

Правая часть равенства (2.3) является средней кривизной векторного поля или средней кривизной линий тока крови. Тем самым получена следующая теорема.

**Теорема 6.1.** В каждой точке потока крови логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруэнций линий тока крови.

Правая часть равенства (2.3) обращается в нуль тогда и только тогда, когда разность  $p_2 - q_1$  равна сумме первой и второй координат векторов второго порядка  $\vec{e}_{31}$  и  $\vec{e}_{32}$  соответственно.

Конгруэнция линий тока в субпроективном пространстве, отнесенного к неголономному реперу, для которой  $p_2 - q_2 - (a^1_{31} + a^2_{32}) = 0$ , назовем минимальной конгруэнцией.

Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 6.2.** Величина скорости потока крови в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам, постоянна вдоль некоторой линии тогда и только тогда, когда данная линия принадлежит минимальной конгруэнции.

Пусть, как всегда, вихревой вектор имеет следующий вид:

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} v^A \vec{e}_A \quad (2.4)$$

Тогда из формулы (1.12) определим компоненты вихря:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega_L^3) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K3}^2 - v^K a_{K2}^3) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega_L^1) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge (dv^3 + v^L \omega_L^3) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K1}^3 - v^K a_{K3}^1) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot v^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (dv^1 + v^L \omega_L^1) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (dv^2 + v^L \omega_L^2) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (v^K a_{K2}^1 - v^K a_{K1}^2). \end{aligned}$$

Направим вектор  $\vec{e}_3$  по касательной линии тока. Тогда последние формулы примут вид:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (\nu \omega^2_3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge d\nu + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (\nu a^2_{33}) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (\nu \omega^1_3) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge d\nu + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (-\nu a^1_{33}) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (\nu \omega^1_3) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (\nu \omega^2_3) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (\nu a^1_{32} - \nu a^2_{31}) \end{aligned}$$

С учетом введенных выше обозначений для форм  $\omega^1_3$  и  $\omega^3_1$ , а также  $\omega^3_2$  и  $\omega^2_3$  и  $d\nu = \nu_A \omega^A$ , запишем:

$$\begin{aligned} -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge (-\nu p_3 \omega^3) + \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \nu_2 \omega^2 + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (\nu a^2_{33}) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^2 &= \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge (\nu q_3 \omega^3) + \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \nu_1 \omega^1 + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (-\nu a^1_{33}) \\ -\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \cdot \nu^3 &= \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge (\nu q_2 \omega^2) + \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge (-\nu p_1 \omega^1) + \\ &+ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 (\nu a^1_{32} - \nu a^2_{31}). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} -\nu^1 &= -\nu p_3 - \nu_2 + \nu a^2_{33} \\ -\nu^2 &= -\nu q_3 + \nu_1 - \nu a^1_{33} \\ -\nu^3 &= \nu q_2 + \nu p_1 + \nu a^1_{32} - \nu a^2_{31} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из последней формулы системы (2.5) получим:

$$\frac{\nu^3}{\nu} = -(q_2 + p_1 + a^1_{32} - a^2_{31}) \tag{2.6}$$

Гауссова кривизна векторного поля  $\vec{e}_3$ , коллинеарного вектору скорости, будет равна:

$$\begin{aligned}
K_g &= -(p_2 - \vec{e}_{32}\vec{e}_2)(q_1 + \vec{e}_{31}\vec{e}_1) - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - \vec{e}_{32}\vec{e}_1 - \vec{e}_{31}\vec{e}_2)^2 = -p_2q_1 + \\
&+ q_1\vec{e}_{32}\vec{e}_2 - p_2\vec{e}_{31}\vec{e}_1 + (\vec{e}_{32}\vec{e}_2)(\vec{e}_{31}\vec{e}_1) - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - \vec{e}_{32}\vec{e}_1 - \vec{e}_{31}\vec{e}_2)^2 = \\
&= -p_2q_1 + q_1(a_{32}^1\vec{e}_1 + a_{32}^2\vec{e}_2)\vec{e}_2 - p_2(a_{31}^1\vec{e}_1 + a_{31}^2\vec{e}_2)\vec{e}_1 + a_{32}^2a_{31}^1 - \frac{1}{4}(p_1 - \\
&- q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)^2 = -p_2q_1 + q_1a_{32}^2 - p_2a_{31}^1 + a_{32}^2a_{31}^1 - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)^2.
\end{aligned}$$

Пусть  $d_1\vec{x}$  и  $d_2\vec{x}$  - два перемещения, ортогональных векторному полю  $\vec{e}_3$ . Рассмотрим отношение объемов параллелепипедов, построенных на тройке  $\vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_1\vec{e}_3, \vec{e}_3 + d_2\vec{e}_3$  и на тройке  $\vec{e}_3, d_1\vec{x}, d_2\vec{x}$  в окрестности  $U$  точки  $x$  субпроективного пространства, отнесенного к неголономным реперам и это отношение назовем полной кривизной поля  $K_t$ . На основании этого запишем:

$$\begin{aligned}
K_t &= \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + d_1\vec{e}_3) \wedge (\vec{e}_3 + d_2\vec{e}_3)}{\vec{e}_3 d_1\vec{x} \wedge d_2\vec{x}} = \\
&= \frac{\vec{e}_3(\vec{e}_3 + (q + \omega^B a_{3B}^1)\vec{e}_1) \wedge (\vec{e}_3 + (-p + \omega^B a_{3B}^2)\vec{e}_2)}{\vec{e}_3 d_1\vec{x} \wedge d_2\vec{x}} = \\
&+ \frac{(p - \omega^B a_{3B}^2) \wedge (q + \omega^B a_{3B}^1)}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \\
&= \frac{(p_1\omega^1 + p_2\omega^2 - \omega^1 a_{31}^2 - \omega^2 a_{32}^2) \wedge (q_1\omega^1 + q_2\omega^2 + \omega^1 a_{31}^1 + \omega^2 a_{32}^1)}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \\
&= \frac{p_1q_2\omega^1 \wedge \omega^2 + p_1a_{32}^1\omega^1 \wedge \omega^2 - p_2q_1\omega^1 \wedge \omega^2 - p_2a_{31}^1\omega^1 \wedge \omega^2 - q_2a_{31}^2\omega^1 \wedge \omega^2 -}{\omega^1 \wedge \omega^2} + \\
&+ \frac{-a_{31}^2a_{32}^1\omega^1 \wedge \omega^2 + q_1a_{32}^2\omega^1 \wedge \omega^2 + a_{31}^1a_{32}^2\omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = p_1q_2 + p_1a_{32}^1 - p_2q_1 - \\
&- p_2a_{31}^1 - q_2a_{31}^2 - a_{31}^2a_{32}^1 + q_1a_{32}^2 + a_{31}^1a_{32}^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
K_t - K_g &= p_1 q_2 + p_1 a_{32}^1 - q_2 a_{31}^2 - a_{31}^2 a_{32}^1 + \frac{1}{4} (p_1 - q_2 - a_{32}^1 - a_{31}^2)^2 = \\
&= \frac{1}{4} (p_1 + q_2 - (a_{31}^2 - a_{32}^1))^2.
\end{aligned}$$

Тем самым будем иметь:

$$\sqrt{K_t - K_g} = \frac{1}{2} |p_1 + q_2 + a_{32}^1 - a_{31}^2|.$$

Сравнивая последнюю формулу с (2.6), получим:

$$\frac{|v^3|}{v} = |q_2 + p_1 + a_{32}^1 - a_{31}^2| = 2\sqrt{K_t - K_g} \quad (2.7)$$

**Теорема 6.3.** Отношение проекции вихря на касательную линии тока крови к величине скорости крови есть инвариант линии тока, который пропорционален квадратному корню из разности полной и гауссовой кривизны линии тока крови.

