На основании равенств (2.24) видно, что число линейно-независимых форм (параметров), входящих в уравнения (2.23; 2.20) равно трем: $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$. Если точка x неподвижна, то $\omega^1 = \omega^2 = 0$, но тогда уравнения (2.23), с учетом (2.24) для ортогонального репера примут вид:

$$d\vec{x} = \vec{0},\ d\vec{e}_1 = \omega_1^2 \vec{e}_2,\ d\vec{e}_2 = -\omega_1^2 \vec{e}_1,\ d\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Отсюда видно, что вектор $\vec{e}_3$ постоянен, а форма ω_1^2 определяет поворот репера вокруг вектора $\vec{e}_3$. Так как, в этом случае, после внешнего дифференцирования первого из последних равенств, получим:

$$\begin{aligned} &0 = d\vec{e}_2 \wedge \omega_1^2 + \vec{e}_2 D\omega_1^2 \\ &-\omega_1^2 \vec{e}_1 \wedge \omega_1^2 + \vec{e}_2 D\omega_1^2 = 0, \\ &D\omega_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Значит, форма $\omega^2{}_1$ есть полный дифференциал: $\omega_1^2 = d\psi$. Возьмем два неколлинеарных вектора $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$, ортогональных вектору $\vec{e}_3$, то площадь параллелограмма, построенного на них, равна:

$$\sigma(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) = (\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \omega^1(x, \vec{\xi}_1) & \omega^2(x, \vec{\xi}_1) & 0 \\ \omega^1(x, \vec{\xi}_2) & \omega^2(x, \vec{\xi}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \omega^1(x, \vec{\xi}_1)\omega^2(x, \vec{\xi}_2) - \omega^1(x, \vec{\xi}_2)\omega^2(x, \vec{\xi}_1) = (\omega^1 \wedge \omega^2)(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2).$$

Тем самым, $\sigma = \omega^1 \wedge \omega^2 -$ элемент площади поверхности P^2. По аналогии, как это делалось в евклидовом пространстве, второй квадратичной формой поверхности P^2, назовем проекцию второго дифференциала точки x на вектор $\vec{e}_3$, который находится в касательном пространстве в точке x, как точке субпроективного пространства и ортогонален поверхности P^2, то есть $\varphi = \vec{e}_3 d^2 \vec{x}$.

Из первого уравнения (2.23) запишем, после его дифференцирования:

$$d^2\vec{x} = (d\omega^1 + \omega^2\omega_2^1)\vec{e}_1 + (\omega^1\omega_1^2 + d\omega^2)\vec{e}_2 + (\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3)\vec{e}_3 +$$
$$+(\omega^1)^2\vec{e}_{11} + 2\omega^1\omega^2\vec{e}_{12} + (\omega^2)^2\vec{e}_{22}.$$

Последнее равенство, с учетом (2.22), перепишем в виде:

$$d^2\vec{x} = (d\omega^1 + \omega^2\omega_2^1 + (\omega^2)^2 a_{22}^1)\vec{e}_1 + (d\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + (\omega^1)^2 a_{11}^2)\vec{e}_2 +$$
$$+(\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 + (\omega^1)a_{11}^3 + 2\omega^1\omega^2 a_{12}^3 + (\omega^2)^2 a_{22}^3)\vec{e}_3 \qquad (2.27)$$

Поэтому $\varphi = \vec{e}_3 d^2\vec{x} = \omega^1\omega^3{}_1 + \omega^2\omega^3{}_2 + (\omega^1)a^3{}_{11} + 2\,\omega^1\omega^2\,a^3{}_{12} +$
$+(\omega^2)^2\,a^3{}_{22}$.

С учетом равенств (2.24), получим:

$$\varphi = (a + a^3{}_{11})(\omega^1)^2 + 2(b + a^3{}_{12})\omega^1\,\omega^2 + (c + a^3{}_{22})(\omega^2)^2 \qquad (2.28)$$

Из (2.28) видно, что коэффициенты $a^3{}_{11}, a^3{}_{12}, a^3{}_{22}$ в разложении векторов $\vec{e}_{11}$, $\vec{e}_{12}$, $\vec{e}_{22}$, также коэффициенты $a = -q_1$, $b = p_1 = -q_2$ и $c = p_2$, являются коэффициентами второй квадратичной формы. Тогда уравнение $\varphi = 0$ определяет в каждой точке поверхности P^2 два асимптотических направления. Рассмотрим $\Delta = (a + a^3{}_{11})(c + a^3{}_{22}) - (b + a^3{}_{12})^2$. Тогда асимптотические направления являются действительными, если $\Delta < 0$; мнимыми, если $\Delta > 0$ и совпавшими, если $\Delta = 0$. В этих случаях точка поверхности P^2, по аналогии с точкой поверхности евклидова пространства, называется, соответственно, гиперболической, эллиптической, параболической.

Найдем выражения для grad, div и rot в случае, когда выражения векторов $\vec{e}_{AB}$ имеют вид (2.22).

Проводя вычисления grad φ , как это делалось несколько выше, получим формулу, аналогичную формуле (2.5).

Точно так же, как поступали при выводе формулы (2.10), получим:

$$d\tau\, div\,\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^B\,\omega^1{}_B) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^B\omega^2{}_B) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 +$$
$$+ (d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^B\omega^3{}_B) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}^K \underset{K\neq A}{a_{KA}^A})\, d\tau, \qquad (2.29)$$

где в последнем слагаемом вначале производится суммирование по A, а затем суммирование по $K \neq A$.

Выражение для ротора вектора скорости крови $\vec{\mathrm{v}}$ найдем, пользуясь формулой:

$$\iiint rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau = -\oiint [\vec{\mathrm{v}}, d\vec{\sigma}],$$

где $d\vec{\sigma}$ – вектор для элемента поверхности.

