Отсюда видно, что равенство (2.37), при выборе $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ как в (3.13), выполняется тождественно.

Найдем условие для выполнения третьего равенства из (2.36). Для этого подставим равенства (2.13) в это равенство. Получим:

$$0 = \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge ((g + a^2{}_{11})\omega^2 \cos\sigma + \sin\sigma(t + a^1{}_{22} + a^1{}_{33} + N\cos\sigma)\omega^2 +$$

$$+ \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge ((t + a^1{}_{22})\omega^1 \sin\sigma + \cos\sigma(g + a^2{}_{11} + a^2{}_{33} + N\sin\sigma)\omega^1) +$$

$$+ (-\cos\sigma\, a^2{}_{11} + \sin\sigma\, a^1{}_{22})\, d\tau$$

или

$$0 = (g + a^2{}_{11})\cos\sigma\, d\tau + \sin\sigma(t + a^1{}_{22} + a^1{}_{33} + N\cos\sigma)\, d\tau - (t +$$

$$+ a^1{}_{22})\sin\sigma\, d\tau - \cos\sigma(g + a^2{}_{11} + a^2{}_{33} + N\sin\sigma)\, d\tau + (-\cos\sigma\, a^2{}_{11} +$$

$$+ \sin\sigma\, a^1{}_{22})\, d\tau.$$

После сокращения обеих частей на $d\tau$ и приведения подобных, будем иметь:

$$(a^1{}_{33} + a^1{}_{22})\sin\sigma - (a^2{}_{11} + a^2{}_{33})\cos\sigma = 0 \qquad \text{(a)}$$

Таким образом, третье равенство из (2.36) выполняется тогда и только тогда, когда верно равенство (а). И, наконец, найдем условие для выполнения первых двух равенств из (2.36). Для этого подставим соотношения (3.13) в эти уравнения.

$$-\ d\tau \cdot \frac{\nu^1}{v} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge ((L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\omega^3 \sin\sigma + \cos\sigma\,\zeta\,\omega^3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge$$

$$\wedge(-q_2\omega^2 \cos\sigma + p_2\omega^2 \sin\sigma) + (\cos\sigma(a^2{}_{13} - a^3{}_{12}) - \sin\sigma\, a^3{}_{22})\, d\tau$$

$$-d\tau \cdot \frac{\nu^2}{v} = \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge ((L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\omega^3 \cos\sigma - \sin\sigma\,\zeta\,\omega^3) - \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge$$

$$\wedge (q_1\omega^1 \cos\sigma - p_1\omega^1 \sin\sigma) + (\cos\sigma\, a^3{}_{11} + \sin\sigma(a^3{}_{12} - a^1{}_{23}))\, d\tau$$

или

$$-\ d\tau \cdot \frac{\nu^1}{v} = (L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\sin\sigma\, d\tau + \zeta\cos\sigma\, d\tau + q_2\cos\sigma\, d\tau - p_2 \sin\sigma\, d\tau +$$

$$+ (\cos\sigma (a^2_{13} – a^3_{12}) - \sin\sigma\, a^3_{22})\, d\tau$$

$$- \ d\tau\cdot \frac{\nu^2}{v} =-(L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\cos\sigma\, d\tau + \zeta \sin\sigma\, d\tau - q_1 \cos\sigma\, d\tau + p_1 \sin\sigma\, d\tau +$$

$$+ (\cos\sigma\, a^3_{11} + \sin\sigma (a^3_{12} – a^1_{23}))d\tau.$$

Сокращая первое уравнение на элемент объема, а второе на эту же величину, но с противоположным знаком, получим:

$$- \ \frac{\nu^1}{v} = (L + \frac{f^\backslash}{Sv^2})\sin\sigma + \zeta \cos\sigma + q_2 \cos\sigma - p_2 \sin\sigma + \cos\sigma (a^2_{13} –$$

$$- \ a^3_{12}) -\sin\sigma\, a^3_{22}$$

$$\frac{\nu^2}{v} = (L + \frac{f^\backslash}{Sv^2}) \cos\sigma - \zeta \sin\sigma + q_1 \cos\sigma - p_1 \sin\sigma - \cos\sigma\, a^3_{11} –$$

$$- \ \sin\sigma(a^3_{12} – a^1_{23}).$$

Умножим первое уравнение на $\sin\sigma$, а второе на $\cos\sigma$ и сложив эти два равенства, будем иметь:

$$- \ \frac{\nu^1}{v}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{v}\cos\sigma = L + \frac{f^\backslash}{Sv^2} + q_2 \cos\sigma \sin\sigma - p_2\sin^2\sigma + \cos\sigma \sin\sigma \cdot$$

$$\cdot (a^2_{13} – a^3_{12})- \sin^2\sigma\, a^3_{22} + q_1 \cos^2\sigma - p_1 \sin\sigma \cos\sigma - \cos^2\sigma\, a^3_{11} –$$

$$- \ \sin\sigma \cos\sigma (a^3_{12} – a^1_{23}).$$

С учетом равенств (3.2), последнее равенство примет вид:

$$- \ \frac{\nu^1}{v}\sin\sigma + \frac{\nu^2}{v}\cos\sigma = \frac{f^\backslash}{Sv^2} - 2\, a^3_{12} \ \sin\sigma \cos\sigma - a^3_{22} \sin^2\sigma -$$

$$- \ a^3_{11} \cos^2\sigma.$$

Учитывая равенство (3.5), последнее равенство будет верно тогда и только тогда, когда

$$a^3_{11} \cos^2\sigma + 2\, a^3_{12} \cos\sigma \sin\sigma + a^3_{22} \sin^2\sigma = 0 \qquad (б)$$

Если выражения для $\frac{dv}{v}$ и $d\sigma + r$ имеют вид (3.13), то кинематические уравнения будут выполняться тогда и только тогда, когда верны условия (а) и (б), то есть:

$$(a^1_{33} + a^1_{22})\sin\sigma - (a^2_{11} + a^2_{33})\cos\sigma = 0$$

$$a^3_{11}\cos^2\sigma + 2a^3_{12}\cos\sigma\sin\sigma + a^3_{22}\sin^2\sigma = 0 \qquad (3.14)$$

Разрешим систему (3.14) относительно $\cos\sigma$ и $\sin\sigma$ и примем, что первая величина не равна нулю, после чего получим условие для выполнения кинематических уравнений:

$$a^3_{11} + 2a^3_{12}\frac{a^2_{11} + a^2_{33}}{a^1_{33} + a^1_{22}} + a^3_{22}\left(\frac{a^2_{11} + a^2_{33}}{a^1_{33} + a^1_{22}}\right)^2 = 0 \qquad (3.15)$$

Если рассмотреть теперь движение крови по геодезическим, лежащих на поверхностях постоянной полной энергии, то к равенствам (2.38) нужно присоединить, исходя из условий $\frac{dv}{v} = 0$ и $d\sigma + r = 0$, следующие равенства из (3.13):

$$t + a^1_{22} = 0, \quad g + a^2_{11} = 0, \quad L + \frac{f^{\backslash}}{Sv^2} = 0$$

$$g + a^2_{11} + a^2_{33} + N\sin\sigma = 0, \quad t + a^1_{22} + a^1_{33} + N\cos\sigma = 0, \quad \zeta = 0.$$

С учетом равенств, записанных в первой строке, будем иметь:

$$a^2_{33} + N\sin\sigma = 0, \quad a^1_{33} + N\cos\sigma = 0.$$

Откуда

$$N^2 = (a^1_{33})^2 + (a^2_{33})^2 \qquad (3.16)$$

При движении по геодезическим, лежащих на поверхностях постоянной полной энергии, для данного случая будем иметь:

$$\sin\sigma = -\frac{a^2_{33}}{N}, \quad \cos\sigma = -\frac{a^1_{33}}{N}.$$

После подстановки этих равенств в (3.2) получим:

$$N^2 = (q_3 + a^1_{33})a^1_{33} - (p_3 - a^2_{33})a^2_{33} = q_3 a^1_{33} + (a^1_{33})^2 -$$
$$- \; p_3 a^2_{33} + (a^2_{33})^2.$$

С учетом (3.16) из последнего равенства будем иметь:

$$q_3 a^1_{33} - p_3 a^2_{33} = 0 \qquad (3.17)$$

В этом случае к равенствам (2.38) добавляется равенство (3.17).

В уравнениях (3.6) получаем новые неизвестные функции t, g и эти функции выбираются таким образом, чтобы выполнялись условия интегрируемости уравнений (3.6). Нахождение этих функций упрощается, если кровь движется по геодезическим линиям, лежащих на поверхностях постоянной полной энергии. В этом случае $t = - N\cos\sigma$, $g = - N\sin\sigma$ и $u = 0$.