**Замечание.** Рассмотренные в работе факты можно найти в монографии [215].

## ГЛАВА 7. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ КРОВЕНОСНОЙ СИСТЕМЫ В МЕДИЦИНЕ

### 7. 1. Анализ движения крови при характеристике шумов

По геометрии движения крови в сердце можно характеризовать и сердечные шумы, которые имеют важное значение для оценки гемодинамики и для характеристики клапанного аппарата сердца.

Все шумы сердца делятся на шумы изгнания, обратного тока и шумы накопления. Шумы изгнания возникают в период систолы при сужении клапанных отверстий и бывают желудочковые систолические (стенозы аорты, стеноз легочной артерии) и предсердные систолические (митральный и трикуспидальный стеноз). Шумы обратного тока делятся на желудочковые систолические

(митральная и трикуспидальная недостаточность, дефект межжелудочковой перегородки) и желудочковые диастолические (недостаточность клапанов аорты и легочной артерии).

Стенотическими являются и шумы наполнения, которые возникают при прохождении крови через суженное отверстие в период диастолы. Шумы наполнения подразделяются на желудочковые диастолические (митральный и трикуспидальный стеноз) и предсердные диастолические.

Шумы обратного тока указывают на нагрузку объемом при недостаточности клапанного аппарата сердца. Обратный ток крови может возникать во время систолы желудочков в направлении предсердий, как это имеет место при недостаточности атриовентрикулярных клапанов, а при недостаточности полулунных клапанов аорты – в период диастолы.

Движение крови в сосудах сердца носит, как правило, турбулентный характер. Для изучения движения крови используется неголономная геометрия, которая подразумевает сопоставление такому движению определенного вида распределения и нормальной конгруэнции линий к нему. При исследовании движения крови в сердце в норме – сопоставляется плоское распределение и в качестве нормальной конгруэнции рассматриваются винтовые линии, лежащие на цилиндрических поверхностях. По мере возникновения отклонений изменяются шумы, а также кривизна и кручение винтовых линий. С появлением патологических изменений кривизна и кручение таких линий имеет тенденцию к увеличению, при этом цилиндрические поверхности не изменяются. Шумы носят определенный характер, имеющий тенденцию к усилению такого рода шумов. Но с достижением скорости крови определенного значения, вид движения крови уже нельзя описывать плоским распределением – ему начинает соответствовать неголономное распределение, нормальная конгруэнция для которого имеет расплывчивый вид и его нельзя охарактеризовать какой-либо конкретной конгруэнцией линий. Такая линия может иметь самый произвольный вид в каждой точке сердца. Главное, что здесь следует помнить – это то, что такая линия от-

носится к данному неголономному распределению. Можно говорить об отсутствии в «картинке» движущейся крови нормальной конгруэнции линий. Последняя геометрическая конструкция наиболее далеко стоит от геометрической конструкции в норме и характеризует существенные изменения в гемодинамике сердца.

В зависимости от гемодинамических изменений, вызванных тем или иным пороком сердца, изменяется форма шума, а также геометрическая конструкция для данного вида движения крови. Под геометрической конструкцией здесь понимается геометрический объект, применяемый для изучения данного вида движения: в голономном случае – это поверхность, в каждой точке которой есть касательная плоскость и нормаль; в неголономном случае – распределение и нормаль к нему, интегральные линии которого как могут образовывать конгруэнцию, так и могут не образовывать.

Исследование шумов и тонов сердца на фонокардиограмме дает в руки как исследователя, так и лечащего врача, ценные данные о состоянии геометрической картины движения крови. Степень отклонения этой картины от нормы для дифференциального диагноза пороков сердца, позволяет делать оценку степени анатомического поражения клапанного аппарата сердца и уточнять в каждом отдельном случае особенности внутрисердечной гемодинамики. Корректировка геометрического объекта позволяет выявлять изменения в работе сердечной мышцы или клапанов, которые привели именно к данному геометрическому объекту и переход к геометрическому объекту, соответствующего состоянию в норме, позволяет также проводить корректировку возникших изменений.

Используя разработанную в данной работе геометрию ССС на основе математической модели как в целом, так и ее отдельных частей и используя шумы и тоны сердца можно выявлять на ранней стадии патологические изменения как непосредственно в сердце, так и в кровеносной системе.

Места пульсации кровеносных сосудов, которые не свойственны норме, также могут быть исследованы с помощью геометрической картины движения

крови в данном сосуде. Исследования данного направления позволяют выявлять патологические изменения в сосудах, не пользуясь дорогостоящим медицинским оборудованием, а используя только фонокардиограмму и геометрическую картину, то есть определенному шуму соответствует геометрическая картина движения крови, согласно чему можно говорить о состоянии потока крови в данном сосуде или его участке.

## **7. 2. Анализ состояния сердечно-сосудистой системы с применением дифференциальных форм**

Разработанный математический аппарат позволяет исследовать движение крови в системе кровообращения методами дифференциальной геометрии, используя при этом внешние формы, а также проводить обработку информации для анализа состояния ССС человека. Установление грани между состоянием системы кровообращения в норме и патологии продолжает оставаться одной из первоочередных и трудных задач современной медицины. Решение многих вопросов по обработке информации о состоянии ССС облегчается за счет использования математических моделей. Предлагаемый метод построения математической модели, основанный на структурных изменениях ССС, позволяет наиболее просто решать возникающие задачи, как в рамках всей системы, так и на отдельном ее участке. Выявление структурных изменений в ССС на ранней стадии, которые основаны на геометрии этой системы, позволяет предотвратить многие серьезные отклонения, как в работе сердца, так и в системе сосудов. Поэтому, разработанный в данном исследовании математический аппарат, позволяет изучать геометрию траекторий движения частиц крови и, основываясь на этом, проводить диагностику по выявлению видов движения крови, что способствует расширению представлений в области нормальной и патологической физиологии кровообращения.

