Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕРДЕЧНО-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ ЧЕЛОВЕКА НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИИ СУБПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Разработка основополагающих положений, используемых при построении модели системы кровообращения, является актуальной задачей, и ее решение позволяет преодолевать трудности, возникающие при формализации ССС. Под основополагающими положениями будем понимать такие свойства и отношения системы кровообращения, значение которых в формировании функции кровообращения выражено довольно сильно.

Перечислим, коротко, такого вида положения и закономерности, которые рассматриваются в моделях кровообращения без учета регуляций кровообращения.

1) Связь между давлением и кровотоком. Эту связь описывают, основываясь, в основном, на уравнениях Навье – Стокса [78].
2) Объем циркулирующей крови постоянен, так как скорость обмена жидкостью между сосудистым руслом и тканями организма намного меньше, чем между различными подсистемами системы кровообращения.
3) Изменение объема крови участка сосудистой системы отражается в разнице между входящими и выходящими потоками. Изменение объемов влечет изменение давлений и потоков.

Рассмотрим идеи, которые используются авторами моделей ССС для их построения и анализа.

1) *Концептуальность* представляет в моделях физиологические характеристики и закономерности в виде общей концепции. Иногда при моделировании ССС явно не формулируются основные идеи построения модели, а автор более подробно математически описывает физические, ультраструктурные, биохимические и другие характеристики. В основном, в моделях ССС отражается кон-

цепция, которая разделяет ССС на «неуправляемую и управляющую» части [42]. При таком подходе выделяется и исследуется часть ССС, деятельность которой определяется характеристиками гемодинамики, а они не зависят от центрального нейрорефлекторного управления. Описание такой части ССС должно включать в себя гидродинамические и геометрические (структурные) взаимоотношения [34, 35].

Нашел свое применение в биологических системах, прежде всего в представлениях об их работе, принцип наименьшего действия. Для системы кровообращения этот принцип применяется для построения энергетического экстремального пути для транспортировки кислорода и информации. В качестве экстремальных путей движения частиц крови выступают геодезические линии.

2) *Детальность моделей.* В работах по моделированию ССС утвердилось понимание того безусловного факта, что модель не может и не должна отображать все стороны системы кровообращения. Наиболее целесообразным, при описании деятельности ССС, является наличие базовой модели, в которой отражаются основные физиологические и биофизические характеристики и закономерности системы, а также способность такой модели к модернизации в рамках решаемой задачи. Тем самым, модель ССС должна не только описывать ее деятельность, но и быть надежным инструментом в теоретических, экспериментальных и клинических исследованиях.

3) *Общность.* При построении моделей ССС довольно-таки часто авторы не уделяют достаточного внимания системному описанию и анализу всей системы. Сравнение моделей, основанных на различных основополагающих положениях, а также преемственность моделей сделали актуальным создание общего математического подхода к моделированию и анализу состояния ССС. При построении математических моделей системы кровообращения не рассматриваются вопросы физиологической полноты, довольно-таки редко анали-

зируется замкнутость и непротиворечивость выдвигаемых моделей. Необходимость сравнения формальных описаний ССС, преемственность моделей, обобщение результатов, полученных в различных моделях, сделали актуальным создание общего математического подхода к описанию и исследованию ССС. В предлагаемой работе показана возможность такого подхода с использованием структурных параметров ССС.

При таком подходе движение частиц крови представляется как движение частиц в определенном пространстве, которое по своим свойствам наиболее подходит к свойствам ССС. При определении такого пространства будем смотреть на систему кровообращения с общих позиций и, при таком подходе, кровеносные сосуды можно представить в виде линий этого пространства, которые сходятся в одной точке. Данной точке в ССС соответствует сердце, а линии данного пространства соответствуют кровеносным сосудам системы кровообращения (рис. 1):

