv}{v}\right) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \left(\sin \sigma \frac{dv}{v}\right) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (\sin \sigma - q \cos \sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

Введем обозначения по аналогии с работой [159]:

$$\begin{aligned} L &= p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma, \\ N &= p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma \end{aligned} \quad (*)$$

Чтобы удовлетворить всем рассмотренным выше гемодинамическим уравнениям, мы должны принять:

$$\frac{dv}{v} = \xi \omega^1 + \eta \omega^2 + \left(L + \frac{f'}{Sv^2}\right) \omega^3, \quad (6.13)$$

$$0 = (\eta + N \sin \sigma) \omega^1 - (\xi + N \cos \sigma) \omega^2 + \zeta \omega^3,$$

где ξ, η, ζ – новые неизвестные функции, которые выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия интегрируемости уравнений (6.13).

Пусть вектор \vec{e}_1 выбран по касательным к линиям кровотока. Тогда $\sigma = 0$ и так как $d\sigma + r = 0$, то $r = 0$. Значит, $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. При $\sigma = 0$ второе уравнение из (6.13) дает:

$$\eta = 0, \quad \xi = -N, \quad \zeta = 0. \quad (6.14)$$

Тогда с учетом второго равенства (*) имеем:

$$N = -q_3, \quad \xi = q_3, \quad L = -q_1.$$

Первое уравнение из (6.13) принимает вид:

$$\frac{dv}{v} = q_3 \omega^1 + \left(-q_1 + \frac{f'}{Sv^2}\right) \omega^3 \quad (6.15)$$

Из первого уравнения для компонент вихря, получаем:

$$q_2 = -\frac{v^1}{v} \quad (6.16)$$

Из второго уравнения имеем:

$$v^2 = \frac{f'}{Sv} \quad (6.17)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (6.15), получим условие его интегрируемости:

$$dq_3 \wedge \omega^1 - dq_1 \wedge \omega^3 - q_3 q \wedge \omega^3 - q_1 (q \wedge \omega^1 - p \wedge \omega^2) - \frac{2f'}{Sv^2} q_3 \omega^1 \wedge \omega^3 = 0 \quad (6.18)$$

Как видно из уравнения (6.18), на каждой поверхности семейства поверхностей постоянной энергии мы будем получать два кровотока с равными по модулю и противоположными по направлению скоростями. Два кровотока не будут определяться в том случае, когда

$$q_3 = 0 \quad (6.19)$$

Тогда равенство (6.15) принимает вид:

$$\frac{dv}{v} = -(q_1 + \frac{f'}{Sv^2}) \omega^3 \quad (6.20)$$

Но тогда $dv = 0$ на каждой поверхности $\omega^3 = 0$, то есть поверхности постоянной энергии являются поверхностями постоянной полной энергии.

При условии (6.19) равенство (6.18) дает:

$$D(q_1 \omega^3) = 0 \quad (6.21)$$

Из (6.21) получаем:

$$q_1 \omega^3 = d\varphi \quad (6.22)$$

Условие (6.22) есть условие того, что вектор $q_1 \vec{e}_3$ есть градиент семейства поверхностей постоянной энергии. Подставив (6.22) в (6.20), запишем:

$$\frac{dv}{v} = -d\varphi - \frac{f'}{Sv^2} \omega^3.$$

Умножая последнее равенство на v^2 и используя (6.9), получаем:

$$vdv = -v^2 d\varphi - f' ds \quad (6.23)$$

Интегрируя уравнение (6.23), получим:

$$v^2 \left(\frac{1}{2} + \varphi \right) + f(s) = \text{const} \quad (6.24)$$

Так как согласно равенству (6.11) $f(s) = H$, а $H = \frac{1}{2} v^2 + U + \frac{P}{\rho}$, где U – потенциал внешних сил. Тогда (6.24) переписывается в виде:

$$v^2 (1 + \varphi) + U + \frac{P}{\rho} = \text{const} \quad (6.25)$$

Рассматривается вихревой поток крови. Согласно формуле Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{vD\rho}{\eta},$$

когда скорость измеряется в $\frac{\text{см}}{\text{с}}$, D – в см, а η – в пуазах, турбулентность или завихрения появляется тогда, когда $\text{Re} > 2000$.