Полученная математическая модель является новой в моделировании и является еще одним подтверждением идей И.П. Павлова о возможности точного математического анализа биологических процессов.

Предлагаемая в данной работе модель ССС на основе геометрии субпроективного пространства позволяет сделать первый и вполне очевидный вывод, что активность, а также насосная способность сердца является весьма существенным свойством, роль и значение которого необходимо учитывать и которое ни в коем случае нельзя опускать.

Обработку информации о состоянии ССС, а также выработку соответствующей методологии, проводим на основании математической модели ССС, позволяющей изучать траектории движения частиц крови как в рамках всей системы (субпроективное пространство), так и в отдельном сосуде (евклидово пространство).

Методология обработки информации о состоянии системы кровообращения базируется на геометрии этой системы. Причем, аналогом геометрии системы кровообращения является геометрия субпроективного пространства (один из видов риманова пространства), а геометрия сосуда реализуется в евклидовом пространстве, как частном случае римановой геометрии. Последнее утверждение является подтверждением выводов Вернадского В.И. о том, что геометрией биологической системы является риманова геометрия.

Система кровообращения рассматривается как анатомо-физиологическая подсистема организма, которая обеспечивает транспорт кислорода, углекислого газа, питательных веществ, метаболитов, гормонов, перенос тепла, воды, распространение колебательных движений и т.п. Возможность обработки информации и анализа кровообращения в качестве автономной системы организма, определяется совместностью и определенностью системы уравнений модели относительно ее структурных параметров, характеризующих движение крови. Тогда интегральные линии векторов скорости крови принимаются за траектории движения частиц крови. Сравнение траекторий для данного сосуда в норме

с полученными траекториями, позволяет делать выводы о наличии или же отсутствии патологических изменений в сосуде.

На основании приведенных рассуждений получаем общее представление о рассматриваемом подходе моделирования ССС. При таком подходе математическому описанию подвергается движение крови в замкнутой системе и в отдельно взятом сосуде. Форма описания предполагает разбиение системы кровообращения на подсистемы, в каждой из которых изучается движение крови с использованием геометрии субпроективного или евклидова пространства. При таком получении информации о состоянии ССС все связанные с гемодинамикой функции рассматриваются внутри некоторой области. В совокупности с траекториями движения частиц крови в субпроективном пространстве получается более эффективная обработка информации о состоянии ССС в целом, а при переходе к евклидову пространству получаем эффективный способ по обработке информации в отдельно взятом сосуде. Как показывают подсчеты, приведенные в таблице 1, обработка информации с привлечением разработанного в работе математического аппарата, становится существенно эффективнее. Учитывая первоначальную высокую точность исследования состояния кровотока человека с использованием УЗИ методов, эффективность с использованием данной модели повышается до 12 %. Задача точности исследования кровотока будет тогда сводиться не к увеличению числа параметров, характеризующих движение крови в сосуде или системе кровообращения, а более точного изучения геометрии потока крови.

При получении и обработки информации о состоянии ССС огромное значение отводится модели, которая при этом используется. В модели приходится учитывать наряду с местными биофизическими и биохимическими механизмами и многоуровневую нейрорефлекторную и гормональную регуляции; наряду с полностью автоматическими, генетически обусловленными реакциями существует еще и условнорефлекторный контроль, который обуславливает влияние на функции и состояние ССС психической деятельности, включающей созна-

тельное управление вегетативными процессами. Поэтому моделирование регуляции ССС сопряжено с большими трудностями. Благодаря тому, что в предлагаемой модели исследуются траектории движения крови, которые получаются в результате действия всех факторов, в том числе и приведенных несколько выше, то при получении и обработке информации о состоянии ССС в рамках предлагаемой модели и разработанного математического аппарата, все эти трудности успешно преодолеваются.

Математическое отображение экспериментально установленных или концептуально вводимых отношений по обработке информации состояния ССС, а также анализ полученных результатов выявляет трудности включения в полученные уравнения всех известных параметров, характеризующих движение крови. Здесь необходимо учитывать, что их число быстро возрастает с усовершенствованием методик, технических средств и ростом объема экспериментальных и клинических исследований.

Предлагаемая в работе методология обработки информации с привлечением геометрических характеристик системы кровообращения, позволяет избежать этих сложностей, так как получение необходимой информации о состоянии ССС базируется на траекториях движения частиц крови. Огибающие линии этих траекторий можно проследить, опираясь на ультразвуковое сканирование кровотока с использованием компьютера, на экране монитора. Компьютер снабжается необходимым программным обеспечением:

- акушерская программа «МЧСС» для вычисления мгновенной частоты сердечных сокращений и отображения ее в виде графической зависимости от времени, а также позволяет наблюдать сердечные сокращения, что осуществляет визуальный контроль работы всей системы;
- программа «SPEED» позволяет проводить замер скорости кровотока в венах и артериях и выводить запись диагноза с помощью стандартного окна программы.

Назовем модель ССС, построенную с использованием ее геометрии (геометрии субпроективного пространства), базовой моделью, которая облегчает построение специальных моделей для решения конкретных задач и в основе которой лежит геометрия отдельно взятого участка системы кровообращения.

При таком подходе получение и обработка информации о состоянии системы кровообращения строится на основании геометрических характеристик траекторий движения частиц крови. Это позволяет исследовать свойства системы кровообращения с точки зрения единого подхода функционирования системы, базирующегося на ее структурных свойствах.

При пространственном подходе к моделированию ССС используется тот очевидный факт, что геометрия сосуда представляется геометрией евклидова пространства, которая является частным случаем геометрии субпроективного (как одного из видов римановой геометрии) пространства, то эта проблема преодолевается очевидным образом.

ССС представляется в виде разветвленной сети сосудов, в модели которым соответствуют геодезические линии. В евклидовом пространстве геодезические линии – это прямые, а в субпроективном, в виду кривизны пространства, геодезические будут носить более сложный характер, отражающий структуру сосуда в системе кровообращения. Сердцу в системе кровообращения в модели соответствует неподвижная точка субпроективного пространства.

Всей системе кровообращения в модели соответствует две системы геодезических линий, проходящие через неподвижную точку. Две рассматриваемые системы, представляющие собой большой и малый круги кровообращения, имеют общую точку – неподвижную точку субпроективного пространства (аналог сердца системы кровообращения). Приведенные рассуждения наглядно продемонстрируем в виде блок-схемы модели сердечно-сосудистой системы на рис.17.