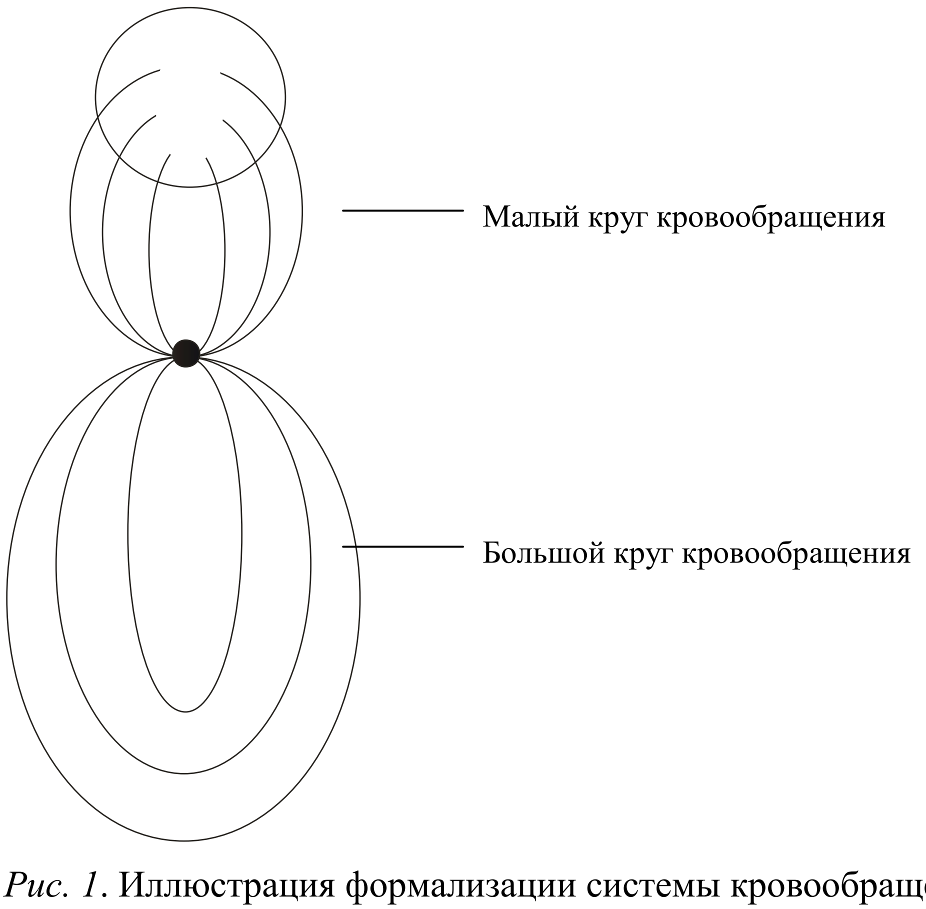

Рис. 1. Иллюстрация формализации системы кровообращения.

Тем самым, установлено взаимнооднозначное соответствие между точками пространства и системой кровообращения. Для выяснения характерных признаков этого пространства приведем вполне понятные, базирующиеся на известных фактах, рассуждения. При рассмотрении конкретного сосуда, должно учитываться его расположение по отношению к сердцу, то есть должно учитываться длина сосудистого русла от сердца до данного сосуда, а в пространстве должна быть известна длина линии от выделенной точки до данной линии. Этим свойством обладает риманово пространство.

Известно, что геодезические римановой метрики являются экстремалями лагранжиана длины, которые отнесены к параметру, пропорциональному длине дуги. В любом римановом пространстве экстремали энергии и длины совпадают. Последний факт является дифференциально-геометрическим отражением принципа наименьшего действия Мопертюи.

Дальнейшее развитие геометрии евклидова и риманова пространства, которое было проведено в данной работе, опиралось на работы многих геометров [79, 83, 84-86, 102, 111, 112, 127-134, 135-138, 140-141, 145-147, 159, 168, 171, 186], а также были учтены результаты по геометрии распределений и дифференцируемых отображений [80, 81, 87-101, 106-111, 114, 117, 118, 120, 122, 123, 127, 169].

Рассматривая геометрию ССС человека и геометрию пространства, являющегося моделью пространства системы кровообращения, проделываем соответствие между геометрией интегральных линий векторного поля скорости крови и геометрии линий пространства-модели. В качестве таких линий, основываясь на принципе наименьшего действия Мопертюи, берутся геодезические линии пространства-модели, являющегося римановым пространством, так как геодезические линии являются экстремалями лагранжианов длины и энергии.

Для дальнейшего выяснения структуры риманова пространства, необходимо иметь в виду тот факт, что сосуды, имея ветвящуюся структуру, сходятся в сердце. В модели пространства кровеносной системы, геодезические линии должны проходить через точку риманова пространства. Последнему свойству ССС удовлетворяет субпроективное пространство, введенное В.Ф. Каганом [83]. Схематично это будет выглядеть следующим образом (рис. 2):