Формула (6.25) получена для вихревого движения крови. Из нее видно, что скорость крови пропорциональна квадратному корню из показателя падения давления вдоль участка сосуда. Связь между градиентом давления и скоростью крови в сосуде при ламинарном потоке крови (слева от вертикальной пунктирной линии) и при переходе его в турбулентный поток справа от пунктирной линии имеет вид, показанный на рис. 12.

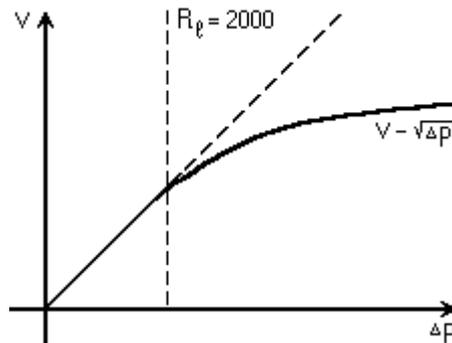


Рис. 12. Графическая связь между градиентом давления и скоростью крови в сосуде

Подставляя в (6.25) вместо $\rho = \frac{\text{Re}\eta}{vD}$, получим:

$$v^2(1 + \varphi) + U + \frac{pvD}{Re\eta} = const = C.$$

Беря $C = 0$, получим:

$$(1 + \varphi)v^2 + \frac{pD}{Re\eta}v + U = 0 \quad (6.26)$$

Решая квадратное уравнение (6.26), получаем:

$$v = \frac{-\frac{pD}{Re\eta} \pm \sqrt{\left(\frac{pD}{Re\eta}\right)^2 - 4(1 + \varphi)U}}{2(1 + \varphi)}, \quad (6.27)$$

при условии $\left(\frac{pD}{Re\eta}\right)^2 - 4(1 + \varphi)U \geq 0$.

Как видно, из формулы (6.27) можно сделать вывод, что при движении крови с завихрениями при заданных условиях и при движении по геодезическим, скорость крови больше в том участке сосуда, где давление меньше и наоборот. Последнее хорошо согласуется с известным законом гидродинамики, как и гемодинамики и является подтверждением адекватности полученной математической модели.

Глава 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В СЕРДЕЧНО - СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЕ

5.1. Структурные особенности сердечно-сосудистой системы в математической модели

В настоящее время в литературе встречается большое разнообразие подходов моделирования деятельности сердечно-сосудистой системы (ССС) человека. Но как справедливо отмечает Лишук В.А., все рассматриваемые подходы разнятся идеями, которые лежат в их основе и поэтому нет объединяющей идеи, которая позволила бы использовать идеи одного метода в другом и наоборот. Задачи практики требуют часто именно использования нескольких

методов, так как каждый метод, в основном, создается для моделирования какой-либо одной или нескольких, но не всех, сторон деятельности ССС или ее участков. Для решения практических задач клиницисты должны рассматривать всесторонне деятельность ССС, а при пользовании конкретным методом моделирования они бывают часто лишены такой возможности.

Моделирование движения крови по отдельным участкам сосудистого русла основывается на одних принципах, а моделирование всей ССС строится на основании других принципов. Это приводит к трудностям, связанных, прежде всего, с теми задачами, в которых нужно объяснить закономерности движения крови в отдельном сосуде, основываясь на ее движении во всей ССС и на принципах, которые лежат в основе моделирования всей системы. Следующая трудность, которая встает перед исследователем – это большое число параметров, от которых зависит движение крови. Все это приводит к большому количеству уравнений, в которых отражается связь между введенными параметрами. И одна из важнейших проблем здесь – это отбор наиболее важных параметров в условиях поставленной задачи и дальнейшая работа с ними.

И, наконец, еще одна существенная трудность – это различие используемых математических аппаратов, которые используются в различных моделях. Все это также затрудняет, в ряде случаев переход от работы с одной моделью к работе с другими моделями.

При описании геометрии кровеносной системы, последняя представляется в виде определенного пространства. Для описания геометрических свойств такого пространства, а также геометрии линий тока используется уже устоявшийся аппарат дифференциальной геометрии, основанный на использовании метода внешних форм и метода подвижного репера. Перечисленные выше трудности при математическом моделировании системы кровообращения удастся избежать в подходе, предлагаемом в данной работе, за счет того, что геометрия как всей ССС человека, так и ее отдельных участков, рассматривается в определенном пространстве, для исследования которого разработан математический ап-

парат. Здесь уместно перечислить следующие работы названного направления [173-182, 187-189].