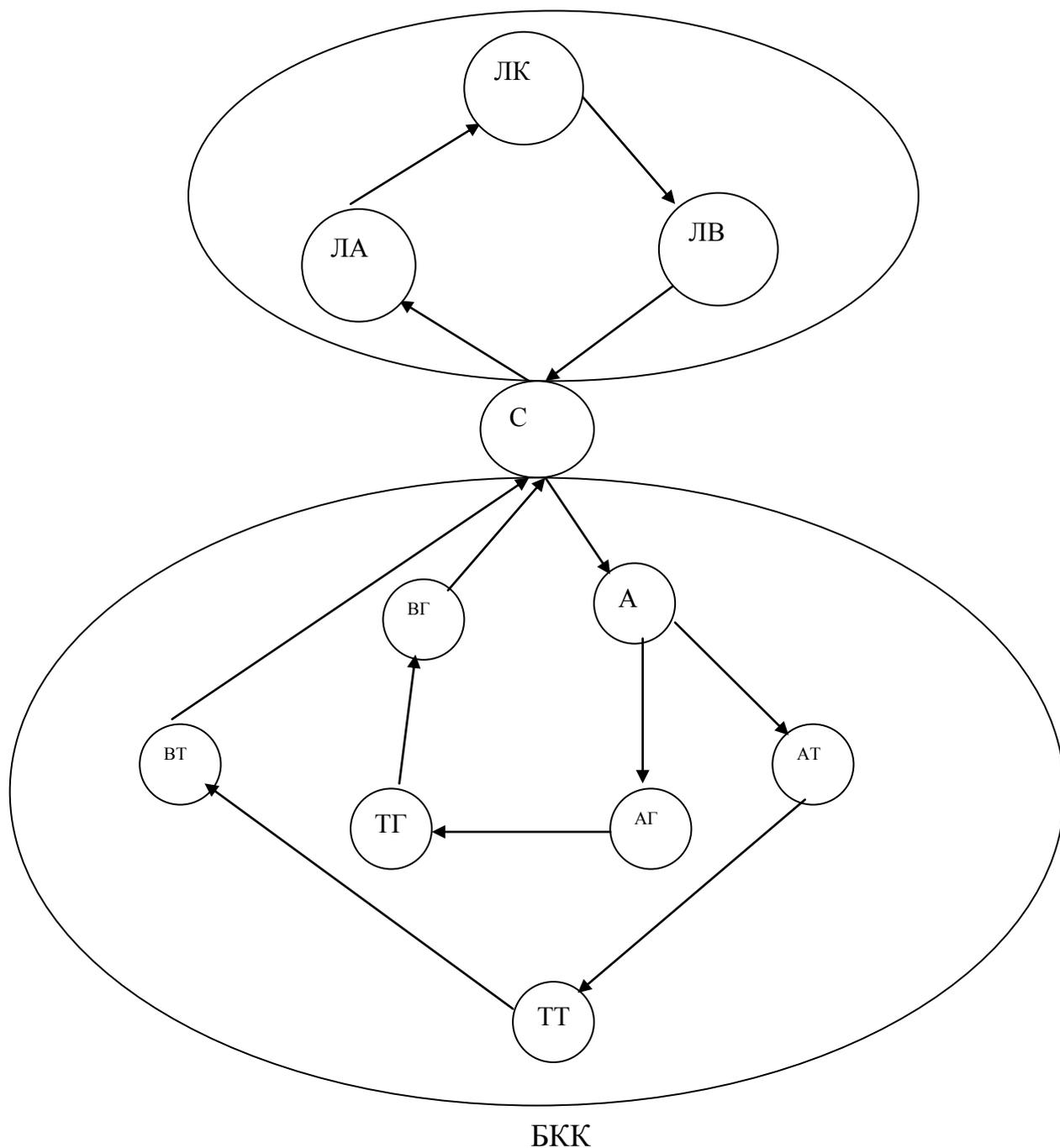


Рис. 17. Блок-схема модели ССС.

Примечания: С – сердце; МКК и БКК – малый и большой круги кровообращения; А – дуга аорты; АГ – артерии, ТТ – капилляры, ВТ – вены нижней части тела и ног; АГ – артерии, ТГ – капилляры, ВГ – вены головы и рук; ЛА – легочная артерия; ЛК – легочные капилляры; ЛВ – легочная вена.

В процессе развития и накопления знаний по физиологии и патофизиологии данная модель может постоянно усовершенствоваться. Разнообразие свойств ССС, возможных гипотез по регуляции и по патологическим изменениям, столь обширно, что отразить их в рамках одной модели довольно сложно. Предлагаемая методология обработки информации по состоянию ССС позволяет это делать, не разрабатывая при этом новой модели для каждой конкретной задачи.

Возможно введение в модель и патофизиологических изменений. Патофизиологические изменения могут быть заданы изменением соответствующих видов движений. При переходе к таким изменениям начинают появляться завихрения, которые не свойственны состоянию участка сосуда или всей системы в норме. Геометрически это представимо тем, что в норме с каждой точкой сосуда связан один геометрический объект, а при патофизиологических изменениях с этой же точкой будет связан другой геометрический объект. Такие переходы как в одну, так и в другую сторону могут быть реализованы в предлагаемой модели с использованием патофизиологических и морфометрических данных клиники.

Подбирая структурные связи, вводя дополнительные геометрические объекты или модифицируя введенные ранее, будем получать геометрические характеристики траекторий движения крови, соответствующие рассматриваемой патологии.

При исследовании движения крови по сосудам каждой точке в норме соответствует геометрический объект, содержащий в себе голономное распределение. Для этого распределения существует поверхность, по которой движется кровь – это поверхности «постоянной энергии». В качестве примера можно привести цилиндры, которые будут поверхностями «постоянной энергии» в случае ламинарного движения крови. Если в точке сосуда движение крови характеризуется геометрическим объектом, содержащим неголономное распределение, то это говорит о наличии изменений и на данном участке сосуда необходима более детальная диагностика. На основании всего сказанного, можно сде-

лать вывод о диагностике состояния ССС при наличии УЗИ аппаратуры, по тому какой геометрический объект соответствует конкретному участку сосудистого русла.

Проводимые научные исследования все более широко находят свое применение в клинической практике. Данная модель, создаваемая для обработки информации о состоянии ССС, необходима и для автоматизации не только исследований по подтверждению характеристик кровотока, но и при диагностике состояния ССС конкретного человека.

Предлагаемая модель и созданный математический аппарат для получения и обработки информации о состоянии ССС позволяет автоматизировать ее диагностику, которая обеспечивает более быстрое обнаружение изменений состояния ССС и предполагает следующее:

- исследования могут быть проведены непосредственно во время лечения больного;
- исследования необходимы для адекватной терапии;
- формализация системы кровообращения, совместно с ее математическим обеспечением, позволяет использовать компьютер для обработки полученных данных в реальном времени;
- исследования по обработке информации о состоянии ССС пациента с предлагаемой методикой могут быть проведены без отрыва врача от его основной работы;
- предлагаемый подход обработки информации основан на сложных и глубоких научных исследованиях, но от практикующего врача он не требует знания всего того, на чем базируется получение и обработка информации (не требуется знание работающего математического обеспечения);
- получение и обработка информации о состоянии ССС человека не приводит к его травмированию.

