1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B, D\omega^A_B = \omega^C_B \wedge \omega^A_C, \qquad (1.2)$$

где $A, B, C = 1,\dots,n$ (везде, в дальнейшем, большие латинские буквы будут принимать эти значения). При этом дифференциальные формы $\acute{\omega}^A$ являются базисными, т.е. выступают в качестве основных параметров при моделировании, которые входят в уравнения для характеристики структурных свойств системы кровообращения.

Основная система уравнений, определяющая гиперраспределение Δ^{n-1}, запишется в виде:

$$\omega^n_i = \Lambda_{ij}\, \omega^j + \Lambda_i\, \omega^n \qquad (1.3)$$

Дифференцируя уравнения (1.3) внешним образом и используя уравнения структуры евклидова пространства, получим:

$$(\nabla\Lambda_{ij} - \Lambda_i\, \omega^n_j)\wedge \omega^j + (\nabla\Lambda_i - \Lambda_{ij}\, \omega^j_n)\wedge \omega^n = 0, \qquad (1.4)$$

где

$$\nabla\Lambda_{ij} = d\Lambda_{ij} - \Lambda_{ik}\, \omega^k_j - \Lambda_{kj}\, \omega^k_i,\ \nabla\Lambda_i = d\Lambda_i - \Lambda_j\, \omega^j_i.$$

Применяя к уравнениям (1.4) лемму Картана, запишем:

$$\nabla\Lambda_{ij} - \Lambda_i\, \omega^n_j = \mu_{ijk}\, \omega^k + \mu_{ij}\, \omega^n,$$
$$\nabla\Lambda_i - \Lambda_{ij}\, \omega^j_n = \mu_{ij}\, \omega^j + \mu_i\, \omega^n \qquad (1.5)$$

Закрепляя в уравнениях (1.5) основные параметры, найдем:

$$\nabla_\delta \Lambda_{ij} = 0$$
$$\nabla_\delta \Lambda_i - \Lambda_{ij}\, \pi^j_n = 0, \qquad (1.6)$$

где через δ обозначено дифференцирование по вторичным параметрам и $\pi^A_B = \omega^A_B(\delta)$.

Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \vec{e}_n = 0$, получим:

$$\omega^n_i + \omega^j_n\, g_{ij} = 0 \qquad (1.7)$$

С учетом равенств (1.3), получим:

$$\omega^i_n = -\Lambda^i_j\, \omega^j - \Lambda^i \omega^n, \qquad (1.8)$$

где $\Lambda^i_j = g^{ik} \Lambda_{kj}$ и $\Lambda^I = g^{ij} \Lambda_j$.

Согласно формулам (1.8) – равенства (1.6) примут вид:

$$\nabla_\delta \Lambda_{ij} = 0,$$

$$\nabla_\delta \Lambda_I = 0 \qquad (1.9)$$

Равенства (1.9) показывают, что величины Λ_{ij} образуют геометрический объект типа тензора – основной тензор гиперраспределения Δ^{n-1}, а величины Λ_i образуют геометрический объект типа ковектора.

Любой тензор валентности два можно представить следующим образом:

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{(ij)} + \Lambda_{[ij]}, \qquad (1.10)$$

где $\Lambda_{(ij)} = ½(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})$, $\Lambda_{[ij]} = ½(\Lambda_{ij} - \Lambda_{ji})$.

На основании равенств (1.10) можно рассмотреть классификацию распределений в евклидовом пространстве.

Величины $\theta_{ij} = \Lambda_{[ij]}$ образуют тензор, называемый тензором неголономности гиперраспределения Δ^{n-1}. Гиперраспределение, тензор неголономности которого тождественно равен нулю, называется голономным или вполне интегрируемым, то есть для каждой точки $x \in \Omega$ существует $(n-1)$-мерное интегральное многообразие, проходящее через данную точку. Поверхность V_{n-1} называется интегральным многообразием гиперраспределения Δ^{n-1} , если для любой точки $x \in V_{n-1}$ имеем $\xi(x) = T_x (V_{n-1})$.