Такой подход основан на том, что ССС, как и весь организм человека, представляет собой определенное пространство с характерной для этого пространства геометрией. Такое пространство в работе [174] было названо пространством материальных сред живого, объединенных единым функциональным назначением. В качестве материальных сред рассматриваются системы организма, одной из которых является кровеносная система. Каждую из материальных сред также рассматриваем в качестве определенного вида пространства, которое является подпространством пространства материальных сред живого. Для описания конкретной системы организма человека мы должны использовать специальное пространство, геометрия которого сопоставима с геометрией изучаемой системы. Так, например, при изучении ССС в качестве пространства материальных сред живого используется субпроективное пространство, геометрические свойства которого наиболее сопоставимы с геометрическими свойствами сердечно-сосудистой системы человека.

Рассматривая геометрию ССС человека, нужно уметь описывать как геометрию ламинарного движения, так и турбулентного движения. С геометрической точки зрения, больший интерес вызывает турбулентное движение крови, так как такому движению соответствует более насыщенная геометрия и для описания которой необходимо большее число геометрических объектов. Ламинарное движение крови, используя наглядный рисунок, можно представить следующим образом:

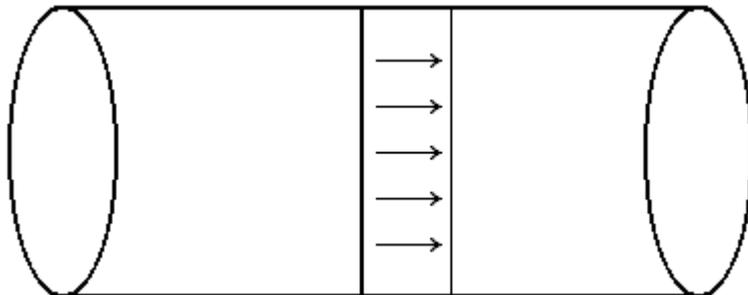


Рис. 13. Распределение скорости потока крови в сосуде, в случае, когда движение крови носит ламинарный характер и кровь – не вязкая жидкость.

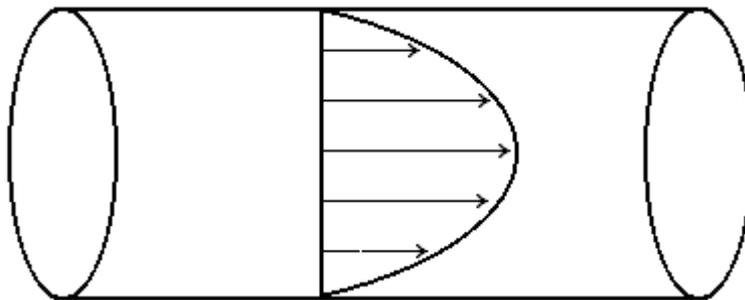


Рис. 14. Распределение скорости потока крови в сосуде в случае, когда кровь движется ламинарно и имеет вязкость.

В третьем случае (рис. 15) кровь движется турбулентно, но существует семейство поверхностей, на каждой поверхности которого располагаются одно семейство линий тока и одно семейство вихревых линий, если те и другие не совпадают.

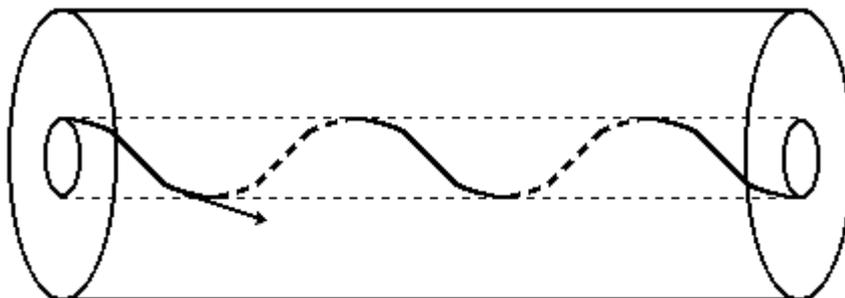


Рис. 15. Распределение скорости потока крови в сосуде в одном из случаев турбулентного движения крови при наличии поверхностей, содержащих линии тока и вихревые линии.