Сопоставимый анализ известных методов и методов, основанных на применении разработанного в работе математического аппарата, представим в виде следующей таблицы 1.

Таблица 1

**Сопоставимый анализ известных методов и методов с использованием разработанного математического аппарата**

Метод	Стоимость диагностики	Травматичность	Скорость диагностики	Пороги обнаружения изменений	Прогнозируемая стоимость лечения	Прогнозируемое время лечения	Общая эффективность лечения
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	R
Ангиография	1	1	1	$\frac{1}{4}$	1	1	0,03
УЗИ-исследование	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,09
УЗИ-исследование с применением мат. аппарата	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,15

Общая эффективность лечения R считается по формуле:  $R = \frac{1}{\sum_{i=1}^6 a_i x_i}$ . В качестве выравнивающих приняты коэффициенты:  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_3 = 7$ ,  $a_4 = 10$ ,  $a_5 = 6$ ,

$a_6 = 8$ .

Из таблицы видно, что наибольшая эффективность достигается при УЗИ-диагностике ССС с применением математической модели структурных параметров.

### **7.3. Структура автоматизированной системы поддержки принятия решений врачом**

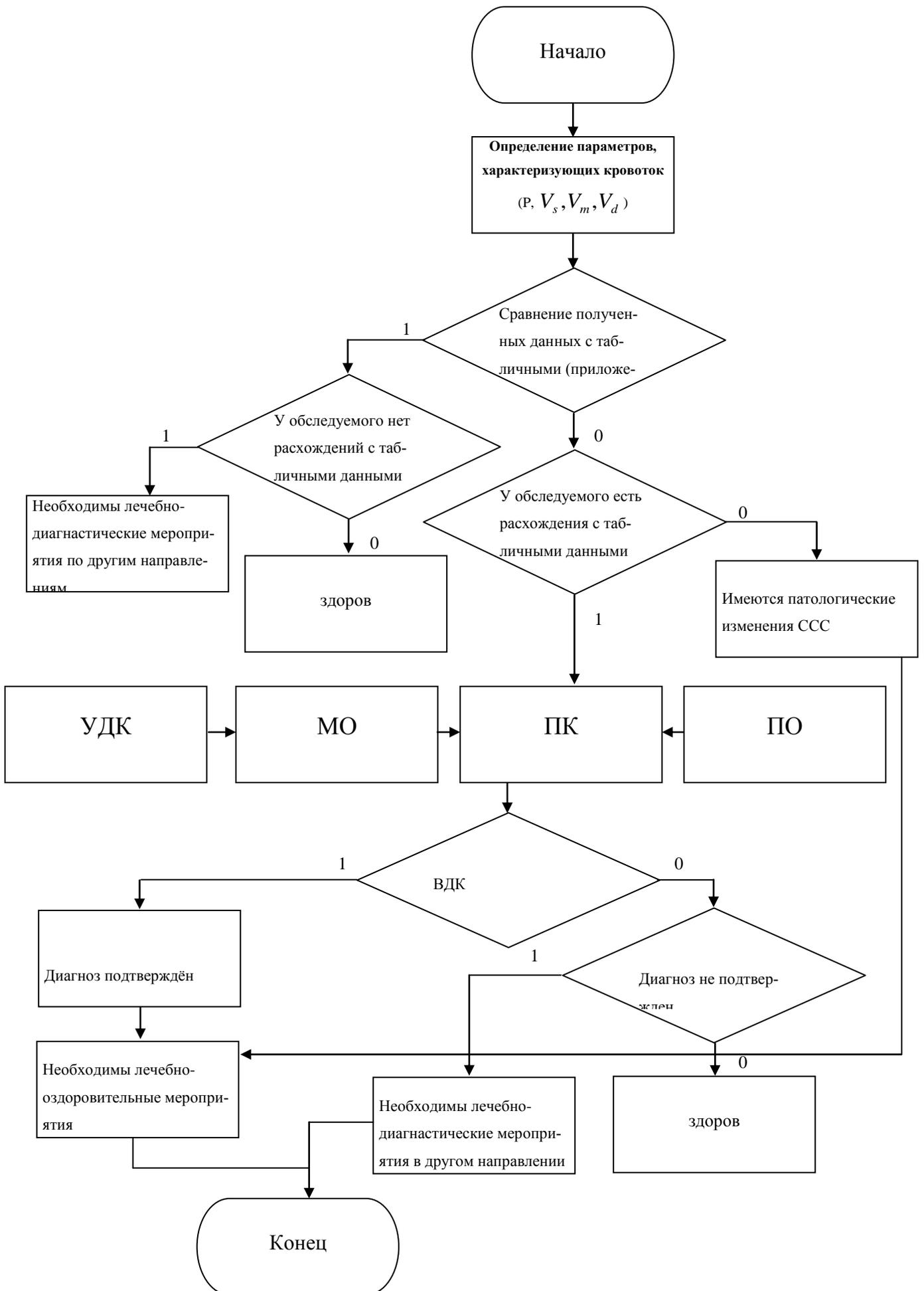
Существующие системы поддержки принятия решений (СППР), содержащие системы по диагностике ССС, не решают на доступном для каждого врача уровне поставленных задач по эффективной и не дорогой диагностике. Поэтому была предложена структура программного и математического обеспечения СППР, включающая в себя не только задачи диагностики, но и поддержку решения задач по прогнозированию, диагностике изменений в ССС.

В системе реализован алгоритм управления процессами контроля и диагностики состояния ССС, схема которого представлена на рис.18. Алгоритм работает следующим образом. Для обследования состояния ССС используется ультразвуковой анализатор. Далее, данные, полученные для обследуемого сравниваются с табличными, которые приведены в приложении 2 (данные для  $PI$ ,  $V_d$ ,  $V_s$ ,  $V_m$ ). Если при сравнении полученных значений скоростей и индексов нет расхождений с табличными, то причину недуга нужно искать в другом или это является условием отсутствия отклонений в ССС. При обнаружении у пациента расхождений с табличными данными либо анализатор подключается к ПК для проведения дальнейших исследований, либо при обнаружении существенных расхождений констатируется наличие патологических изменений в ССС с организацией лечебно-оздоровительных мероприятий. При подключении анализатора к ПК, на экране которого появляется график зависимости кровотока от времени и на основании разработанного в работе математического обеспечения (МО) моделирования кровотока с использованием структурных параметров сосуда, делаются выводы о наличии в сосуде изменений в движении крови. В ос-