Как и в случае евклидова пространства, получим:

$$-rot\vec{\mathrm{v}}d\tau = d_2\vec{x}(d_1\vec{\mathrm{v}}\ d_3\vec{x}) - d_3\vec{x}(d_1\vec{\mathrm{v}}\ d_2\vec{x}) + d_3\vec{x}(d_2\vec{\mathrm{v}}\ d_1\vec{x}) - \\ -d_1\vec{x}(d_2\vec{\mathrm{v}}\ d_3\vec{x}) + d_1\vec{x}(d_3\vec{\mathrm{v}}\ d_2\vec{x}) - d_2\vec{x}(d_3\vec{\mathrm{v}}\ d_1\vec{x}), \tag{2.30}$$

где скобками обозначены скалярные произведения.

Вектор скорости крови представим в виде $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^A\vec{e}_A$. Тогда

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B\omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^A\omega^B\vec{e}_{AB} \tag{2.31}$$

С учетом (2.31) равенство (2.30) перепишем в следующем виде:

$$rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau = d_1\vec{x}(((d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B\omega_B^A)\wedge\omega^K)_{23}(\vec{e}_A\vec{e}_K) + \mathrm{v}^A(\omega^B\wedge\omega^K)_{23}(\vec{e}_{AB}\vec{e}_K)) + \\ +d_2\vec{x}(((d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B\omega_B^A)\wedge\omega^K)_{31}(\vec{e}_A\vec{e}_K) + \mathrm{v}^A(\omega^B\wedge\omega^K)_{31}(\vec{e}_{AB}\vec{e}_K)) + d_3\vec{x}\cdot \\ \cdot(((d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B\omega_B^A)\wedge\omega^K)_{12}(\vec{e}_A\vec{e}_K) + \mathrm{v}^A(\omega^B\wedge\omega^K)_{12}(\vec{e}_{AB}\vec{e}_K)).$$

Или, после несложных преобразований, окончательно получим:

$$rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau = -\vec{e}_L\omega^L\wedge\omega^K\wedge(d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B\omega_B^A)(\vec{e}_A\vec{e}_K) - \\ -\vec{e}_L\omega^L\wedge\mathrm{v}^A(\omega^K\wedge\omega^B)(\vec{e}_{AB}\vec{e}_K) \tag{2.32}$$

Для ортогонального репера будем иметь:

$$-rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau = \vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1\omega_1^2 + \mathrm{v}^3\omega_3^2) + \omega^1\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^1\omega_1^3 + \\ +\mathrm{v}^2\omega_2^3)) + \vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^1\wedge(d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^2\omega_2^1 + \mathrm{v}^3\omega_3^1) + \omega^2\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^1\omega_1^3 + \\ +\mathrm{v}^2\omega_2^3)) + \vec{e}_3(\omega^3\wedge\omega^1\wedge(d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^2\omega_2^1 + \mathrm{v}^3\omega_3^1) + \omega^3\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1\omega_1^2 + \\ +\mathrm{v}^3\omega_3^2)) + \vec{e}_1(d\tau(\mathrm{v}^1(\vec{e}_{13}\vec{e}_2) + \mathrm{v}^3(\vec{e}_{33}\vec{e}_2)) - d\tau(\mathrm{v}^1(\vec{e}_{12}\vec{e}_3) + \mathrm{v}^2(\vec{e}_{22}\vec{e}_3))) + \\ +\vec{e}_2(-d\tau(\mathrm{v}^2(\vec{e}_{23}\vec{e}_1) + \mathrm{v}^3(\vec{e}_{33}\vec{e}_1)) + d\tau(\mathrm{v}^1(\vec{e}_{11}\vec{e}_3) + \mathrm{v}^2(\vec{e}_{21}\vec{e}_3))) + \vec{e}_3(d\tau(\mathrm{v}^2\cdot \\ \cdot(\vec{e}_{22}\vec{e}_1) + \mathrm{v}^3(\vec{e}_{32}\vec{e}_1)) - d\tau(\mathrm{v}^1(\vec{e}_{11}\vec{e}_2) + \mathrm{v}^3(\vec{e}_{31}\vec{e}_2))).$$

С учетом выражения форм $\omega^3{}_2$, $\omega^3{}_1$ и $\omega^2{}_1$ через базисные и с учетом равенств (2.22), последнее равенство окончательно примет вид:

$$
\begin{aligned}
&-rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1 r - \mathrm{v}^3 p) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + \\
&+ d\tau(\mathrm{v}^1(a^2_{13} - a^3_{12}) + \mathrm{v}^3 a^2_{33} - \mathrm{v}^2 a^3_{22})) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \\
&+ \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + d\tau(\mathrm{v}^1 a^3_{11} + \mathrm{v}^2(a^3_{12} - a^1_{23}) - \mathrm{v}^3 a^1_{33})) + \\
&+ \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1 r - \mathrm{v}^3 p) + d\tau \cdot \\
&\cdot(-\mathrm{v}^1 a^2_{11} + \mathrm{v}^2 a^1_{22} + \mathrm{v}^3(a^1_{23} - a^2_{13})) \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Пусть вектор вихря крови $\vec{\nu}$ по базисным векторам имеет следующее разложение:

$$\vec{\nu} = rot\vec{\mathrm{v}} = \nu^A \vec{e}_A \qquad (2.34)$$

Тогда с учетом равенства (2.33), компоненты вихря будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&-d\tau \cdot \nu^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1 r - \mathrm{v}^3 p) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + \\
&+ (\mathrm{v}^1(a^2{}_{13} - a^3{}_{12}) - \mathrm{v}^2 a^3{}_{22} + \mathrm{v}^3 a^2{}_{33}) d\tau \\
&-d\tau \cdot \nu^2 = \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 - \mathrm{v}^1 q + \mathrm{v}^2 p) + \\
&+ (\mathrm{v}^1 a^3{}_{11} + \mathrm{v}^2(a^3{}_{12} - a^1{}_{23}) - \mathrm{v}^3 a^1{}_{33})\, d\tau \\
&-d\tau \cdot \nu^3 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1 r - \mathrm{v}^3 p) + \\
&+ (-\mathrm{v}^1 a^2{}_{11} + \mathrm{v}^2 a^1{}_{22} + \mathrm{v}^3(a^1{}_{23} - a^2{}_{13}) d\tau, \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

где $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ –элемент объема в каждой положительно ориентированной карте U.