Первые три случая предполагают описание геометрии ССС с привлечением субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу.

И, наконец, в четвертом случае кровь движется турбулентно, но не существует поверхностей полной энергии. В этом случае геометрия ССС рассматривается с привлечением субпроективного пространства, отнесенного к неголономному реперу.

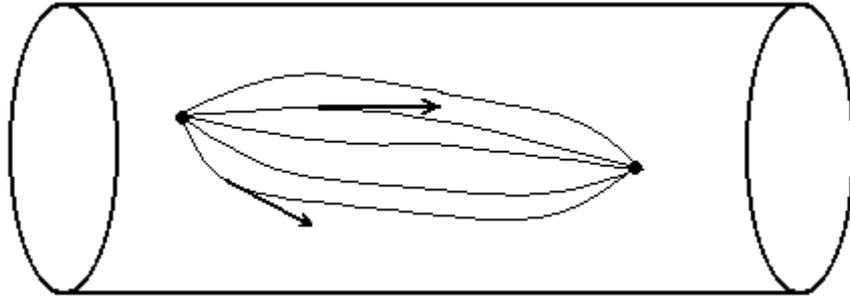


Рис. 16. Распределение скорости потока крови в сосуде, в случае турбулентного движения крови, когда не существует поверхностей полной энергии.

Последний случай наиболее сложен как с точки зрения описания движения крови, так и с точки зрения соответствующей ему геометрической картины.

Следует отметить, что в качестве параметров рассматриваются структурные параметры, число которых равно размерности пространства.

5.2. Дифференциальные операторы системы кровообращения

В касательном пространстве к трехмерному субпроективному пространству зададим репер, определяемый точкой $x \in C^3$ и векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и уравнениями перемещения такого репера:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \quad (2.1)$$

где $\vec{e}_{AB} = \vec{e}_{BA}$ - векторы, образующие с векторами \vec{e}_A репер второго порядка, связанный с точкой x . Симметричность векторов второго порядка по нижним индексам говорит о том, что репер, определяемый такими векторами, является голономным. В качестве базисных форм (структурных параметров) выберем формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ такие, что

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0.$$

Дифференциальные формы ω^A и ω_A^B , входящие в уравнения (2.1), удовлетворяют уравнениям структуры субпроективного пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad D\omega_B^A = \omega_B^K \wedge \omega_K^A + R_{BKL}^A \omega^K \wedge \omega^L, \quad (2.2)$$

где R_{BKL}^A - тензор кривизны субпроективного пространства.

Так как субпроективные пространства являются римановыми пространствами, то в качестве структурной группы такого пространства возьмем риманову группу. В свою очередь, группой римановой структуры служит ортогональная группа $O(n)$, инвариантные формы которой удовлетворяют уравнениям:

$$\sigma_A^B + \sigma_B^A = 0, \quad (2.3)$$

где $\omega_B^A|_{\omega^A=0} = \sigma_B^A$.

Тогда формы ω_B^A также удовлетворяют уравнениям:

$$\omega_B^A + \omega_A^B = 0 \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что $\omega_A^A = 0$.

Точно так же, как это делалось в параграфе 4.2 в евклидовом пространстве для нахождения градиента некоторой функции φ , можно проделать и для данного субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу и в результате чего получим:

$$\text{grad}\varphi = \frac{e^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}, \quad (2.5)$$

где e^1, e^2, e^3 – взаимные векторы к векторам данного репера.

Для получения формулы $\text{div } \vec{v}$, где \vec{v} – вектор скорости крови и который представим в виде $\vec{v} = v^A \vec{e}_A$. Продифференцируем это равенство, используя второе уравнение из (2.1):

$$d\vec{v} = (dv^A + v^B \omega_B^A) \vec{e}_A + v^A \omega^B \vec{e}_{AB} \quad (2.6)$$

Репер первого порядка, принадлежащий $T = T(C^3)$, считаем ортонормированным, поэтому можно взять $\vec{e}_A^{\rightarrow 2} = 1$. Дифференцируя последнее равенство, получим: $\vec{e}_A d\vec{e}_A = 0$ или, с учетом (2.1), запишем:

$$\vec{e}_A (\omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}) = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$\omega_A^A + \omega^B \vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0.$$