Для голономного распределения основной тензор симметричен по нижним индексам:

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji} \qquad (1.11)$$

Если же в равенствах (1.10) $\Lambda_{(ij)} = 0$, то есть основной тензор кососимметричен по нижним индексам:

$$\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}, \qquad (1.12)$$

то имеем следующий случай распределения - плоское.

Асимптотические направления на плоском гиперраспределении определяются системой уравнений:

$$\omega^n = 0, \Lambda_{ij}\,\omega^i\omega^j = 0 \qquad (1.13)$$

В работах Акивиса М.А. доказано, что гиперраспределение является плоским тогда и только тогда, когда оно определяется нуль-системой.

По другой терминологии плоское распределение называют вполне геодезическим, так как для любой геодезической линии из области Ω, касающейся в некоторой своей точке x плоскости $\xi(x)$, она будет интегральной кривой данного распределения.

Для голономного распределения можно выделить случай, когда основной тензор его пропорционален метрическому тензору:

$$\Lambda_{ij} = \mu\, g_{ij} \qquad (1.14)$$

Такое распределение называют сферическим или омбилическим, а по другой терминологии называют неголономной сферой.

2.2. Дифференцируемые отображения

Дифференцируемые отображения позволяют не только математически смоделировать перемещение крови, но и проанализировать состояние движущейся крови в участке сосуда на основании того, как частица крови перемещается вдоль сосуда. Пусть E^n и $\overline{E}^n$ - евклидовы n-мерные пространства и $f: \Omega \to \overline{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\overline{\Omega}$ пространства $\overline{E}^n$ так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \overline{\Omega}$. Присоединим к точке x множество всех реперов $\{x, \vec{e}_A\}$ с началом в этой точке. Положим $\vec{a}_A = f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^*-касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f_x^* - невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в пространстве $\overline{E}^n$ с началом в точке y.

Уравнения перемещения реперов $\{x, \vec{e}_A\}$ и $\{y, \vec{a}_A\}$ запишем в виде:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B$$
$$d\vec{y} = \varpi^A \vec{a}_A, \quad d\vec{a}_A = \varpi_A^B \vec{a}_B \qquad (2.1)$$

1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A{}_B,\ D\omega^A{}_B = \omega^K{}_B \wedge \omega^A{}_K,\ D\varpi^A = \varpi^B \wedge \varpi^A{}_B,\ D\varpi^A{}_B = \varpi^K{}_B \wedge \varpi^A{}_K \quad (2.2)$$

Ввиду того, что реперы $\{x, \vec{e}_A\}$ и $\{y, \vec{a}_A\}$ связаны соответствиями f и f^*, то из этих форм линейно независимыми будут только формы ω^A и $\omega^A{}_B$.

Обозначим через $g_{AB} = (\vec{e}_A, \vec{e}_B)$ и $\overline{g}_{AB} = (\vec{a}_A, \vec{a}_B)$ метрические тензоры пространств E^n и $\overline{E}^n$ в точках x и y соответственно. Тензоры g_{AB} и $\overline{g}_{AB}$ в силу (2.1) удовлетворяют уравнениям:

$$dg_{AB} = g_{AK}\omega^K{}_B + g_{KB}\omega^K{}_A,\ d\overline{g}_{AB} = \overline{g}_{AK}\varpi_B^K + \overline{g}_{KB}\varpi_A^K \qquad (2.3)$$

В силу согласованного выбора реперов в пространствах E^n и $\overline{E}^n$ 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A \qquad (2.4)$$

Равенства (2.4) представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия f. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi^A{}_B - \omega^A{}_B = h^A{}_{BK}\omega^K, \qquad (2.5)$$

где $h^A{}_{BK} = h^A{}_{KB}$ – симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Пространства E^n и $\overline{E}^n$ поместим в пространство E^{2n} так, чтобы они были вполне ортогональны и обозначим через O их общую точку. Точка z графика отображения $f\colon \Omega \to \overline{\Omega}$ будет определяться радиусом-вектором $\overrightarrow{oz} = \overrightarrow{ox} + \overrightarrow{oy}$. Для простоты изложения будем отождествлять точки с их радиусами-векторами и писать $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$. График отображения f представляет собой гладкое n-мерное подмногообразие M^n пространства E^{2n}.