Так как на поверхности полной энергии имеют место равенства $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}(\cos\sigma \vec{e}_1 + \sin\sigma \vec{e}_2)$, $\vec{\nu} = \nu^1 \vec{e}_1 + \nu^2 \vec{e}_2$, то уравнения компонентов вихря будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&-d\tau \cdot \nu^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}\, sin\sigma + \mathrm{v}\, cos\sigma\, d\sigma + \mathrm{v}\, cos\sigma\, r) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-\mathrm{v} cos\sigma \cdot \\
&\cdot q + \mathrm{v}\, sin\sigma\, p) + (\mathrm{v}\, cos\sigma(a^2{}_{13} - a^3{}_{12}) - \mathrm{v}\, sin\sigma\, a^3{}_{22})\, d\tau \\
&-d\tau \cdot \nu^2 = \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}\, cos\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, d\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, r) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (
\end{aligned}
$$

$- \quad \mathrm{v}\, cos\sigma\, q + \mathrm{v}\, sin\sigma\, p) + (\mathrm{v}\, cos\sigma\, a^{3}{}_{11} + \mathrm{v}\, sin\sigma\,(a^{3}{}_{12} - a^{1}{}_{23}))d\tau$

$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}\, cos\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, d\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, r) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}\, sin\sigma +$

$+ \mathrm{v}\, cos\sigma\, d\sigma + \mathrm{v}\, cos\sigma\, r) + (-\mathrm{v}\, cos\sigma\, a^{2}{}_{11} + \mathrm{v}\, sin\sigma\, a^{1}{}_{22})\, d\tau.$

Последние равенства перепишем в следующем виде:

$$-d\tau \cdot \frac{v^1}{\mathrm{v}} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \sin\sigma + \cos\sigma(d\sigma + r)) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (-q\cos\sigma +$$

$$+ p\sin\sigma) + (\cos\sigma(a_{13}^2 - a_{12}^3 - \sin\sigma a_{22}^3) d\tau$$

$$-d\tau \cdot \frac{v^2}{\mathrm{v}} = \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \cos\sigma - \sin\sigma(d\sigma + r)) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (q\cos\sigma -$$

$$- p\sin\sigma) + (\cos\sigma a_{11}^3 + \sin\sigma(a_{12}^3 - a_{23}^1)) d\tau$$

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \cos\sigma - \sin\sigma(d\sigma + r)) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \sin\sigma +$$

$$+ \cos\sigma(d\sigma + r)) + (-\cos\sigma\ a_{11}^2 + \sin\sigma\ a_{22}^1) d\tau \qquad (2.36)$$

Из равенства (2.29) запишется уравнение неразрывности потока крови в следующем виде:

$(d\mathrm{v}^1 - \mathrm{v}^2 r + \mathrm{v}^3 q) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^1 \mathrm{r} - \mathrm{v}^3 \mathrm{p}) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (d\mathrm{v}^3 -$

$- \quad \mathrm{v}^1 \mathrm{q} + \mathrm{v}^2 \mathrm{p}) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}^K a^1{}_{K1} + \mathrm{v}^K a^2{}_{K2} + \mathrm{v}^K a^3{}_{K3}) d\,\tau = 0.$

С учетом представления вектора скорости через базисные векторы, последнее равенство примет вид:

$(d\mathrm{v}\, cos\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, d\sigma - \mathrm{v}\, sin\sigma\, r) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}\, sin\sigma + \mathrm{v}\, cos\sigma\, d\sigma +$

$+ \mathrm{v}\, cos\sigma\, r) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (-\mathrm{v}\, cos\sigma\, q + \mathrm{v}\, sin\sigma\, p) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}\, sin\sigma\, a^{1}{}_{21} +$

$+ \mathrm{v}\, cos\sigma\, a^{2}{}_{12} + \mathrm{v}\, cos\sigma\, a^{3}{}_{13} + \mathrm{v}\, sin\sigma\, a^{3}{}_{23})\, d\tau = 0.$

Или

$$(\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} cos\sigma - sin\sigma\,(d\sigma + r)) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} sin\sigma + cos\sigma\,(d\sigma + r)) \wedge$$

$$\wedge\, \omega^3 \wedge \omega^1 + (p\, sin\sigma - q\, cos\sigma) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}\, cos\sigma(a^{2}{}_{12} + a^{3}{}_{13}) +$$

$$+ \mathrm{v}\, sin\sigma\,(a^{1}{}_{21} + a^{3}{}_{23}))\, d\tau = 0.$$

Учитывая равенства (2.22), получим $a^{2}_{12} = a^{3}_{13} = a^{1}_{12} = a^{3}_{23} = 0$. Тогда:

$$\left(\frac{d\text{v}}{\text{v}}\cos\sigma - \sin\sigma(d\sigma + r)\right)\wedge\omega^2\wedge\omega^3 + \left(\frac{d\text{v}}{\text{v}}\sin\sigma + \cos\sigma(d\sigma + r)\right)\wedge$$

$$\wedge\,\omega^3\wedge\omega^1 + (p\sin\sigma - q\cos\sigma)\wedge\omega^1\wedge\omega^2 = 0 \qquad (2.37)$$