С учетом равенств (2.4), последнее равенство переписывается в виде:

$$\omega^B \vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0.$$

Так формы ω^B независимы, то

$$\vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда получаем:

$$\operatorname{div} \vec{v} d\tau = d_1 \vec{v} d_2 \vec{x} d_3 \vec{x} + d_2 \vec{v} d_3 \vec{x} d_1 \vec{x} + d_3 \vec{v} d_1 \vec{x} d_2 \vec{x} \quad (2.8)$$

С учетом (2.6) соотношение (2.8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} d\tau = & \begin{vmatrix} d_1 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^1 & \omega^3 \\ d_1 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ d_1 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_2 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^1 & \omega^1 \\ d_2 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ d_2 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} d_3 v^1 + v^B \omega_B^1 & \omega^1 & \omega^1 \\ d_3 v^2 + v^B \omega_B^2 & \omega^2 & \omega^2 \\ d_3 v^3 + v^B \omega_B^3 & \omega^3 & \omega^3 \end{vmatrix} + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K \vec{e}_L) + \\ & + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K \vec{e}_L) + v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K \vec{e}_L) \end{aligned}$$

Последние три слагаемых после несложных преобразований представим в следующем виде:

$$v^A \omega^B \omega^K \omega^L (\vec{e}_{AB} \vec{e}_K \vec{e}_L + \vec{e}_{AB} \vec{e}_L \vec{e}_K) \quad (*)$$

Из равенств (2.7) получаем:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \vec{e}_{12} = 0, \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{21} = 0, \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{31} = 0, \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{13} = 0, \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{22} = 0, \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{32} = 0, \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{11} = 0, \quad \vec{e}_2 \vec{e}_{23} = 0, \quad \vec{e}_3 \vec{e}_{33} = 0. \end{aligned}$$

На основании последних равенств, для упрощения дальнейших вычислений положим, что векторы второго порядка через векторы первого порядка можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{12} &= a\vec{e}_3, \quad \vec{e}_{13} = b\vec{e}_2, \quad \vec{e}_{23} = c\vec{e}_1, \quad \vec{e}_{11} = u^2\vec{e}_2 + u^3\vec{e}_3, \\ \vec{e}_{22} &= m^1\vec{e}_1 + m^3\vec{e}_3, \quad \vec{e}_{33} = k^1\vec{e}_1 + k^2\vec{e}_2\end{aligned}$$

Для иллюстрации сущности дальнейших вычислений, а также некоторого упрощения вычислений (в дальнейшем это будет сделано в более общем виде) воспользуемся следующими результатами и упрощениями:

$$\begin{aligned}\vec{e}_{12} &= \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{13} = \vec{e}_2, \quad \vec{e}_{23} = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_{11} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_{22} &= \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{33} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2\end{aligned}\tag{2.9}$$

Распишем сумму (*), а также учитывая равенства (2.7), получим:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} d\tau &= (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ &+ (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

Для субпроективного пространства, как многообразия, формула Стокса, а, следовательно, и формула Гаусса-Остроградского являются верными.

Далее, найдем выражение для ротора вектора скорости крови в субпроективном пространстве с помощью формулы:

$$\iiint \operatorname{rot} \vec{v} d\tau = -\iiint [\vec{v}, d\vec{v}].$$

Применяя эту формулу к объему $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$, получим после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned}-\operatorname{rot} \vec{v} d\tau &= \vec{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge (dv^K + v^L \omega_L^K)(\vec{e}_B \vec{e}_K) + \vec{e}_A \omega^A \wedge \omega^B \wedge \\ &\wedge (v^K \omega^L)(\vec{e}_{KL} \vec{e}_B)\end{aligned}\tag{2.11}$$

В ортогональном репере будем иметь:

$$\begin{aligned}
-rot\vec{v}d\tau = & \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1\omega_1^2 + v^3\omega_3^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1\omega_1^3 + \\
& + v^2\omega_2^3)) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2\omega_2^1 + v^3\omega_3^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^1\omega_1^3 + \\
& + v^2\omega_2^3)) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^2\omega_2^1 + v^3\omega_3^1) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1\omega_1^2 + \\
& + v^3\omega_3^2)) + ((v^3 - v^2)\vec{e}_1 + (v^1 - v^3)\vec{e}_2 + (v^2 - v^1)\vec{e}_3)d\tau
\end{aligned} \tag{2.11*}$$

Для иллюстрации последних формул рассмотрим уравнение неразрывности потока крови в субпроективном пространстве, отнесенном к голономным реперам.