Так как пространства E^n и $\overline{E}^n$ вполне ортогональны, то ортогональны будут и вектора $\vec{e}_A$ и $\vec{a}_A$ реперов, присоединенных к точкам x и y в пространствах E^n и $\overline{E}^n$, то есть $(\vec{e}_A, \vec{a}_B) = 0$. Эти вектора образуют репер в пространстве E^{2n}, присоединенный к точке z. Используя формулы (2.1) и (2.4), найдем, что

$$d\vec{z} = \omega^A(\vec{e}_A + \vec{a}_A).$$

Следовательно, вектора $\vec{b}_A = \vec{e}_A + \vec{a}_A$ будут касательными к графику отображения f в пространстве E^{2n}. Найдем асимптотический тензор и асимптотические инвариантные формы многообразия M^n. Дифференцируя векторы $\vec{b}_A$, получим:

$$d\vec{b}_A = \omega_A^B \vec{b}_B + (\varpi_A^B - \omega_A^B)\vec{a}_B.$$

Формы $\varpi^A{}_B$ - $\omega^A{}_B$ определяют перемещение касательного подпространства $T_z(M^n)$ к многообразию M^n. Поэтому в силу соотношений (2.5) тензор $h^A{}_{BK}$ является асимптотическим тензором этого многообразия, а квадратичные формы

$$\varphi^A = \omega^B(\varpi^A{}_B - \omega^A{}_B) = h^A{}_{BK}\, \omega^B \omega^K \qquad (2.6)$$

его асимптотическими квадратичными формами.

В общем случае вычисление компонент тензора $h^A{}_{BK}$ довольно-таки сложная задача. Порой она требует больших вычислений. Но в некоторых частных случаях дифференцируемых отображений, компоненты этого тензора можно вычислить. В качестве демонстрации идеи вычисления компонент тензора $h^A{}_{BK}$ при дифференцируемом отображении между двумя n- мерными евклидовыми пространствами, рассматривается способ вычисления компонент этого тензора при дифференцируемом соответствии между областями n- мерного евклидова пространства.

2.3. Тензор деформации

Рассмотрим точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω в область $\overline{\Omega}$ пространства E^n так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \overline{\Omega}$. Такое отображение моделирует движение крови как перемещение из одной точки частицы крови в другую. Данное отображение в евклидовом пространстве задает прямую *(xy)*. В каждой точке $x \in \Omega$ зададим гиперплоскость $\xi(x)$, перпендикулярную прямой *(xy)*. Тем самым, в области Ω будет задано гиперраспределение Δ^{n-1}, а $(x, \xi(x))$ – элемент этого распределения, состоящий из точки $x \in \Omega$ и проходящей через нее гиперплоскости $\xi(x)$, ортогонально прямой *(xy)*.

Присоединим к точке x множество всех реперов $R_x = \left\{x, \vec{e}_i, \vec{e}_n\right\}$, i, j, k = 1,…,n-1, с началом в этой точке и такими, что $\vec{e}_i \in \Delta^{n-1}$, а вектор $\vec{e}_n$ направлен вдоль прямой *(xy)* перпендикулярно данному гиперраспределению и его модуль равен 1.

Положим $\vec{a}_A = f_x^*(\vec{e}_A)$, где $A,B = 1,...,n$ и f^*_x, как и в параграфе 2.2, - касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f^*_x – невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ - независимы и образуют репер в области $\overline{\Omega}$ с началом в точке y.

Уравнения перемещения реперов $\left\{x, \vec{e}_A\right\}$ и $\left\{y, \vec{a}_A\right\}$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B \\ d\vec{y} &= \varpi^A \vec{a}_A, \quad d\vec{a}_A = \varpi_A^B \vec{a}_B \end{aligned} \qquad (3.1)$$

1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства и будут аналогичны формулам (2.2).