Уравнения (3.6) являются основными кинематическими уравнениями потока крови в субпроективном пространстве и служат исходными уравнениями для изучения потока крови, для которого существуют поверхности постоянной энергии, которые являются интегральными многообразиями для данного репера. В этом случае вектора второго порядка, задающие репер второго порядка, будут симметричны по нижним индексам.

Уравнения (3.6) для случая движения крови по геодезическим, лежащих на поверхностях постоянной полной энергии будут иметь вид:

$$t = 0, \quad g = 0, \quad L + \frac{f^{\backslash}}{S\mathrm{v}^2} = 0$$
$$N = 0, \quad u = 0$$
$$a^1_{33}\cos\sigma + a^2_{33}\sin\sigma = 0$$
$$a^2_{11}\cos\sigma - a^1_{22}\sin\sigma = 0$$
$$a^3_{11}\cos^2\sigma + 2a^3_{12}\cos\sigma\sin\sigma + a^3_{22}\sin^2\sigma = 0.$$

5.4. Уравнения Гельмгольца системы кровообращения

Гемодинамические уравнения Гельмгольца для точки x, принадлежащей потоку крови, то есть кровеносному сосуду, для субпроективного пространства запишем в виде:

$$(\vec{\mathrm{v}}\, grad)\vec{v} = (\vec{v}\, grad)\vec{\mathrm{v}}, \qquad (4.1)$$

где скобки обозначают скалярное произведение вектора на оператор «набла». Это уравнение лежит в основе изучения распределения вихрей в сосуде. В репере, связанном с точкой x, принадлежащей окрестности *U*, имеем:

$$(\vec{\mathrm{v}}\ grad)\vec{\nu} = (\vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{grad}\,\nu^1)\vec{e}_1 + (\vec{\mathrm{v}}\ grad\,\nu^2)\vec{e}_2 + (\vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{grad}\,\nu^3)\vec{e}_3.$$

Аналогично

$$(\vec{\nu}\ grad)\vec{\mathrm{v}} = (\vec{\nu}\ grad\ \mathrm{v}^1)\vec{e}_1 + (\vec{\nu}\ grad\ \mathrm{v}^2)\vec{e}_2 + (\vec{\nu}\ grad\ \mathrm{v}^3)\vec{e}_3.$$

Исходя из формулы (2.5), будем иметь:

$$grad\ \nu^A = \frac{e^1 d\nu^A \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\nu^A \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\nu^A \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}$$

и

$$grad\ \mathrm{v}^A = \frac{e^1 d\mathrm{v}^A \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\mathrm{v}^A \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\mathrm{v}^A \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}.$$

На основании последних двух формул, получим:

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathrm{v}}\ grad)\vec{\nu} &= (\mathrm{v}^1 \frac{d\nu^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^2 \frac{d\nu^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^3 \frac{d\nu^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\vec{e}_1 + \\
&+ (\mathrm{v}^1 \frac{d\nu^2 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^2 \frac{d\nu^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \omega^3} + \mathrm{v}^3 \frac{d\nu^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\vec{e}_2 + \\
&+ (\mathrm{v}^1 \frac{d\nu^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^2 \frac{d\nu^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^3 \frac{d\nu^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3})\vec{e}_3 = \\
&= (\mathrm{v}^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}) \wedge d\vec{\nu} = \\
&= \Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge d\vec{\nu},
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_{\vec{\mathrm{v}}} = \mathrm{v}^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \mathrm{v}^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} -$$

билинейная внешняя форма.

Аналогично получим:

$$(\vec{\nu}\ grad)\vec{\mathrm{v}} = \Omega_{\vec{\nu}} \wedge d\vec{\mathrm{v}},$$

где

$$\Omega_{\vec{\nu}} = \nu^1 \frac{\omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \nu^2 \frac{\omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} + \nu^3 \frac{\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} -$$

билинейная внешняя форма.