Если рассмотреть движение крови по геодезическим линиям ($d\sigma + r = 0$) поверхностей постоянной полной энергии, то равенства (2.36) и (2.37) будут иметь вид:

$$-\frac{\nu^1}{\text{v}} = q_2\cos\sigma - p_2\sin\sigma + \cos\sigma(a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin\sigma\cdot a^3_{22}$$

$$-\frac{\nu^2}{\text{v}} = -q_1\cos\sigma + p_1\sin\sigma + \cos\sigma\, a^{3}_{11} + \sin\sigma(a^{3}_{12} - a^{1}_{23})$$

$$0 = -\cos\sigma\, a^{2}_{11} + \sin\sigma\, a^{1}_{22} \qquad (2.38)$$

$$0 = p_3\sin\sigma - q_3\cos\sigma$$

5.3. Основные кинематические уравнения

Пусть точка *x* описывает линию, ортогональную к векторам поля $\vec{e}_3$ и пусть

$$\frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \frac{\vec{k}}{m}, \quad (\vec{e}_3\frac{d\vec{x}}{ds} = 0).$$

Рассмотрим понятие нормальной кривизны поля в данной точке, принадлежащей карте U. Для этого рассмотрим:

$$\frac{\vec{k}\vec{e}_3}{m} = -\frac{d\vec{x}d\vec{e}_3}{ds^2} = -\frac{(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2)(q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2 + \omega^1 a^2_{31}\vec{e}_2 + \omega^2 a^1_{32}\vec{e}_1)}{ds^2} =$$

$$= -\frac{(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2)((q + \omega^2 a^1_{32})\vec{e}_1 - (p - \omega^1 a^2_{31})\vec{e}_2)}{ds^2} =$$

$$= -\frac{\omega^1(q + \omega^2 a^1_{32}) - \omega^2(p - \omega^1 a^2_{31})}{ds^2} = \frac{-q_1(\omega^1)^2 + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})\omega^1\omega^2}{ds^2} +$$

$$+\frac{p_2(\omega^2)^2}{ds^2} = p_2\sin^2\sigma + (p\ \ - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})\sin\sigma\cdot\cos\sigma - q_1\cos^2\sigma,$$

где $\cos\sigma = \dfrac{\omega^1}{ds}, \quad \sin\sigma = \dfrac{\omega^2}{ds}.$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \frac{-q_1(\omega^1)^2 + (p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)\omega^1\omega^2 + p_2(\omega^2)^2}{ds^2} = p_2 \sin^2\sigma +$$

$$+(p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)\sin\sigma \cdot \cos\sigma - q_1\cos^2\sigma \qquad (3.1)$$

будет кривизной линии, главная нормаль которой совпадает с вектором $\vec{e}_3$. Это выражение назовем нормальной кривизной поля в данной точке карты U. Из равенства (3.1) видно, что компоненты разложения векторов $\vec{e}_{23}$ и $\vec{e}_{13}$ по векторам репера R_x – a^1_{23} и a^2_{31} входят в выражение для нормальной кривизны поля.

Рассмотрим конгруэнцию линий, являющихся интегральными линиями или линиями тока векторного поля $\vec{e}_3$, то вектор кривизны такой линии будет:

$$\left(\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)_{\substack{\omega^1=0\\ \omega^2=0}} = \frac{\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_{33}}{ds} = \frac{q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2 + \omega^3(a_{33}^1\vec{e}_1 + a_{33}^2\vec{e}_2)}{ds} =$$

$$= \frac{q_3\omega^3\vec{e}_1 - p_3\omega^3\vec{e}_2 + \omega^3(a_{33}^1\vec{e}_1 + a_{33}^2\vec{e}_2)}{ds} = (q_3 + a_{33}^1)\vec{e}_1 - (p_3 - a_{33}^2)\vec{e}_2.$$

Проекция вектора кривизны на направление скорости крови примет вид:

$$((q_3 + a_{33}^1)\vec{e}_1 - (p_3 - a_{33}^2)\vec{e}_2)\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}} = (q_3 + a_{33}^1)\cos\sigma - (p_3 - a_{33}^2)\sin\sigma.$$

Примем:

$$L = p_2 \sin^2\sigma + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})\sin\sigma\cos\sigma - q_1 \cos^2\sigma$$

$$N = (p_3 - a^2_{33}) \sin\sigma - (q_3 + a^1_{33}) \cos\sigma \qquad (3.2)$$

Чтобы удовлетворить гемодинамическим уравнениям (2.36) и (2.37), примем:

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = t\omega^1 + g\omega^2 + \left(L + \frac{f^{\backslash}}{S\mathrm{v}^2}\right)\omega^3$$

$$d\sigma + r = (g + N\sin\sigma)\omega^1 - (t + N\cos\sigma)\,\omega^2 + u\,\omega^3, \qquad (3.3)$$