нове МО лежат результаты глав 4 и 5, в которых получены геометрические характеристики для ламинарного и турбулентного движений крови. Для математического описания структурных параметров используются геометрические характеристики сосуда и системы. При исследовании геометрических характеристик в МО привлекаются различного вида распределения, дифференцируемые отображения, интегральные линии и т.п. По этим геометрическим характеристикам на экране монитора появляются графики зависимости кровотока от времени и с помощью метода цветового доплеровского картирования приводится анализ частотных спектров. Это позволяет выявлять виды движений крови в сосуде и выделять виды движений, которые не являются для данного сосуда нормой. Применение МО не возможно без полученных уравнений движения крови: из главы 4 – уравнения (2.17), (2.19), (6.27); из главы 5 – уравнения (2.16), (2.37), (3.3), (3.9), (3.14), (3.15), (4.4); главы 6 – уравнения (2.2), (2.3), а также уравнения, в которых выражаются компоненты вихря через скорость: глава 4 – уравнения (2.21), (2.22); глава 5 – уравнения (2.35), (2.36), (2.38), (3.4), (3.6), (3.8); глава 6 – уравнения (1.12), (2.5). Выведенные на экран монитора виды движения крови (ВДК) либо не подтверждают диагноз наличия патологических изменений и необходимы другие лечебно-диагностические мероприятия, либо диагноз подтвержден и необходимо проведение лечебно-оздоровительных мероприятий для ССС.

Отличительной особенностью предлагаемой автоматизированной системы является требование иметь в ее составе ультразвуковой анализатор с нестандартным математическим обеспечением для выявления турбулентного движения на ранней стадии его появления.

Структурная схема предлагаемой системы поддержки принятия решений приведена на рис. 19. В этой системе информация о патологических изменениях в сердечно-сосудистой системе вводится в ПЭВМ с помощью доплеровского фонендоскопа через соответствующие драйверы связей (ДС).



*Рис. 18.* Алгоритм управления процессами контроля и диагностики состояния ССС.

Поступающая внешняя информация структурируется в виде файла исходных данных (ФИД). Далее информация о состоянии ССС из ФИД передается на вход блока традиционного принятия решения (БТПР), работа которого заключается в получении с помощью ДФ числовых характеристик движения крови. Кроме этого на БТПР передается информация об изменениях ССС с интерфейса пользователя.

Далее информация поступает в блок анализа (БА), где анализируется ситуация по поводу расхождения полученных данных с табличными и выносится решение либо на интерфейс пользователя о наличии или отсутствии патологии, либо информация поступает для обработки в блок работы алгоритма управления процессами контроля и диагностики (БРАУПКД) состояния ССС.

По информации, получаемой в результате работы БРАУПКД, блок определения диагноза (БОД) под управлением врача-исследователя формирует параметры для проведения курса лечения.

В базе данных (БД) находится электронные медицинские карты (ЭМК) пациентов, виды движения крови (ВДК) в ССС в норме и патологии, числовые значения для скорости крови, справочные данные по заболеваниям и другая справочная информация.

Из банка модулей движения крови пользователь может извлечь модель турбулентного и ламинарного движений крови. С помощью блока «раскраски» этих моделей (БРМ) получаем светлые цвета для ламинарного и более темные для турбулентного движений крови. Это позволяет наглядно наблюдать за изменением видов движения крови вдоль сосуда и рационально планировать лечение как сосудистых заболеваний, так и сопутствующих заболеваний.

Приведенная схема системы принятия решений сосудистого хирурга (флеболога) позволяет с высокой степенью точности констатировать наличие у пациента патологических изменений в ССС. Результаты данных исследований

были подтверждены квалифицированными врачами с использованием, как дорогостоящей аппаратуры, так и в результате проведения лечебных мероприятий. Более того, получение на экране монитора графиков, характеризующих зависимость кровотока от времени, базируется на разработанном математическом аппарате. Адекватность предлагаемого математического аппарата для моделирования движения крови проводится в три этапа. Первый этап предполагает получение аналитических выражений, совпадающих с общепринятыми теоретическими выкладками и получение известных положений, которые являются следствиями полученных в работе теорем. Второй этап – это проведение экспериментальных исследований для подтверждения возможности применения математической модели структурных параметров в качестве модели и теории, позволяющей решать конкретные медицинские задачи. И третий этап – заключения высококвалифицированных медицинских специалистов.

На основании информации, получаемой от БТПР, БПД и дополнительной информации из БД и со стороны интерфейса пользователей, вырабатываются рекомендации по проведению профилактических, терапевтических или хирургических мероприятий, которые через интерфейс пользователя передаются врачу в качестве рекомендаций по ведению пациента.

В базе данных хранится медицинская карта пациента в электронном виде, в которой находятся его паспортные данные, данные анамнеза, итоги осмотров, опросов, экспериментальных исследований, диагностические заключения и т.д.

С помощью интерфейса пользователя реализуются: отображение видов движений крови на основании разработанного математического обеспечения и выведенных уравнений движения крови (уравнения (2.19), (2.22), (3.30), (6.27) главы 4 и соответствующих уравнений главы 5: (2.16), (2.37), (3.3), (3.9), (3.14), (3.15), (4.4); а также главы 6:(2.2), (2.3)), сопутствующая числовая информация; корректировка характеристик лечебно-оздоровительных мероприятий и т.п.