Пусть $\rho = \rho(x, y, z, t)$ – плотность крови, $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ – поле скоростей движения частиц крови. Основываясь на законе сохранения количества вещества и используя формулу Гаусса-Остроградского, найдем взаимосвязь плотности и скорости крови.

Кровеносные сосуды системы кровообращения, исходя из принципа Мопертюи, являются геодезическими линиями в субпроективном пространстве, при сопоставлении, конечно, пространства ССС с субпроективным пространством. Сердцу, в котором сходятся кровеносные сосуды, сопоставляется точка, через которую проходят геодезические линии субпроективного пространства.

Возьмем цилиндрическую область D в данном пространстве, ограниченную поверхностью S и мы получим, что за промежуток времени Δt количество вещества в области D изменится на величину

$$\iiint_D (\rho(x, y, z, t + \Delta t) - \rho(x, y, z, t)) dV.$$

Ввиду того, что за промежуток времени Δt поток крови через поверхность S в сторону ее внешней нормали равен

$$\Delta t \iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}.$$

с точностью до $o(\Delta t)$, то при условии отсутствия в области D источников и стоков и в силу закона сохранения количества крови, имеем:

$$\iiint_D \Delta \rho \Delta V = -\Delta t \iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}.$$

или

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_S \rho \vec{v} d\vec{\sigma}.$$

Применяя к правой части последнего равенства формулу Гаусса-Остроградского, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (2.12)$$

которое называется уравнением неразрывности крови.

Так как рассматривается случай несжимаемости крови, то объемный расход крови через замкнутую поверхность S должен быть равен нулю, то есть

$$\iint_S \vec{v} d\vec{\sigma} = 0.$$

Отсюда, на основании формулы Гаусса-Остроградского следует, что

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.13)$$

С учетом (2.13), равенство (2.10) примет вид:

$$\begin{aligned} & (dv^1 + v^B \omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^B \omega_B^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ & + (dv^3 + v^B \omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если рассмотреть принятые ранее обозначения, то формула (2.14) запишется:

$$\begin{aligned} & (dv^1 - v^2 r + v^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (dv^2 + v^1 r - v^3 p) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \\ & + (dv^3 - v^1 q + v^2 p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.14^*)$$

Выбирая вектор \vec{e}_3 по направлению касательной линии тока крови, получим:

$$\vec{v} = v \vec{e}_3 \quad (2.15)$$

Тогда (2.14^{*}) примет вид:

$$\frac{dv}{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Пусть $dv = v_A \omega^A$, тогда

$$v_3 = v(p_2 - q_1) \quad (2.16)$$

Так как кровь движется по кровеносной системе, которая имеет геометрию, по нашему предположению, аналогичную геометрии субпроективного пространства, то наряду с функциями ρ и \vec{v} рассмотрим давление $p = p(x, y, z, t)$ как функцию пространства и времени.

Выделим в данном пространстве, как и ранее, цилиндрическую область D , которую ограничивает поверхность S . На каждый элемент ρdV массы крови действуют силовые поля, среди них есть и гравитационное. Пусть $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z, t)$ – плотность создаваемых внешними полями сил, которые в данном случае называются массовыми. Тогда на элемент массы ρdV действует сила $\vec{F} \rho dV$. Если элемент массы имеет ускорение \vec{a} , то это равносильно наличию силы инерции - $\vec{a} \rho dV$. Также на элемент $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$ поверхности S со стороны частиц крови, соседними с попавшими в D , действует давление - $\rho d\vec{\sigma}$. Кроме того, нужно рассмотреть силу вязкости F_{visc} , замедляющую движение крови:

$$\vec{F}_{visc} = 2\pi r l \eta \text{ grad } v, \quad (2.17)$$

где η – вязкость.