где t, g, u – функции, которые выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (3.3). Кроме уравнений (3.3) найдем еще условия для выполнения гемодинамических уравнений (2.36) и (2.37). Проверим выполнимость уравнения (2.37). Для этого подставим равенства из (3.3) в (2.37):

$$(t\omega^1 \cos\sigma - \sin\sigma(g + N\sin\sigma)\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (g\omega^2 \sin\sigma - \cos\sigma(t +$$

$$+ N\cos\sigma)\omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p_3\ \omega^3 \sin\sigma - q_3\ \omega^3 \cos\sigma \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

$$(t\cos\sigma - \sin\sigma(g + N\sin\sigma))d\tau + (g\sin\sigma - \cos\sigma(t + N\cos\sigma))d\tau +$$

$$+ (p_3 \sin\sigma - q_3 \cos\sigma)d\tau = 0$$

$$t\cos\sigma + \sin\sigma\, g - N\sin^2\sigma + g\sin\sigma - t\cos\sigma - N\cos^2\sigma + p_3 \sin\sigma -$$

$$- q_3 \cos\sigma = 0$$

$$- \quad N + p_3 \sin\sigma - q_3 \cos\sigma = 0.$$

После подстановки значений для N, будем иметь:

$$(q_3 + a^1_{33})\cos\sigma - (p_3 - a^2_{33}) \sin\sigma + p_3 \sin\sigma - q_3 \cos\sigma = 0$$

$$a^1_{33} \cos\sigma + a^2_{33} \sin\sigma = 0 \qquad (*)$$

На основании равенства (*) можно сделать вывод в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. Уравнение неразрывности потока крови будет выполняться тогда и только тогда, когда верно равенство (*).

Найдем условие выполнения третьего уравнения из (2.36). Для этого подставим равенства (3.3) в это уравнение:

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (g\omega^2 \cos\sigma + \sin\sigma(t + N\cos\sigma)\omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (t\omega^1 \cdot$$

$$\cdot \sin\sigma + \cos\sigma(g + N\sin\sigma)\omega^1) + (-\cos\sigma\, a^2_{11} + \sin\sigma\, a^1_{22})d\tau.$$

Сокращая на $d\tau$, запишем:

$$g\cos\sigma + \sin\sigma(t + N\cos\sigma) - t\sin\sigma - \cos\sigma(g + N\sin\sigma) - \cos\sigma\, a^2_{11} +$$

$$+ \sin\sigma\, a^1_{22} = 0$$

$$-\cos\sigma\, a^2_{11} + \sin\sigma\, a^1_{22} = 0 \qquad (**)$$

И, наконец, найдем условие выполнимости первого и второго уравнений из (2.36). Для этого подставим равенства (2.3) в эти уравнения:

$$-d\tau\cdot\frac{\nu^1}{\text{v}}=\omega^1\wedge\omega^2\wedge((L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\omega^3\sin\sigma+\cos\sigma u\omega^3)+\omega^1\wedge\omega^3\wedge$$

$$\wedge(-q_2\omega^2\cos\sigma+p_2\omega^2\sin\sigma)+(\cos\sigma(a^2_{13}-a^3_{12})-\sin\sigma a^3_{22})d\tau$$

$$-d\tau\cdot\frac{\nu^2}{\text{v}}=\omega^2\wedge\omega^1\wedge((L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\omega^3\cos\sigma-\sin\sigma u\omega^3)-\omega^2\wedge\omega^3\wedge$$

$$\wedge(q_1\omega^1\cos\sigma-p_1\omega^1\sin\sigma)+(\cos\sigma a^3_{11}+\sin\sigma(a^3_{12}-a^1_{23})d\tau$$

или

$$-\ d\tau\cdot\frac{\nu^1}{\text{v}}=(L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\ \sin\sigma\, d\tau+u\ \cos\sigma\, d\tau+q_2\cos\sigma\, d\tau-p_2\sin\sigma\, d\tau+$$

$$+\ (\cos\sigma\,(a^2{}_{13}-a^3{}_{12})-\sin\sigma\, a^3{}_{22})d\tau$$

$$-d\tau\cdot\frac{\nu^2}{\text{v}}=-(L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\cos\sigma\, d\tau+u\ \sin\sigma\, d\tau-q_1\cos\sigma\, d\tau+p_1\sin\sigma\, d\tau+$$

$$+\ (\cos\sigma\, a^3{}_{11}+\sin\sigma\,(a^3{}_{12}-a^1{}_{23})d\tau.$$

После сокращения первого уравнения на $d\tau$, а второго на - $d\tau$, получим:

$$-\frac{\nu^1}{\text{v}}=(L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\sin\sigma+u\cos\sigma+q_2\cos\sigma-p_2\sin\sigma+\cos\sigma\,(a^2{}_{13}-a^3{}_{12})-$$

$$-\ \sin\sigma\, a^3{}_{22}$$

$$\frac{\nu^2}{\text{v}}=(L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\cos\sigma-u\sin\sigma+q_1\cos\sigma-p_1\sin\sigma-\cos\sigma\, a^3{}_{11}-$$

$$-\sin\sigma(a^3{}_{12}-a^1{}_{23}).$$

Далее, первое уравнение умножим на $\sin\sigma$, *а* второе на $\cos\sigma$, запишем:

$$-\frac{\nu^1}{\text{v}}\sin\sigma=(L+\frac{f^\backslash}{S\text{v}^2})\sin^2\sigma+u\cos\sigma\sin\sigma+q_2\cos\sigma\sin\sigma-p_2\sin^2\sigma+$$

$$+\cos\sigma\sin\sigma\,(a^2{}_{13}-a^3{}_{12})-\sin^2\sigma\, a^3{}_{22} \qquad (3.4)$$

$$\frac{\nu^2}{v} cos\sigma = (L + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2}) cos^2\sigma - u\, sin\sigma\, cos\sigma + q_1 cos^2\sigma - p_1 sin\sigma\, cos\sigma -$$

$$- cos^2\sigma\, a^3_{11} - cos\sigma\, sin\sigma (a^3_{12} - a^1_{23})$$

Деля обе части равенства $S \cdot v(- \nu^1 sin\sigma + \nu^2 cos\sigma) = f^{/}(S)$ на Sv^2, получим:

$$- \frac{\nu^1}{v} sin\sigma + \frac{\nu^2}{v} cos\sigma = \frac{f^{\backslash}}{Sv^2} \qquad (3.5)$$