Равенство (4.1), с учетом последних рассуждений, примет вид:

$$\Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge d\vec{\nu} = \Omega_{\vec{\nu}} \wedge d\vec{\mathrm{v}} \qquad (4.2)$$

Дифференцируя равенство $\vec{\nu} = \nu^A \vec{e}_A$, получим:

$$d\vec{\nu} = (d\nu^A + \nu^B \omega_B^A)\vec{e}_A + \nu^A \omega^B \vec{e}_{AB}.$$

Аналогично

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \omega^B \vec{e}_{AB} \qquad (4.3)$$

Тогда

$$\Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge d\vec{\nu} = \Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge ((d\nu^A + \nu^B \omega_B^A)\vec{e}_A + \nu^A \omega^B \vec{e}_{AB}) = \Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge ((d\nu^A +$$

$$+\nu^B \omega_B^A)\vec{e}_A) + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \nu^A \vec{e}_{AB}.$$

Аналогично получим:

$$\Omega_{\vec{\nu}} \wedge d\vec{\mathrm{v}} = \Omega_{\vec{\nu}}((d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A + \nu^B \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \vec{e}_{AB}.$$

Тогда равенства (4.2) примут вид:

$$\Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge ((d\nu^A + \nu^B \omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \nu^A \vec{e}_{AB} = \Omega_{\vec{\nu}} \wedge ((d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A) +$$

$$+\nu^B \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \vec{e}_{AB}.$$

Тем самым, уравнение (4.2) можно записать в виде трех уравнений:

$$\Omega_{\vec{\mathrm{v}}} \wedge (d\nu^A + \nu^B \omega_B^A) = \Omega_{\vec{\nu}} \wedge (d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A) \qquad (4.4)$$

Равенства (4.4) называются обобщенными уравнениями Гельмгольца и в случае симметричности векторов $\vec{e}_{AB}$ по нижним индексам, совпадают с аналогичными уравнениями в евклидовом пространстве.

Пусть вектор $\vec{e}_3$ является касательным к конгруэнции линий тока крови, то есть $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}\vec{e}_3$. Тогда уравнения Гельмгольца примут вид:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^1 + v^2\omega_2^1 + v^3\omega_3^1) = \Omega_{\bar{v}} \wedge \omega_3^1$$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^1\omega_1^2 + v^3\omega_3^2) = \Omega_{\bar{v}} \wedge \omega_3^2$$

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^3 + v^1\omega_1^3 + v^2\omega_2^3) = \Omega_{\bar{v}} \wedge \frac{d\text{v}}{\text{v}},$$

где принято $\Omega_{\bar{v}} = v^1\omega^2 \wedge \omega^3 + v^2\omega^3 \wedge \omega^1 + v^3\omega^1 \wedge \omega^2$.

Глава 6. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ КРОВООБРАЩЕНИЯ

6.1. Дифференциальные операторы

Рассмотрения в этом параграфе, как и во всей главе 6, будут вестись аналогично работам [184, 185], то есть изучается движение по всей ССС, представляющего собой стационарное движение крови второго вида, для которого не существует поверхностей полной энергии.

Пусть кровь движется турбулентно и из одной точки сосуда в другую частица крови смещается по некоторому пути. В этом случае не существует поверхности, на которых бы располагались линии тока и вихревые линии. Поэтому рассмотрение геометрии такого движения частиц крови удобнее проводить как геометрию движения в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам.

В касательном пространстве к трехмерному субпроективному пространству зададим репер, определяемый точкой $x \in C^3$ и векторами первого и второго порядка. Уравнения перемещения такого репера имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \tag{1.1}$$

где $\vec{e}_{AB}$ - векторы, образующие совместно с векторами первого порядка, репер второго порядка, а также

$$\vec{e}_{AB} \neq \vec{e}_{BA}.$$

Формы $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ являются линейно-независимыми и $\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \neq 0$ и являются структурными параметрами ССС. Дифференциальные формы ω^A и ω^A_B из уравнений (1.1) удовлетворяют уравнениям структуры субпроективного пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B, \quad D\omega^A_B = \omega^K_B \wedge \omega^A_K + R^A_{BKL}\, \omega^K \wedge \omega^L, \qquad (1.2)$$

где R^A_{BKL} – тензор кривизны субпроективного пространства.

В качестве структурной группы этого пространства возьмем ортогональную группу $O(3)$, инвариантные формы которой удовлетворяют уравнениям $\sigma^B_A + \sigma^A_B = 0$, где $\omega^A_B\,(\omega^A = 0) = \sigma^A_B$. Тогда формы ω^A_B также удовлетворяют уравнениям:

$$\omega^A_B + \omega^B_A = 0, \quad \omega^A_A = 0 \qquad (1.3)$$

Найдем выражение для градиента функции φ, дивергенцию и ротора для рассматриваемого субпроективного пространства.