Согласно принципу Даламбера, все силы, действующие на область D , взаимно уравновешиваются, то есть:

$$\iiint_D (\vec{F} + \vec{F}_{visc} - \vec{a}) \rho dV - \iint_D \text{grad } p dV = 0.$$

В силу произвольности в выборе области D , получаем:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{F} + \rho 2\pi r l \eta \text{ grad } v - \text{grad } p = 0 \quad (2.18)$$

Так как $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, то равенство (2.18) примет вид:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + 2\pi r l \eta \operatorname{grad} v - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \quad (2.19)$$

С учетом формулы (2.5) равенство (2.19) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + 2\pi r l \eta \frac{e^1 dv \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 dv \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 dv \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} - \\ - \frac{1}{\rho} \frac{e^1 dp \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 dp \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 dp \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Значения grad , div и rot вычислены с упрощениями, которые представлены в (2.9) получим выражения в более общем случае. Для этого запишем:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{11} = a_{11}^2 \vec{e}_2 + a_{11}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{21} = a_{21}^1 \vec{e}_1 + a_{21}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{31} = a_{31}^1 \vec{e}_1 + a_{31}^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}_{12} = a_{12}^2 \vec{e}_2 + a_{12}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{22} = a_{22}^1 \vec{e}_1 + a_{22}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{32} = a_{32}^1 \vec{e}_1 + a_{32}^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}_{13} = a_{13}^2 \vec{e}_2 + a_{13}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{23} = a_{23}^1 \vec{e}_1 + a_{23}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{33} = a_{33}^1 \vec{e}_1 + a_{33}^2 \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как вектора \vec{e}_{AB} симметричны по нижним индексам, то в качестве неизвестных коэффициентов в разложениях (2.21), возьмем следующие:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{11} = a_{11}^2 \vec{e}_2 + a_{11}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{22} = a_{22}^1 \vec{e}_1 + a_{22}^3 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_{12} = a_{12}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{e}_{23} = a_{23}^1 \vec{e}_1 \\ \vec{e}_{13} = a_{13}^2 \vec{e}_2, \quad \vec{e}_{33} = a_{33}^1 \vec{e}_1 + a_{33}^2 \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Как видно из равенств (2.22), количество неизвестных коэффициентов a_{BC}^A равно 9.

В трехмерном субпроективном пространстве S^3 рассмотрим голономное двумерное подмногообразие, которое по аналогии с евклидовым пространством, назовем двумерной поверхностью. Данную поверхность можно отнести к семейству поверхностей, на которых находятся все линии тока крови и все вихревые линии, если последние существуют. С поверхностью P^2 свяжем семейство реперов $R(P^2)$ так, что точка x – начало любого репера семейства принадлежит поверхности, а вектора \vec{e}_A , лежащие в касательном пространстве

в точке $x \in C^3$, расположены таким образом по отношению к поверхности P^2 , что вектор \vec{e}_3 направлен по нормали к ней. Так как смещение $d\vec{x}$ происходит вдоль этой поверхности, то $\omega^3 = 0$.

Тогда уравнения инфинитезимального перемещения репера примут следующий вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 \\ d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{11} + \omega^2 \vec{e}_{12} \\ d\vec{e}_2 &= \omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{21} + \omega^2 \vec{e}_{22} \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 + \omega^1 \vec{e}_{31} + \omega^2 \vec{e}_{32}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Внешнее дифференцирование уравнения $\omega^3 = 0$ с учетом уравнений структуры (2.2) дает:

$$\omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 = 0.$$

Отсюда, используя лемму Картана, получим:

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a\omega^1 + b\omega^2 \\ \omega_2^3 &= b\omega^1 + c\omega^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

С учетом того, что $\omega_1^3 = -q_1\omega^1 - q_2\omega^2$ и $\omega_2^3 = p_1\omega^1 + p_2\omega^2$, получим: $a = -q_1$, $b = -q_2$, $b = p_1$, $c = p_2$. Тем самым

$$p_1 = -q_2 \quad (2.25)$$

Из условия (2.25) можно сделать вывод: линии кривизны векторного поля \vec{e}_3 ортогональны тогда и только тогда, когда верно равенство (2.25).

Для ортогонального репера $R(P^2)$, последние три уравнения из (2.23) примут вид:

$$\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{11} + \omega^2 \vec{e}_{12} \\ d\vec{e}_2 &= -\omega_1^2 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega^1 \vec{e}_{21} + \omega^2 \vec{e}_{22} \\ d\vec{e}_3 &= -\omega_1^3 \vec{e}_1 - \omega_2^3 \vec{e}_2 + \omega^1 \vec{e}_{31} + \omega^2 \vec{e}_{32} \end{aligned} \quad (2.26)$$