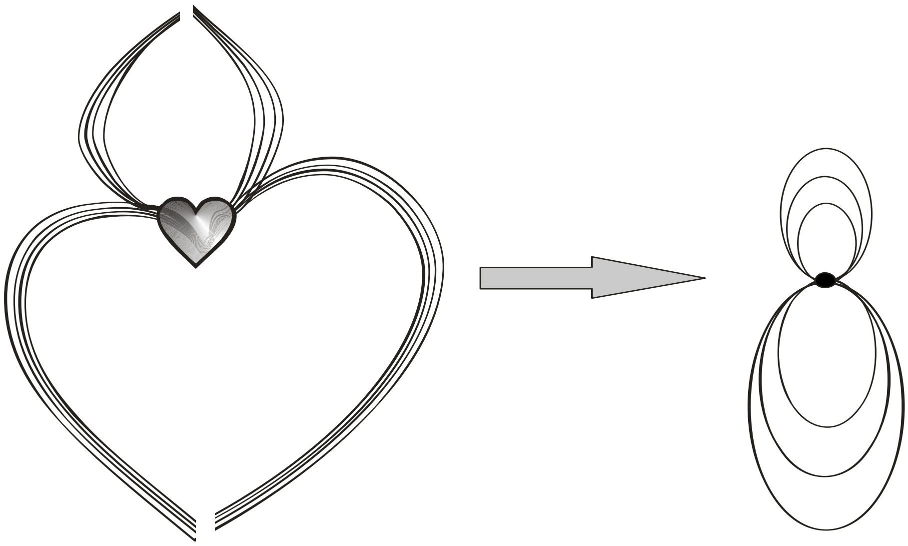

Рис. 2. Иллюстрация соответствия между ССС и субпроективным пространством.

Общим свойством пространств постоянной кривизны является то, что они являются проективными пространствами. Последние характеризуются тем, что у этих пространств всегда существует система координат, в которой геодезические линии задаются линейными уравнениями и при отображении на евклидово пространство, образами геодезических будут прямые линии.

k – кратно проективными В.Ф. Каган [84, 85, 86] называл пространства аффинной связности, геодезические которых в некоторой системе координат выражаются системой из (n – 1) – го уравнения, из которых k линейных уравнений. Для более наглядного представления данного определения можно рассмотреть отображение такого пространства на евклидово. Геодезические линии будут отображаться в линии, находящиеся в (n – k) – мерных плоскостях E_{n-k} евклидова пространства. Под «плоскостью» k – кратного проективного пространства понимается прообраз плоскости E_{n-k}, то есть (n – k) – мерная поверхность, которая в данной системе координат выражается k линейными уравнениями.

При k = n – 2 геодезические будут располагаться на двумерных поверхностях, которые играют роль двумерных плоскостей пространства аффинной связности, если все эти плоскости проходят через некоторую точку или параллельны какому-либо одному направлению, что соответствует бесконечному удалению их общей точки, то пространство называется субпроективным.

Так как геодезические линии субпроективного пространства проходят через некоторую точку, то в качестве предлагаемой модели пространства ССС, будем рассматривать субпроективное пространство. При рассмотрении движения крови по участку сосуда, не имеющего кривизны и представляющего собой прямолинейный участок, будем пользоваться геометрией евклидова пространства.

В сосуде поток крови имеет непрерывный характер, то указанные конгруэнции, поверхности и распределения можно исследовать обычными в дифференциальной геометрии методами. В результате такого подхода будем получать геометрическую картину стационарного потока крови, что до сего времени практически не изучалось и основополагающих работ по данному направлению нет.

Рассматривая движение крови как стационарный поток несжимаемой жидкости, проще отделить структурные характеристики от динамических. Это обстоятельство позволяет проводить математическое моделирование структурных параметров системы кровообращения и исследовать движение крови в ней методом внешних форм, без привлечения динамических характеристик. При этом число параметров, на основании которых исследуется движение крови, сводится к трем базисным дифференциальным формам, а все остальные характеристики выражаются через них и геометрические объекты определенным образом.

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ ПО УЧАСТКУ СОСУДА

2.1. Геометрия распределений

Пусть Δ^{n-1} - гиперраспределение, заданное в некоторой области Ω *n*- мерного евклидова пространства E^n, $(x,\ \xi)$- элемент этого распределения, состоящий из точки $x \in \Omega$ и проходящей через нее гиперплоскости $\xi = \xi\ (x)$. Данная область представляет собой участок сосуда. Присоединим к точке *x* множество всех реперов $R_x = \left\{ x, \vec{e}_i, \vec{e}_n \right\}$, i, j, k = 1,…, n-1 (везде, в дальнейшем, малые латинские буквы будут принимать эти значения), с началом в этой точке и такими, что единичный вектор $\vec{e}_n$ направлен по нормали к гиперплоскости $\xi\ (x)$ в любой точке $x \in \Omega$, а векторы $\vec{e}_i \in \xi\ (x)$.

Уравнения перемещения реперов R_x запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
d\vec{x} &= \omega^i \vec{e}_i + \omega^n \vec{e}_n \\
d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^n \vec{e}_n \\
d\vec{e}_n &= \omega_n^i \vec{e}_i ,
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

при этом учтено, что $\left| \vec{e}_n \right| = 1$.