Сложив первое и второе уравнения из (3.4), запишем:

$$- \frac{\nu^1}{v} sin\sigma + \frac{\nu^2}{v} cos\sigma = L + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2} + (q_2 - p_1) cos\sigma\, sin\sigma - p_2 sin^2\sigma +$$

$$+ cos\sigma\, sin\sigma (a^2_{13} - 2a^3_{12} + a^1_{23}) - sin^2\sigma\, a^3_{22} + q_1 cos^2\sigma -$$

$$- a^3_{11} cos^2\sigma.$$

С учетом первого равенства из (3.2), последнее перепишется:

$$- \frac{\nu^1}{v} sin\sigma + \frac{\nu^2}{v} cos\sigma = p_2 sin^2\sigma + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31}) sin\sigma\, cos\sigma -$$

$$- q_1 cos^2\sigma + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2} - (p_1 - q_2 - a^2_{13} - a^1_{23}) cos\sigma\, sin\sigma - 2 a^3_{12} cos\sigma \cdot$$

$$\cdot sin\sigma - p_2 sin^2\sigma + q_1 cos^2\sigma - a^3_{22} sin^2\sigma - a^3_{11} cos^2\sigma = \frac{f^{\backslash}}{Sv^2} -$$

$$- 2 a^3_{12} cos\sigma\, sin\sigma - a^3_{22} sin^2\sigma - a^3_{11} cos^2\sigma.$$

Тем самым равенство (3.5) будет верно тогда и только тогда, когда

$$2 a^3_{12} cos\sigma\, sin\sigma + a^3_{22} sin^2\sigma + a^3_{11} cos^2\sigma = 0 \qquad (***)$$

Соотношение (***) также будет условием для выполнения первого и второго уравнений из (2.36).

Для удовлетворения кинематических уравнений, наряду с (3.3) мы должны принять и условия (*), (**) и (***). Окончательно будем иметь:

$$\frac{dv}{v} = t\omega^1 + g\omega^2 + (L + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2})\omega^3$$

$$d\sigma + r = (g + N\sin\sigma)\omega^1 - (t + N\cos\sigma)\omega^2 + u\omega^3$$

$$a^1{}_{33}\cos\sigma + a^2{}_{33}\sin\sigma = 0 \qquad (3.6)$$

$$a^2{}_{11}\cos\sigma - a^1{}_{22}\sin\sigma = 0$$

$$a^3{}_{11}\cos^2\sigma + 2a^3{}_{12}\cos\sigma\sin\sigma + a^3{}_{22}\sin^2\sigma = 0$$

На основании равенств (3.6) сделаем вывод: для выполнения уравнений неразрывности потока крови, а также уравнений для компонент вихревого вектора необходимо и достаточно выполнение условий (3.6).

Так как при движении крови по геодезическим, расположенным на поверхностях постоянной полной энергии, будут выполняться условия $\frac{dv}{v} = 0$ и $d\sigma +$ $+ r = 0$. Тогда из равенств (3.3) получим:

$$t = g = 0, L + \frac{f^\backslash}{Sv^2} = 0$$

$$g + N\sin\sigma = 0, t + N\cos\sigma = 0, u = 0.$$

Из первых условий $t = g = 0$ будем иметь $N\sin\sigma = 0$ и $N\cos\sigma = 0$. Возведя в квадрат последние равенства и складывая их, получим $N = 0$.

На основании последних рассуждений, имеем:

$$(p_3 - a^2{}_{33})\sin\sigma - (q_3 + a^1{}_{33})\cos\sigma = 0.$$

Учитывая последнее равенство из (2.38), получим:

$$a^2{}_{33}\sin\sigma + a^1{}_{33}\cos\sigma = 0 \qquad (3.7)$$

При написании равенств (3.3) не одно из кинематических уравнений, то есть уравнений (2.36) и (2.37), тождественно не выполняется. Выберем эти равенства таким образом, чтобы удовлетворить какому-либо из кинематических уравнений. Примем, вначале, что при выборе выражений для $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ удовлетворилось третье уравнение из (2.36). Тогда примем:

$$\frac{dv}{v} = (t + a^1_{22})\,\omega^1 + (g + a^2_{11})\omega^2 + \left(L + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2}\right)\omega^3$$

$$d\sigma + r = (g + N\sin\sigma)\omega^1 - (t + N\cos\sigma)\omega^2 + \zeta\omega^3 \qquad (3.8)$$

Проверим это:

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge ((g + a^2_{11})\omega^2 \cos\sigma + \sin\sigma(t + N\cos\sigma)\omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge$$

$$\wedge((t + a^1_{22})\omega^1 \sin\sigma + \cos\sigma(g + N\sin\sigma)\omega^1) + (-\cos\sigma\, a^2_{11} +$$

$$+\sin\sigma\, a^1_{22})\, d\tau$$

$$0 = (g + a^2_{11})\cos\sigma\, d\tau + \sin\sigma(t + N\cos\sigma)\, d\tau - \sin\sigma(t + a^1_{22})d\tau -$$

$$- \cos\sigma(g + N\sin\sigma)\, d\tau + (-\cos\sigma\, a^2_{11} + \sin\sigma\, a^1_{22})\, d\tau$$

$$0 \equiv 0.$$

Найдем условие для выполнения равенства (2.37). Для этого подставим равенства (3.8) в (2.37):

$$((t + a^1_{22})\omega^1 \cos\sigma - \sin\sigma(g + N\sin\sigma)\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + ((g + a^2_{11})\cdot$$

$$\cdot\omega^2 \sin\sigma - \cos\sigma(t + N\cos\sigma)\omega^2) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (p_3\omega^3 \sin\sigma - q_3\omega^3\cos\sigma) \wedge$$

$$\wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = 0$$

$$(t + a^1_{22})\cos\sigma\, d\tau - \sin\sigma(g + N\sin\sigma)\, d\tau + (g + a^2_{11})\sin\sigma\, d\tau -$$

$$- \cos\sigma(t + N\cos\sigma)\, d\tau + p_3 \sin\sigma\, d\tau - q_3\cos\sigma\, d\tau = 0\,.$$