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\overline{\Omega}$ 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек x и y, связаны также равенствами вида (2.4), которые являются основными дифференциальными уравнениями рассматриваемого соответствия $f\colon \Omega \to \overline{\Omega}$. Дифференцируя эти равенства внешним образом, получим равенства, аналогичные равенствам (2.5).

Связь между точками x и y выразим в виде:

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho\vec{e}_n \tag{3.2}$$

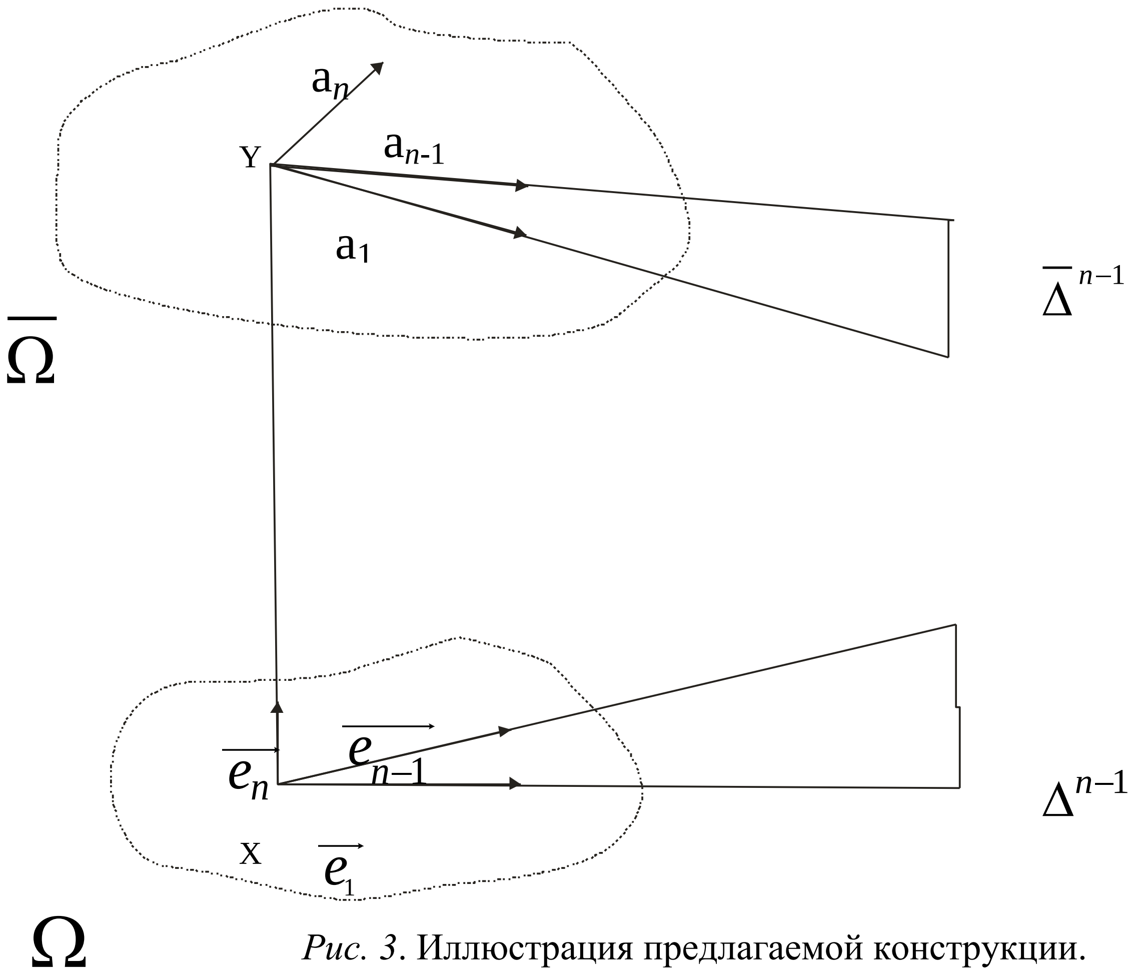

Рис. 3. Иллюстрация предлагаемой конструкции.