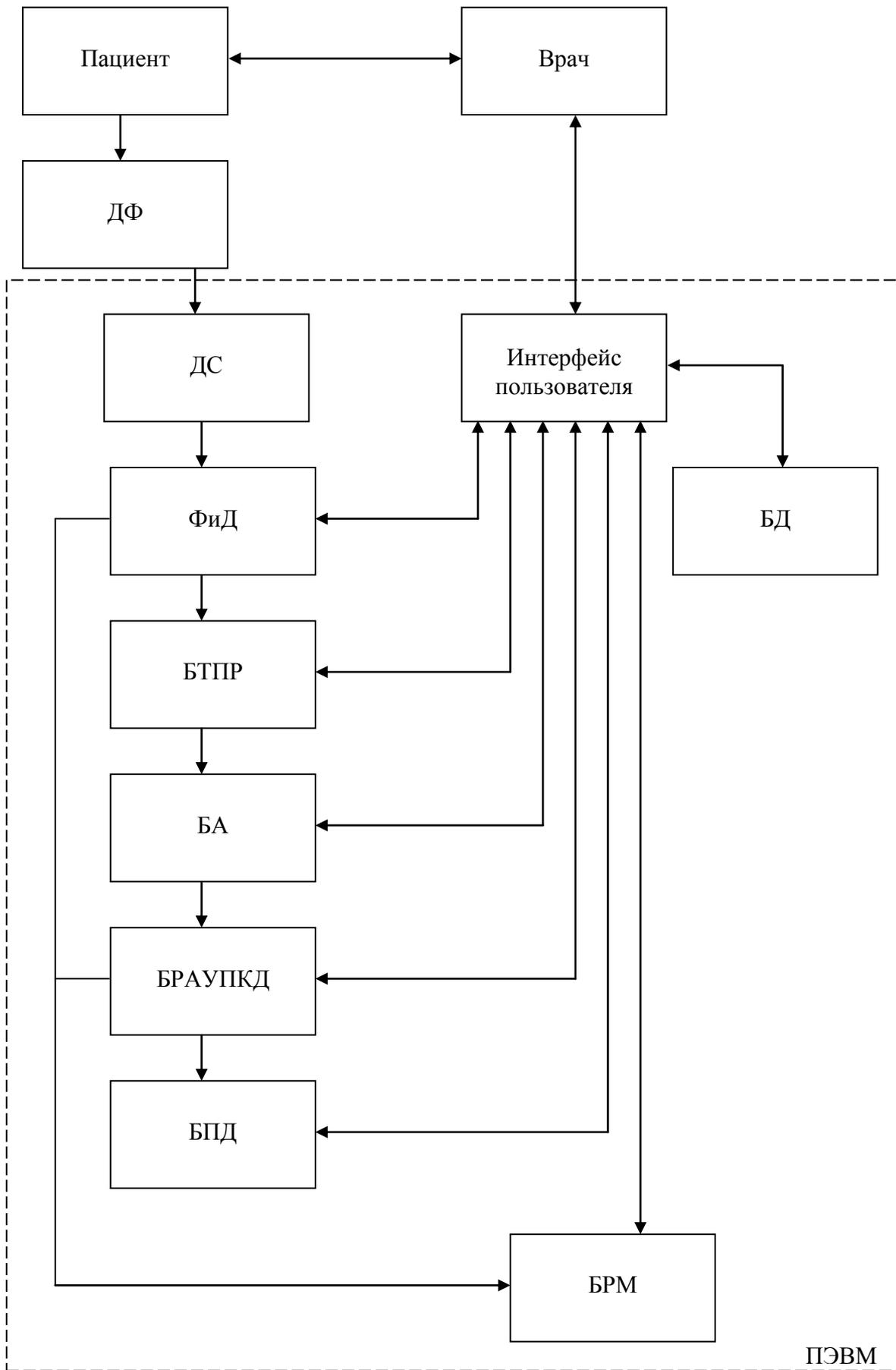


Рис.19. Структурная схема СППР врача сосудистого хирурга (флеболога).

Примечания: ДФ – доплеровский фонендоскоп; ДС – драйвер связи; ФИД – файл исходных данных; БТПР – блок традиционного принятия решения; БА – блок анализа; БРАУПКД – блок работы алгоритма управления процессами контроля и диагностики; БПД – блок постановки диагноза; БД – база данных; БРМ – блок раскраски моделей движений крови.

При эксплуатации программного обеспечения системы поддержки принятия решений (ПОСППР) возможна корректировка параметров решающих правил с целью улучшения их точностных показателей.

#### 7.4. Проверка достоверности моделирования системы кровообращения

Для проверки достоверности и эффективности обнаружения дефектов в системе кровообращения с использованием математической модели структурных параметров ССС на основе геометрии субпроективных пространств по предложенным выше методикам оценки доплерограмм в акушерстве и гинекологии, сосудистой хирургии были обследованы пациенты сосудистого хирурга (флеболога) и женщины, в возрасте от 17 до 41 года, с неосложненным течением беременности и с фетоплацентарной недостаточностью. В ходе наблюдений сформировались два класса обследуемых. Первый класс ( $\omega_0$ ) – люди без признаков патологических изменений в ССС и второй класс ( $\omega_1$ ) – люди, у которых такие изменения обнаружены.

Проверка репрезентативности полученных выборок осуществлялась на основе формулы расчета объема повторных выборок:

$$n = \frac{p(1-p)t_{\Phi}^2}{\delta^2}, \quad (4.1)$$

где  $n$  – число необходимых наблюдений;  $p$  – относительная частота выявления патологических изменений или их отсутствие;  $t_{\Phi} = \Phi(P_{\delta})$ ;  $\Phi(x)$  – функция Лапласа;  $\delta$  – величина ошибки исследования;  $P_{\delta}$  – доверительная вероятность.

Приняв  $\delta = 0,1$ , при доверительных вероятностях 0,96 для первого класса и 0,98 для второго класса. В результате получим, что выборки будут достоверными, если  $n_{\omega_0} = 106$  человек и  $n_{\omega_1} = 112$  человек.

Сначала исследования проводились с использованием ультразвуковых анализаторов без применения разработанной в данной работе модели ССС и математического аппарата.

Взяв контрольные выборки по 150 человек на класс. Для решения поставленных задач обследовались пациенты в возрасте от 20 лет и старше (табл. 2).

Таблица 2

### Возрастная характеристика объекта исследования

Возраст	Первого класса		Второго класса	
	Количество обследуемых	% от общего числа	Количество обследуемых	% от общего числа
20 - 30	20	13	15	10
30 - 40	20	13	20	13
40 - 50	20	13	30	20
50 - 60	40	27	40	27
Старше 60	50	34	45	30
Всего	150	100	150	100

Показатели чувствительности и специфичности на контрольной выборке вычисляются в соответствии с табл. 3.

Таблица 3

### Распределение результатов наблюдений

Обследуемые	Результаты исследований		Всего
	Наличие дефектов	Отсутствие дефектов	
Количество обследуемых класса $\omega_1$ - $n_{\omega_1}$	Истинно (ИП)	Ложно (ЛО)	ИП + ЛО
Количество обследуемых класса $\omega_0$ - $n_{\omega_0}$	Ложно (ЛП)	Истинно (ИО)	ЛП + ИО
Всего	ИП + ЛП	ЛО + ИО	ИП + ЛП + ЛО + ИО

В таблице приняты следующие обозначения:

ИП – истинно-положительный результат, который равен количеству людей с обнаруженными патологическими изменениями в ССС;

ЛП – ложноположительный результат, который соответствует количеству здоровых людей, у которых были обнаружены изменения;

ЛО – ложноотрицательный результат, равный количеству людей с дефектами, у которых дефекты не обнаружены;

ИО – истинно-отрицательный результат, численно равный количеству здоровых людей, у которых дефекты не обнаружены.

Определим основные характеристики для оценки эффективности проводимых исследований.