После сокращения на $d\tau$, запишем:

$$(t + a^1_{22})\cos\sigma - \sin\sigma(g + N\sin\sigma) + (g + a^2_{11})\sin\sigma - \cos\sigma(t +$$

$$+ N\cos\sigma) + p_3\sin\sigma - q_3\cos\sigma = 0.$$

Отсюда имеем:

$$a^1_{22}\cos\sigma - N\sin^2\sigma + a^2_{11}\sin\sigma - N\cos^2\sigma + p_3\sin\sigma - q_3\cos\sigma = 0.$$

С учетом второго равенства из (3.2), будем иметь:

$$a^1_{22}\cos\sigma + (q_3 + a^1_{33})\cos\sigma - (p_3 - a^2_{33})\sin\sigma + a^2_{11}\sin\sigma +$$

$$+ p_3\sin\sigma - q_3\cos\sigma = 0$$

$$(a^1{}_{22} + a^1{}_{33})\cos\sigma + (a^2{}_{11} + a^2{}_{33})\sin\sigma = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

Условие (I) является необходимым и достаточным условием для выполнения уравнения (2.37).

Найдем условие для выполнения первых двух равенств из (2.36). Для этого подставим равенства (3.8) в эти уравнения:

$$-d\tau\cdot\frac{\nu^1}{\mathrm{v}} = \omega^1\wedge\omega^2\wedge((L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\omega^3\sin\sigma + \cos\sigma\,\zeta\omega^3) + \omega^1\wedge\omega^3\wedge$$

$$\wedge(-q_2\omega^2\cos\sigma + p_2\omega^2\sin\sigma) + (\cos\sigma(a^2{}_{13} - a^3{}_{12}) - \sin\sigma\, a^3{}_{22})\,d\tau$$

$$-d\tau\cdot\frac{\nu^2}{\mathrm{v}} = \omega^2\wedge\omega^1\wedge((L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\omega^3\cos\sigma - \sin\sigma(\zeta\omega^3)) - \omega^2\wedge\omega^3\wedge$$

$$\wedge(q_1\omega^1\cos\sigma - p_1\,\omega^1\sin\sigma) + (\cos\sigma\, a^3{}_{11} + \sin\sigma(a^3{}_{12} - a^1{}_{23}))d\tau.$$

Эти два равенства перепишем в виде:

$$-\ d\tau\cdot\frac{\nu^1}{\mathrm{v}} = (L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\sin\sigma\, d\tau + \zeta\cos\sigma\, d\tau + q_2\cos\sigma\, d\tau - p_2\sin\sigma\, d\tau +$$

$$+ (\cos\sigma(a^2{}_{13} - a^3{}_{12}) - \sin\sigma\, a^3{}_{22})\, d\tau$$

$$-\ d\tau\cdot\frac{\nu^2}{\mathrm{v}} = -(L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\cos\sigma\, d\tau + \zeta\sin\sigma\, d\tau - q_1\cos\sigma\, d\tau +$$

$$+ p_1\sin\sigma\, d\tau + (\cos\sigma\, a^3{}_{11} + \sin\sigma(a^3{}_{12} - a^1{}_{23}))d\tau.$$

После сокращения первого уравнения на $d\tau$, а второго на $-d\tau$, получим:

$$-\frac{\nu^1}{\mathrm{v}} = (L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\sin\sigma + \zeta\cos\sigma + q_2\cos\sigma - p_2\sin\sigma + (\cos\sigma\, a^2{}_{13} -$$

$$- a^3{}_{12}) - \sin\sigma\, a^3{}_{22}$$

$$\frac{\nu^2}{\mathrm{v}} = (L + \frac{f^\backslash}{S\mathrm{v}^2})\cos\sigma - \zeta\sin\sigma + q_1\cos\sigma - p_1\sin\sigma - \cos\sigma\, a^3{}_{11} -$$

$- \sin\sigma (a^3_{12} - a^1_{23})$

Умножая первое уравнение на $\sin\sigma$, а второе на $\cos\sigma$ и складывая их, будем получать:

$$- \frac{\nu^1}{\text{v}}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{\text{v}}\cos\sigma = (L + \frac{f^{\backslash}}{S\text{v}^2})\sin^2\sigma + \zeta\cos\sigma\sin\sigma + q_2\cos\sigma\sin\sigma -$$

$$- p_2\sin^2\sigma + \cos\sigma\sin\sigma(a^2_{13} - a^3_{12}) - \sin^2\sigma\, a^3_{22} + (L + \frac{f^{\backslash}}{S\text{v}^2})\cos^2\sigma -$$

$$- \zeta\cos\sigma\sin\sigma + q_1\cos^2\sigma - p_1\sin\sigma\cos\sigma - \cos^2\sigma\, a^3_{11} - \cos\sigma\sin\sigma\cdot$$

$$\cdot(a^3_{12} - a^1_{23})$$

или

$$- \frac{\nu^1}{\text{v}}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{\text{v}}\cos\sigma = L + \frac{f^{\backslash}}{S\text{v}^2} + q_2\cos\sigma\sin\sigma - p_2\sin^2\sigma + \cos\sigma\sin\sigma\cdot$$