Основная система уравнений, определяющая гиперраспределение Δ^{n-1}, запишется в виде:

$$\omega^n_i = \Lambda_{ij}\,\omega^j + \Lambda_i\,\omega^n \tag{3.3}$$

Дифференцируя тождества $(\vec{e}_i\vec{e}_n) = 0$, получим $\omega^n_i + \omega^j_n g_{ij} = 0$ или

$$\omega^i_n = -\Lambda^i_j\,\omega^j - \Lambda^i\omega^n, \tag{3.4}$$

где $\Lambda^i_{\ j} = g^{ik}\Lambda_{kj}$ и $\Lambda^i = g^{ij}\Lambda_j$.

Далее, найдем представление векторов $\vec{a}_A$ через векторы $\vec{e}_A$. Для этого продифференцируем равенства (3.2) и после несложных вычислений, как и в работе [103], получим:

$$\vec{a}_i = (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n$$
$$\vec{a}_n = -\rho\Lambda^i\vec{e}_i + (1+\rho_n)\vec{e}_n \qquad (3.5)$$

Ввиду того, что

$$dg^{AB} = -g^{AK}\omega^B_{\ K} - g^{KB}\omega^A_{\ K}, \qquad (3.6)$$

то будем иметь

$$d\Lambda^j_{\ i} = \Lambda^j_{\ k}\,\omega^k_{\ i} - \Lambda^k_{\ i}\,\omega^j_{\ k} + \Lambda^j\,\omega^n_{\ i} + g^{jk}\Lambda_{kiA}\,\omega^A,$$
$$d\Lambda^i = -\Lambda^j\omega^i_{\ j} + \Lambda^i_{\ j}\,\omega^j_{\ n} + g^{ij}\Lambda_{jnA}\,\omega^A. \qquad (3.7)$$

Дифференцируя внешним образом равенство $d\rho = \rho_i\,\omega^i + \rho_n\,\omega^n$, получим:

$$d\rho_i + \rho_j\,\omega^j_{\ i} - \rho_n\,\omega^n_{\ i} = \rho_{ij}\,\omega^j + \rho_{in}\,\omega^n,$$
$$d\rho_n - \rho_i\,\omega^i_{\ n} = \rho_{in}\,\omega^i + \rho_{nn}\,\omega^n, \qquad (3.8)$$

где ρ_{ij}, ρ_{in} в силу леммы Картана симметричны по нижним индексам.

Дифференцируя равенства (3.5), запишем:

$$\varpi_i^j\vec{a}_j + \varpi_i^n\vec{a}_n = -d\rho\Lambda_i^j\vec{e}_j - \rho d\Lambda_i^j\vec{e}_j + (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\omega_j^k\vec{e}_k + (\delta_i^j -$$
$$-\rho\Lambda_i^j)\omega_j^n\vec{e}_n + d\rho_i\vec{e}_n + \rho_i\omega_n^j\vec{e}_j,$$
$$\varpi_n^i\vec{a}_i + \varpi_n^n\vec{a}_n = -d\rho\Lambda^i\vec{e}_i - \rho d\Lambda^i\vec{e}_i - \rho\Lambda^i\omega_i^j\vec{e}_j - \rho\Lambda^i\omega_i^n\vec{e}_n + d\rho_n\vec{e}_n +$$
$$+(1+\rho_n)\omega_n^i\vec{e}_i \qquad (3.9)$$

Подставляя равенства (3.5) в (3.9), в силу линейной независимости векторов $\vec{e}_A$, получим:

$$\varpi^j_{\ i}(\delta^k_{\ j} - \rho\Lambda^k_{\ j}) - \omega^n_{\ i}\,\rho\Lambda^k = -d\rho\Lambda^k_{\ i} - \rho\,d\Lambda^k_{\ i} + (\delta^j_{\ i} - \rho\Lambda^j_{\ i})\omega^k_{\ j} + \rho_i\,\omega^k_{\ n}$$
$$\varpi^j_{\ i}\,\rho_j + \varpi^n_{\ i}(1+\rho_n) = (\delta^j_{\ i} - \rho\Lambda^j_{\ i})\omega^n_{\ j} + d\rho_i\,, \qquad (3.10)$$