Диагностическая чувствительность (ДЧ) обнаружения дефектов в системе кровообращения с использованием доплеровских фонендоскопов по отношению к классу  $\omega_1$ , задается отношением количества пациентов с истинно-положительным результатом к количеству больных, т.е.

$$ДЧ = \frac{ИП}{n_{\omega_1}} \quad (4.2)$$

Или в процентном отношении

$$ДЧ = \frac{ИП}{n_{\omega_1}} \cdot 100\% \quad (4.3)$$

Диагностическая специфичность (ДС) обнаружения дефектов ССС по классу  $\omega_0$  есть отношение ИО результатов к количеству здоровых людей:

$$ДС = \frac{ИО}{n_{\omega_0}} \text{ или } ДС = \frac{ИО}{n_{\omega_0}} \cdot 100\% \quad (4.4)$$

Предсказательность (прогностическая значимость) положительных результатов  $ПЗ^+$  определяется формулами:

$$ПЗ^+ = \frac{ИП}{ИП + ЛП} \text{ или } ПЗ^+ = \frac{ИП}{ИП + ЛП} \cdot 100\% \quad (4.5)$$

Предсказательность (прогностическая значимость) отрицательных результатов ПЗ<sup>-</sup> задается формулами:

$$\text{ПЗ}^- = \frac{\text{ИО}}{\text{ЛО} + \text{ИО}} \quad \text{или} \quad \text{ПЗ}^- = \frac{\text{ИО}}{\text{ЛО} + \text{ИО}} \cdot 100\% \quad (4.6)$$

Диагностическая эффективность (ДЭ) определяется равенствами:

$$\text{ДЭ} = \frac{\text{ИП} + \text{ИО}}{\text{ИП} + \text{ЛП} + \text{ЛО} + \text{ИО}} \quad \text{или} \quad \text{ДЭ} = \frac{\text{ИП} + \text{ИО}}{\text{ИП} + \text{ЛП} + \text{ЛО} + \text{ИО}} \cdot 100\% \quad (4.7)$$

Для контрольных выборок полученные результаты представлены в таблице 4.

Таблица 4

**Распределение результатов обнаружения дефектов в ССС доплеровскими фонендоскопами**

Обследуемые	Результаты исследований		Всего
	Наличие дефектов	Отсутствие дефектов	
$n_{\omega 1} = 150$	128	22	150
$n_{\omega 0} = 150$	28	122	150
Всего	156	144	300

На основании данной таблицы находятся введенные выше величины.

Чувствительность равна  $\text{ДЧ} = 128/150 = 0,85$ . Специфичность составляет  $\text{ДС} = 122/150 = 0,81$ . Предсказательность положительных результатов равна  $\text{ПЗ}^+ = 0,82$ . Предсказательность отрицательных результатов  $\text{ПЗ}^- = 0,85$ . Диагностическая эффективность равна  $\text{ДЭ} = (128+122)/300 = 0,83$ .

Сводные показатели качества обнаружения дефектов в ССС с помощью доплеровских фонендоскопов без применения специального математического аппарата представлены в виде таблицы 5.

Таблица 5

**Таблица показателей качества с использованием ультразвуковых анализаторов**

Показатель	ДЧ	ДС	ПЗ <sup>+</sup>	ПЗ <sup>-</sup>	ДЭ
Значение показателя	0,85	0,81	0,82	0,85	0,83

Анализ таблицы 5 показывает хорошее совпадение результатов экспертного оценивания и проверки качества обнаружения дефектов в ССС для ультразвуковых анализаторов.

Дополнительные контрольные выборки были сформированы из людей, у которых исследования по обнаружению дефектов ССС проводились с использованием предложенной в работе модели системы кровообращения с использованием геометрии субпроективных пространств и разработанного математического аппарата. В каждый из классов было отобрано по 110 человек. Для решения поставленных задач обследовались пациенты обоего пола в возрасте от 20 лет и старше (табл. 6).

Таблица 6

**Возрастная характеристика объекта исследования**

Возраст	Первого класса		Второго класса	
	Количество обследуемых	% от общего числа	Количество обследуемых	% от общего числа
20 - 30	5	5	4	4
30 - 40	15	14	16	15
40 - 50	20	18	22	20
50 - 60	30	27	32	29
Старше 60	40	36	36	32
Всего	110	100	110	100

Таблица 7

**Распределение результатов обнаружения дефектов в ССС ультразвуковых анализаторов с использованием методов геометрии субпроективных пространств**

Обследуемые	Результаты исследований		Всего
	Наличие дефектов	Отсутствие дефектов	
$n_{\omega 1} = 110$	105	5	110
$n_{\omega 0} = 110$	7	103	110
Всего	112	108	220

По данным последней таблицы рассчитываются показатели качества обнаружения дефектов ССС на основании обследований пациентов анализаторами с привлечением специально разработанного в данной работе математического аппарата.

$$ДЧ = 105/110 = 0,95$$

$$ПЗ^+ = 105/(105 + 7) = 105/112 = 0,94$$

$$ДС = 103/110 = 0,94$$

$$ПЗ^- = 103/108 = 0,95$$

$$ДЭ = (105 + 103)/(112 + 108) = 208/220 = 0,95$$

Сводная таблица по показателям качества в этом случае представлена табл. 8.

Таблица 8

**Таблица показателей качества с использованием ультразвуковых анализаторов и методов геометрии субпроективных пространств**

Показатель	ДЧ	ДС	ПЗ <sup>+</sup>	ПЗ <sup>-</sup>	ДЭ
Значение показателя	0,95	0,94	0,94	0,95	0,95

Сравнивая таблицы 8 и 5, получаем увеличение показателей качества определения дефектов в ССС при использовании методов геометрии субпроективных пространств, которые приведены в табл. 9.

Сводная таблица показателей качества

Увеличение показателя	$\Delta$ ДЧ	$\Delta$ ДС	$\Delta$ ПЗ <sup>+</sup>	$\Delta$ ПЗ <sup>-</sup>	$\Delta$ ДЭ
Численное значение	0,1 (10%)	0,13 (13%)	0,12 (12%)	0,1 (10%)	0,12 (12%)

Среднее улучшение качества обнаружения дефектов по всем показателям достигает величины 11,4%.

## Глава 8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 8.1. Экспериментальные подтверждения скоростных характеристик кровотока

Ультразвуковые исследования скоростных характеристик кровотока проводились у здоровых женщин, у беременных женщин с нормально протекающей беременностью и с осложненной беременностью. Ультразвуковая доплерография для диагностики поражений артерий дуги аорты проводилась ультразвуковыми анализаторами с датчиками 2,5 МГц и 3,5 МГц.

При работе с ПК автоматически велась запись кривой мгновенного значения частоты сердечных сокращений (МЧСС) и кривой, огибающей скорости кровотока, в реальном масштабе времени. Исследования проходили как в скрининговом режиме, так и при длительном мониторинге пациентов. Для проведения мониторинга использовались специализированные программы при совместной работе прибора и компьютера. Так, например, акушерская программа «МЧСС» предназначена для анализа и отображения информации, поступающей от анализатора. Программа вычисляет МЧСС и отображает ее в виде графической зависимости от времени в течение необходимого времени. Одновременно подсчитываются сердечные сокращения, позволяющие производить визуальный