Выражение для градиента функции, как легко видно, будет иметь точно такой же вид, как и в случае евклидова пространства, так и для субпроективного пространства, отнесенного к голономному реперу:

$$grad\ \varphi = \frac{e^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}, \qquad (1.4)$$

где e^1, e^2, e^3 – взаимные векторы к векторам данного репера.

Пусть $\vec{\mathrm{v}}$ - вектор скорости частицы крови, который представим в виде $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^A \vec{e}_A$. Дифференцируя это равенство и используя второе равенство из (1.1), получим:

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^A + \mathrm{v}^B \omega^A_B)\vec{e}_A + \mathrm{v}^A \omega^B \vec{e}_{AB} \qquad (1.5)$$

Будем рассматривать ортогональный репер, для которого все базисные вектора первого порядка являются единичными. Дифференцируя их и используя (1.1), получим:

$$\omega_A^A + \omega^B \vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0.$$

С учетом (1.3) и в виду линейной независимости форм ω^B, из последних равенств получим:

$$\vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0 \qquad (1.6)$$

На основании равенств (1.6) распишем произведения векторов первого и второго порядков:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \vec{e}_{12} = 0 & \vec{e}_2 \vec{e}_{21} = 0 & \vec{e}_3 \vec{e}_{31} = 0 \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{13} = 0 & \vec{e}_2 \vec{e}_{22} = 0 & \vec{e}_3 \vec{e}_{32} = 0 \\ \vec{e}_1 \vec{e}_{11} = 0 & \vec{e}_2 \vec{e}_{23} = 0 & \vec{e}_3 \vec{e}_{33} = 0 \end{array} \qquad (1.7)$$

На основании равенств (1.7), имеем:

$$\vec{e}_{AB} = a_{AB}^K \vec{e}_K \ \ (K \neq A) \qquad (1.8)$$

Обозначим через $d\tau$ - элемент объема. Тогда дивергенцию вектора скорости крови получим, используя теорему Гаусса – Остроградского для объема параллелепипеда, образованного в произвольной точке сосуда или кровеносной системе векторами трех произвольных элементарных перемещений $d_1\vec{x},\ d_2\vec{x},\ d_3\vec{x}$. Тогда $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$ - для ортогонального репера.

После несложных вычислений, которые проводились и ранее, получим:

$$div\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau = d_1\vec{\mathrm{v}}\ d_2\vec{x}\ d_3\vec{x} + d_2\vec{\mathrm{v}}\ d_3\vec{x}\ d_1\vec{x} + d_3\vec{\mathrm{v}}\ d_1\vec{x}\ d_2\vec{x} \qquad (1.9)$$

С учетом (1.8) равенство (1.5) примет вид:

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \omega^B a_{AB}^K \vec{e}_K,\ (K \neq A).$$

Тогда формула (1.9) будет иметь вид:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \; div \; \vec{\mathrm{v}} = \begin{vmatrix} d_1 \mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{1}{\omega}{}^{1}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^1_{KB} \overset{1}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 1) & \overset{2}{\omega}{}^1 & \overset{3}{\omega}{}^1 \\ \mathrm{d}_1 \mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{1}{\omega}{}^{2}_{B} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^2_{KB} \overset{1}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 2) & \overset{2}{\omega}{}^2 & \overset{3}{\omega}{}^2 \\ d_1 \mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{1}{\omega}{}^{3}_{B} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^3_{KB} \overset{1}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 3) & \overset{2}{\omega}{}^3 & \overset{3}{\omega}{}^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} d_2 \mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{2}{\omega}{}^{1}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^1_{KB} \overset{2}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 1) & \overset{3}{\omega}{}^1 & \overset{1}{\omega}{}^1 \\ \mathrm{d}_2 \mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{2}{\omega}{}^{2}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^2_{KB} \overset{2}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 2) & \overset{3}{\omega}{}^2 & \overset{1}{\omega}{}^2 \\ \mathrm{d}_2 \mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{2}{\omega}{}^{3}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^3_{KB} \overset{2}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 3) & \overset{3}{\omega}{}^3 & \overset{1}{\omega}{}^3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} d_3 \mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{3}{\omega}{}^{1}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^1_{KB} \overset{3}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 1) & \overset{1}{\omega}{}^1 & \overset{2}{\omega}{}^1 \\ \mathrm{d}_3 \mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{3}{\omega}{}^{2}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^2_{KB} \overset{3}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 2) & \overset{1}{\omega}{}^2 & \overset{2}{\omega}{}^2 \\ \mathrm{d}_3 \mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \overset{3}{\omega}{}^{3}_{\mathrm{B}} + \mathrm{v}^{\mathrm{K}} a^3_{KB} \overset{3}{\omega}{}^{\mathrm{B}} (K \neq 3) & \overset{1}{\omega}{}^3 & \overset{2}{\omega}{}^3 \end{vmatrix}.$$

После преобразований в правой части, получаем:

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 div \; \vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega^1_B) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega^2_B) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 +$$
$$+(d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega^3_B) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}^{\mathrm{K}} \underset{K \neq A}{a^A_{KA}}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \qquad (1.10)$$

где в последнем слагаемом предполагается вначале сумма по A, а затем сумма по $K \neq A$.

Для нахождения выражения для ротора вектора скорости крови воспользуемся формулой:

$$\iiint rot \vec{\mathrm{v}} \; d\tau = -\oiint [\vec{\mathrm{v}} \; \overrightarrow{d\sigma}],$$

где $\overrightarrow{d\sigma}$ - вектор элемента поверхности.

Применив последнюю формулу к объему $d\tau$, получим:

$$-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{d}\tau = [(\vec{\mathrm{v}}+d_1\vec{\mathrm{v}}),(\overrightarrow{d\sigma_{23}}+d_1\overrightarrow{d\sigma_{23}})]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{32}}]+[(\vec{\mathrm{v}}+d_2\vec{\mathrm{v}}),(\overrightarrow{d\sigma_{31}}+$$
$$+d_2\overrightarrow{d\sigma_{31}})]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{13}}]+[(\vec{\mathrm{v}}+d_3\vec{\mathrm{v}}),(\overrightarrow{d\sigma_{12}}+d_3\overrightarrow{d\sigma_{12}})]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{21}}],$$

где $\overrightarrow{d\sigma_{AB}}=[d_A\vec{x},d_B\vec{x}]$ - элемент поверхности в точке x, образованный векторами, стоящими в скобках, обозначающих их векторное произведение.

Так как $d_1(\overrightarrow{d\sigma_{23}})+d_2(\overrightarrow{d\sigma_{31}})+d_3(\overrightarrow{d\sigma_{12}})=0$, то запишем:

$$-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{d}\tau=[\mathrm{d}_1\vec{\mathrm{v}},[d_2\vec{x},d_3\vec{x}]]+[d_2\vec{\mathrm{v}},[d_3\vec{x},d_1\vec{x}]]+[d_3\vec{\mathrm{v}},[d_1\vec{x},d_2\vec{x}]].$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}_1\vec{x}\{((d\mathrm{v}^{\mathrm{A}}+\mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^A)\wedge\omega^K)_{23}\vec{e}_A\vec{e}_K+(\mathrm{v}^{\mathrm{A}}\omega^B\underset{K\neq A}{a_{AB}^K}\wedge\omega^L)_{23}\vec{e}_K\vec{e}_L\}-$$
$$-d_2\vec{x}\{((d\mathrm{v}^{\mathrm{A}}+\mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^A)\omega^K)_{31}\vec{e}_A\vec{e}_K+((\mathrm{v}^{\mathrm{A}}\omega^B\underset{K\neq A}{a_{AB}^K})\wedge\omega^L)_{31}\vec{e}_K\vec{e}_L\}-$$
$$-d_3\vec{x}\{((d\mathrm{v}^{\mathrm{A}}+\mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^A)\wedge\omega^K)_{12}\vec{e}_A\vec{e}_K+((\mathrm{v}^{\mathrm{A}}\omega^B\underset{K\neq A}{a_{AB}^K})\wedge\omega^L)_{12}\vec{e}_K\vec{e}_L\}$$