$$\varpi^i{}_n(\delta^j{}_i - \rho\Lambda^j{}_i) - \varpi^n{}_n\,\rho\Lambda^j = -d\rho\Lambda^j - \rho\, d\Lambda^j - \rho\Lambda^i\omega^j{}_i + (1 + \rho_n)\omega^j{}_n$$

$$\varpi^i{}_n\,\rho_i + \varpi^n{}_n(1 + \rho_n) = -\rho\Lambda^i\,\omega^n{}_i + d\rho_n\,.$$

Подставим первое уравнение из (3.7) в первое уравнение (3.10), а также учитывая (2.5), запишем:

$$(\delta^k{}_j - \rho\Lambda^k{}_j)h^j{}_{iA} - \rho\Lambda^k\,h^n{}_{iA} = -\Lambda^k{}_i\,\rho_A - \rho\, g^{kl}\Lambda_{liA} - \rho_i\Lambda^k{}_A\,. \tag{3.11}$$

Воспользовавшись первым уравнением из (3.8), а также равенствами (2.5), подставив все это во второе равенство из (3.10), получим:

$$\rho_j\,h^j{}_{iA} + (1 + \rho_n)\,h^n{}_{iA} = -\rho\Lambda^j{}_i\,\Lambda_{jA} + \rho_{iA} \tag{3.12}$$

Запишем третье уравнение из (3.10), учитывая второе равенство из (3.7) и уравнение (2.5), в виде:

$$(\delta^j{}_i - \rho\Lambda^j{}_i)\,h^i{}_{nA} - \rho\Lambda^j h^n{}_{nA} = -\Lambda^j\rho_A - \rho\, g^{jk}\Lambda_{knA} - \rho_n\,\Lambda^j{}_A \tag{3.13}$$

И, наконец, подставляя второе уравнение из (3.8) в последнее уравнение (3.10), получим:

$$\rho_i\,h^i{}_{nA} + (1 + \rho_n)h^n{}_{nA} = -\rho\Lambda^i\Lambda_{iA} + \rho_{nA} \tag{3.14}$$

Учитывая (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), запишем:

$$\begin{aligned}
&(\delta^k{}_j - \rho\Lambda^k{}_j)h^j{}_{iA} - \rho\Lambda^k\,h^n{}_{iA} = -\Lambda^k{}_i\,\rho_A - \rho\, g^{kl}\Lambda_{liA} - \rho_i\Lambda^k{}_A\\
&\rho_j\,h^j{}_{iA} + (1 + \rho_n)\,h^n{}_{iA} = -\rho\Lambda^j{}_i\,\Lambda_{jA} + \rho_{iA}\\
&(\delta^j{}_i - \rho\Lambda^j{}_i)\,h^i{}_{nA} - \rho\Lambda^j h^n{}_{nA} = -\Lambda^j\rho_A - \rho\, g^{jk}\Lambda_{knA} - \rho_n\,\Lambda^j{}_A\\
&\rho_i\,h^i{}_{nA} + (1 + \rho_n)h^n{}_{nA} = -\rho\Lambda^i\Lambda_{iA} + \rho_{nA}\,.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Сделаем следующий вывод.

Теорема 2.1. При дифференцируемом отображении области Ω в область $\overline{\Omega}$ n-мерного евклидова пространства, компоненты тензора деформации евклидовой связности находятся из системы (3.15).

Рассмотрим частные случаи, касающиеся гиперраспределения $\varDelta^{n-1}$ и его образа в соответствии *f*. В соответствии f гиперраспределению $\varDelta^{n-1}$ будет соответствовать гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$, $(y, \overline{\xi})$- элемент этого распределения, состоящий из точки $y \in \overline{\Omega}$ и проходящей через нее гиперплоскости $\overline{\xi} = \overline{\xi}(y)$.