$$\cdot(a^2_{13} - a^3_{12}) - a^3_{22}\sin^2\sigma + q_1\cos^2\sigma - p_1\sin\sigma\cos\sigma - a^3_{11}\cos^2\sigma -$$

$$- \cos\sigma\sin\sigma(a^3_{12} - a^1_{23}).$$

С учетом первого равенства из (3.2), последнее равенство перепишется:

$$- \frac{\nu^1}{\text{v}}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{\text{v}}\cos\sigma = p_2\sin^2\sigma + (p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})\sin\sigma\cos\sigma -$$

$$- q_1\cos^2\sigma + \frac{f^{\backslash}}{S\text{v}^2} - (p_1 - q_2 - a^2_{31} - a^1_{32})\sin\sigma\cos\sigma - p_2\sin^2\sigma -$$

$$-2a^3_{12}\cos\sigma\sin\sigma - a^3_{22}\sin^2\sigma + q_1\cos^2\sigma - a^3_{11}\cos^2\sigma.$$

Отсюда имеем:

$$- \frac{\nu^1}{\text{v}}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{\text{v}}\cos\sigma = \frac{f^{\backslash}}{S\text{v}^2} - a^3_{11}\cos^2\sigma - 2a^3_{12}\cos\sigma\sin\sigma - a^3_{22}\sin^2\sigma.$$

С учетом формулы (3.5), первые два уравнения из системы (2.36) выполняются тогда и только тогда, когда

$$a^3_{11}\cos^2\sigma + 2a^3_{12}\cos\sigma\sin\sigma + a^3_{22}\sin^2\sigma = 0 \qquad \text{(II)}$$

Тем самым, при выборе $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ для удовлетворения указанным выше кинематическим уравнениям, должны принять равенства (I) и (II):

$$(a^1{}_{22} + a^1{}_{33})\cos\sigma + (a^2{}_{11} + a^2{}_{33})\sin\sigma = 0$$

$$a^3{}_{11}\cos^2\sigma + 2a^3{}_{12}\cos\sigma\sin\sigma + a^3{}_{22}\sin^2\sigma = 0 \qquad (3.9)$$

Разрешим систему (3.9) относительно $\cos\sigma$ и $\sin\sigma$, при условии неравенства первого нулю, получаем для удовлетворения кинематических уравнений одно условие:

$$a^3_{11} - 2a^3_{12}\frac{a^1_{22} + a^1_{33}}{a^2_{11} + a^2_{33}} + a^3_{22}\left(\frac{a^1_{22} + a^1_{33}}{a^2_{11} + a^2_{33}}\right)^2 = 0 \qquad (3.10)$$

Если рассмотреть движение крови по геодезическим, лежащих на поверхностях постоянной полной энергии, то к равенствам (2.38), в этом случае, из равенств (3.8) добавятся следующие (из условий $\frac{dv}{v} = 0$ и $d\sigma + r = 0$):

$$t + a^1{}_{22} = 0, \qquad g + a^2{}_{11} = 0, \qquad L + \frac{f^\backslash}{Sv^2} = 0$$

$$g + N\sin\sigma = 0, \quad t + N\cos\sigma = 0, \quad \zeta = 0 \qquad (3.11)$$

Из равенств (3.11) получаем:

$$N^2 = (a^2{}_{11})^2 + (a^1{}_{22})^2 \qquad (3.12)$$

Равенство (3.12) заменяет равенства, стоящие в первом и втором столбцах соотношений из (3.11).

Пусть теперь $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ выбраны таким образом, что выполняется уравнение неразрывности потока крови, то есть уравнение (2.37). В этом случае положим:

$$\frac{dv}{v} = (t + a^1_{22})\omega^1 + (g + a^2_{11})\omega^2 + (L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\omega^3$$

$$d\sigma + r = (g + a^2_{11} + a^2_{33} + N\sin\sigma)\omega^1 - (t + a^1_{22} + a^1_{33} + N\cos\sigma)\omega^2 + \\ + \zeta\omega^3 \qquad (3.13)$$

Проверим тождественную выполнимость уравнения (2.37). Для этого подставим значения для $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ из (3.13) в (2.37):

$$((t + a^1_{22})\omega^1\cos\sigma - \sin\sigma(g + a^2_{11} + a^2_{33} + N\sin\sigma)\omega^1)\wedge\omega^2\wedge\omega^3 + \\ + ((g + a^2_{11})\omega^2\sin\sigma - \cos\sigma(t + a^1_{22} + a^1_{33} + N\cos\sigma)\omega^2)\wedge\omega^3\wedge\omega^1 + \\ + (p_3\omega^3\sin\sigma - q_3\omega^3\cos\sigma)\wedge\omega^1\wedge\omega^2 = 0$$

или

$$(t + a^1_{22})\cos\sigma\, d\tau - \sin\sigma(g + a^2_{11} + a^2_{33} + N\sin\sigma)\, d\tau + (g + \\ + a^2_{11})\sin\sigma\, d\tau - \cos\sigma(t + a^1_{22} + a^1_{33} + N\cos\sigma)\, d\tau + (p_3\sin\sigma - \\ - q_3\cos\sigma)d\tau = 0.$$

После сокращения на $d\tau$ и после приведения подобных слагаемых, будем иметь:

$$a^2_{33}\sin\sigma + N + a^1_{33}\cos\sigma - p_3\sin\sigma + q_3\cos\sigma = 0.$$

Подставим значение для N из (3.2) в последнее равенство и после чего получим:

$$a^2_{33}\sin\sigma + (p_3 - a^2_{33})\sin\sigma - (q_3 + a^1_{33})\cos\sigma + a^1_{33}\cos\sigma - p_3\sin\sigma + \\ + q_3\cos\sigma = 0.$$