или

$$rot\ \vec{\mathrm{v}}\ \mathrm{d}\tau=-\vec{e}_A\omega^A\wedge\omega^B\wedge(d\mathrm{v}^{\mathrm{K}}+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^K)(\vec{e}_B\vec{e}_K)-\vec{e}_A\omega^A\wedge\omega^B\wedge$$
$$\wedge(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\omega^L\underset{S\neq K}{a_{KL}^S})(\vec{e}_B\vec{e}_S) \qquad (1.11)$$

В ортогональном репере равенство (1.11) перепишется в виде:

$$-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau=\vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^2)+\omega^1\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^3)+$$
$$+\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{2\neq K}{a_{K3}^2})-\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{3\neq K}{a_{K2}^3}))+\vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^1\wedge(d\mathrm{v}^1+$$
$$+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^1)+\omega^2\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^3)-\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{1\neq K}{a_{K3}^1})+\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\cdot$$
$$\cdot(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{3\neq K}{a_{K1}^3}))+\vec{e}_3(\omega^3\wedge\omega^1\wedge(d\mathrm{v}^1+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^1)+\omega^3\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^2)+$$
$$+\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{1\neq K}{a_{K2}^1})-\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\underset{2\neq K}{a_{K1}^2})).$$

Так как в случае ортогонального репера имеем $d\tau = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$, то последнее равенство перепишется в виде:

$$-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau = \vec{e}_1(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^3) +$$
$$+d\tau(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{2\neq K}{a_{K3}^2} - \mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{K\neq 3}{a_{K2}^3})) + \vec{e}_2(\omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (d\mathrm{v}^3 +$$
$$+\mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^3) + d\tau(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{3\neq K}{a_{K1}^3} - \mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{1\neq K}{a_{K3}^1})) + \vec{e}_3(\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^1) +$$
$$+\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{L}}\omega_L^2) + d\tau(\mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{1\neq K}{a_{K2}^1} - \mathrm{v}^{\mathrm{K}}\ \underset{2\neq K}{a_{K1}^2})) \qquad (1.12)$$

Как видно из равенства (1.12), выражение для ротора вектора скорости в этом случае сложнее, чем для евклидова пространства и аналогичного выражения, вычисленного в главе 5.

6.2. Моделирование движения крови

Полученные в предыдущем параграфе формулы для градиента, дивергенции и ротора позволяют записать основные уравнения гемодинамики для того случая, когда геометрия ССС ассоциируется с геометрией субпроективного пространства, отнесенного к неголономным реперам.

Ввиду не сжимаемости крови, ее объемный расход через замкнутую поверхность S должен быть равен нулю. Поэтому:

$$div\ \vec{\mathrm{v}} = 0 \qquad (2.1)$$

С учетом (2.1), равенство (1.10) примет вид:

$$(d\,\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega^1{}_B) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\,\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{B}\omega^2{}_B) \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (d\mathrm{v}^3 +$$
$$+\,\mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega^3{}_B) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (\mathrm{v}^K\ \underset{K\neq A}{a_{KA}^A})\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0 \qquad (2.2)$$

Выбирая вектор $\vec{e}_3$ по направлению касательной линии тока, перепишем соотношение (2.2) в виде:

$$\mathrm{v}\,\omega^1{}_3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \mathrm{v}\,\omega^2{}_3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge + (d\,\mathrm{v}) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 +$$
$$+ (\mathrm{v}^K \underset{K \neq A}{a^A_{KA}})\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0.$$

С учетом обозначений $\omega^1{}_3 = -\omega^3{}_1 = q_A\,\omega^A = q\,;\ \omega^3{}_2 = -\,\omega^2{}_3 = p_A\,\omega^A = p,$ последнее перепишется:

$$\mathrm{v}\,q_1\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \mathrm{v}\,p_2\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + d\mathrm{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \mathrm{v}(a^1{}_{31} +$$
$$+ a^2{}_{32})\,\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0$$

или

$$d\mathrm{v} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \mathrm{v}(q_1 - p_2)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \mathrm{v}(a^1{}_{31} + a^2{}_{32})\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0,$$

а также

$$\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = (p_2 - q_1)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - (a^1{}_{31} + a^2{}_{32})\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 .$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\left(\frac{d\ln \mathrm{v}}{\mathrm{ds}}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = (p_2 - q_1 - (a^1{}_{31} + a^2{}_{32}))\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

или

$$\frac{d\ln \mathrm{v}}{\mathrm{ds}} = p_2 - q_1 - (a^1{}_{31} + a^2{}_{32}) \qquad (2.3)$$