Пусть гиперплоскости $\xi(x)$ и $\overline{\xi}(y)$ не пересекаются. Тогда гиперраспределения $\varDelta^{n-1}$ и $\overline{\Delta}^{n-1}$ параллельны. Векторное поле $\vec{e}_n$ будет ортогонально гиперраспределению $\overline{\Delta}^{n-1}$. В этом случае имеем $\vec{e}_n \vec{a}_i = 0$. Используя равенства (3.5), получим:

$$\rho_i = 0 \tag{3.16}$$

После подстановки (3.16) в первое уравнение (3.8), получим:

$$-\rho_n \varLambda_{ij}\, \omega^j - \rho_n \varLambda_i\, \omega^n = \rho_{ij}\, \omega^j + \rho_{in}\, \omega^n.$$

С учетом линейной независимости форм, запишем:

$$\rho_{ij} = -\rho_n \varLambda_{ij}, \quad \rho_{in} = -\rho_n \varLambda_i \tag{3.17}$$

Из первого уравнения (3.17), в силу симметрии ρ_{ij} по нижним индексам, заключаем, что $\varLambda_{ij}$ также симметричен по нижним индексам. Отсюда следует, что гиперраспределение $\varDelta^{n-1}$ вполне интегрируемо.

Дифференциальные уравнения гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$ запишем в виде:

$$\varpi_i^n = \overline{\Lambda}_{ij}\omega^j + \overline{\Lambda}_i\omega^n \tag{3.18}$$

Из формул (2.5) при $B = i, A = n$, получим:

$$\varpi^n{}_i - \omega^n{}_i = h^n{}_{iA}\, \omega^A.$$

С учетом (3.18) и (3.3), запишем:

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \varLambda_{ij} + h^n{}_{ij}, \quad \overline{\Lambda}_i = \varLambda_i + h^n{}_{in} \tag{3.19}$$

Величины $\{\overline{\Lambda}_{ij}, \overline{\Lambda}_i\}$ образуют геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$. При этом, величины $\{\overline{\Lambda}_{ij}\}$ образуют тензор – основной тензор гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$. Аналогично,

$\overline{\theta}_{ij} = \overline{\Lambda}_{[ij]}$ - тензор неголономности гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$. С учетом (3.19), запишем:

$$\overline{\theta}_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{\Lambda}_{ij} - \overline{\Lambda}_{ji}) = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij} + h_{ij}^{n} - \Lambda_{ji} - h_{ji}^{n}) = \frac{1}{2}(\Lambda_{ij} - \Lambda_{ji}) = \theta_{ij}.$$

На основании полученных формул получаем.

Теорема 2.2. Интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми тогда и только тогда, когда $\Lambda_i = 0$.

2.4. Конформное отображение при исследовании геометрии движущейся крови

Конформные соответствия между евклидовыми пространствами – это не только хорошо изученный, но и важный для различных приложений раздел дифференциальной геометрии. Так как при движении крови в норме в большей части сосудов кровь движется ламинарно, то сохраняются углы между скоростями частиц и их образов, поэтому конформное соответствие находит свое приложение при моделировании движения крови.

Пусть E^n и $\overline{E^n}$ - евклидовы n-мерные пространства и $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ конформное отображение области Ω пространства E^n в область $\overline{\Omega}$ пространства $\overline{E^n}$ так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \overline{\Omega}$. Обозначим через $g_{AB} = (\vec{e}_A, \vec{e}_B)$ и $\overline{g}_{AB} = (\vec{a}_A, \vec{a}_B)$ метрические тензоры пространств E^n и $\overline{E}^n$ в точках *x* и *y* соответственно. Элементы длины в этих пространствах записываются в виде:

$$ds^2 = g_{AB}\omega^A\omega^B, d\overline{s}^2 = \overline{g}_{AB}\varpi^A\varpi^B \tag{4.1}$$

Тензоры g_{AB} и $\overline{g}_{AB}$ в силу (3.1) удовлетворяют уравнениям (2.3). 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек *x* и *y*, связаны, как и ранее, равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A \tag{4.2}$$

Дифференцируя (4.2) внешним образом и применяя лемму Картана, получим: