

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = h_{BC}^A \omega^C \quad (4.3)$$

Для вычисления компонент тензора h_{BC}^A в случае конформного отображения, поступим следующим образом. Для конформного соответствия имеем $d\bar{s}^2 = \lambda^2 ds^2$, где λ - коэффициент конформности, зависящий от точки x : $\lambda = \lambda(x)$. Пусть $\lambda = e^\alpha$. Тогда

$$\bar{g}_{AB} = e^{2\alpha} g_{AB} \quad (4.4)$$

Дифференцируя последние равенства и используя формулы (2.3), получим:

$$g_{AC}(\varpi_B^C - \omega_B^C) + g_{CB}(\varpi_A^C - \omega_A^C) = 2g_{AB}d\alpha.$$

Так как $\alpha = \alpha(x)$, то

$$d\alpha = \alpha_A \omega^A \quad (4.5)$$

Ввиду равенства (4.5) и соотношений (4.3) получим:

$$g_{AD}h_{BC}^D + g_{BD}h_{AC}^D = 2g_{AB}\alpha_C.$$

Из этих соотношений найдем компоненты тензора конформной деформации.

Для этого, наряду с последними равенствами, запишем также равенства:

$$g_{BD}h_{CA}^D + g_{CD}h_{BA}^D = 2g_{BC}\alpha_A$$

$$g_{CD}h_{AB}^D + g_{AD}h_{CB}^D = 2g_{CA}\alpha_B.$$

Далее, складывая первые два равенства и вычитая третье, после умножения на тензор g^{EB} , получим:

$$h_{BC}^A = \delta_B^A \alpha_C + \delta_C^A \alpha_B - g_{BC} \alpha^A \quad (4.6)$$

После подстановки (4.6) в (4.3) получим:

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = \delta_B^A d\alpha + \alpha_B \omega^A - \alpha^A \omega_B, \quad (4.7)$$

где $\alpha^A = g^{AB} \alpha_B$, $\omega_A = g_{AB} \omega^B$.

Следует отметить, что метрический тензор $g_{AB} = (\vec{b}_A, \vec{b}_B)$ графика M^n конформного отображения в силу (4.4) запишется в виде:

$$g_{AB} = (\vec{b}_A, \vec{b}_B) = g_{AB} + \bar{g}_{AB} = (1 + \lambda^2)g_{AB}.$$

Поэтому отображение $f : \Omega \rightarrow M^n$ также является конформным. Далее, свернем асимптотический тензор h_{BC}^A многообразия M^n с его метрическим тензором g_{AB} . Получим его вектор средней кривизны:

$$h^A = \frac{1}{1 + \lambda^2} (2 - n) \alpha^A.$$

Отсюда следует, что при $n = 2$ график отображения f всегда будет минимальной поверхностью в E^n . При $n \geq 3$ график отображения будет минимальным тогда и только тогда, когда $\alpha^A = 0$, то есть $\alpha = const$. В этом случае отображение $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ является подобием, его график M^n - плоским подпространством пространства E^{2n} . Этот случай, как и случай $n = 2$ нас интересовать не будет.

Найдем дифференциальные продолжения соотношений (4.5) и (4.7). Дифференцируя первые из них, получим:

$$\nabla \alpha_A \wedge \omega^A = 0, \quad (4.8)$$

где $\nabla \alpha_A = d\alpha_A - \alpha_B \omega_A^B$ - ковариантный дифференциал ковектора α_A . Из соотношений (4.8) в силу леммы Картана следует, что

$$\nabla \alpha_A = \alpha_{AB} \omega^B, \quad (4.9)$$

где $\alpha_{AB} = \alpha_{BA}$. Далее, дифференцируя уравнения (4.7), найдем:

$$(\nabla \alpha_A - \alpha_A d\alpha + \beta \omega_A) \wedge \omega_B - (\nabla \alpha_B - \alpha_B d\alpha + \beta \omega_B) \wedge \omega_A = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} g^{CD} \alpha_C \alpha_D = \frac{1}{2} \Delta_1 \alpha \quad (4.11)$$

и Δ_1 - первый дифференциальный параметр Бельтрами.

Далее имеем

$$\nabla \alpha_A - \alpha_A d\alpha + \beta \omega_A = (\alpha_{AB} - \alpha_A \alpha_B + \beta g_{AB}) \omega^B = \alpha_{AB} \omega^B, \quad (4.12)$$

где

$$\alpha_{AB} = \alpha_{AB} - \alpha_A \alpha_B + \beta g_{AB} - \quad (4.13)$$

также симметричный тензор. Подставляя выражения (4.13) в (4.10), получим:

$$(\alpha_{AC} g_{BD} - \alpha_{BC} g_{AD}) \omega^C \wedge \omega^D = 0.$$

Из последних равенств следует, что:

$$\alpha_{AC} g_{BD} - \alpha_{BC} g_{AD} - \alpha_{AD} g_{BC} + \alpha_{BD} g_{AC} = 0 \quad (4.14)$$

Свертывая соотношение (4.14) с g^{AC} , запишем:

$$(n-2)\alpha_{BD} = -\alpha g_{BD},$$

где $\alpha = g^{AC} \alpha_{AC}$.

При $n = 2$ из последней системы следует, что $\alpha = 0$. Но нас больше интересует случай $n \geq 3$. В этом случае имеем:

$$\alpha_{BD} = -\frac{1}{n-2} \alpha g_{BD}.$$

Подставляя последние выражения в (4.14), получим $\alpha = 0$, откуда и $\alpha_{BD} = 0$. Теперь из (4.13) найдем

$$\alpha_{AB} = \alpha_A \alpha_B - \beta g_{AB} \quad (4.15)$$

Тогда из (4.9) получим:

$$\nabla \alpha_A = (\alpha_A \alpha_B - \beta g_{AB}) \omega^B$$

или

$$\nabla \alpha_A = \alpha_A d\alpha - \beta \omega_A \quad (4.16)$$

Дифференцируя внешним образом систему (4.16), получим соотношения:

$$(d\alpha - d \ln \beta) \wedge \omega_A = 0,$$

откуда следует, что

$$d \ln \beta = d\alpha \quad (4.17)$$

В силу (4.11) и (4.16) соотношение (4.17) удовлетворяется тождественно. Таким образом, при $n \geq 3$ конформное отображение $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, состоящей из уравне-

ний (4.2), (4.5), (4.7), (4.16) и (4.17), и, следовательно, зависят от конечного числа параметров.

Так как α_A - ковектор, то $\alpha^A = g^{AB}\alpha_B$ можно рассматривать в качестве вектора. Тем самым, конформное отображение между евклидовыми пространствами определяет в области $\Omega \subset E^n$ векторное поле, компонентами которого являются α^A .

Замечание. В качестве такого вектора берется вектор скорости крови.

Торсообразующим называется векторное поле α^A , удовлетворяющее в пространстве E^n уравнениям

$$\alpha_C^A = a\delta_C^A + b_C\alpha^A \quad (4.18)$$

Уравнения (4.18) будут иметь тот же вид для любого поля v^A пропорционального α^A . Положим $v^A = \lambda\alpha^A$, то $v_C^A = a\delta_C^A + \tilde{b}_C v^A$, где

$$a = \lambda a, \tilde{b}_C = b_C + \frac{\lambda_C}{\lambda}.$$

Если b_C является градиентом, то за счет надлежащего выбора функции λ можно в (4.18) обратить b_C в нуль. Если же b_C не является градиентом, то можно заменить a единицей, в случае неравенства a нулю.

В евклидовом пространстве можно опустить индекс A в (4.18):

$$v_{AC} = ag_{AC} + b_C v_A \quad (4.19)$$

Выбирая a и b_C в (4.19), будем получать специальные виды торсообразующих векторных полей:

- 1) Конциркулярное векторное поле: b_C – градиент, a – произвольная функция.
- 2) Специальное конциркулярное поле: $b_C = 0$, a – произвольная функция.
- 3) Конкуррентное или сходящееся векторное поле: $b_C = 0$, $a = const$.
- 4) Рекуррентное или параллельное векторное поле: b_C – произвольный вектор, $a = 0$.

5) Абсолютно параллельное или ковариантно постоянное векторное поле:

$$a = 0, b_C = 0.$$

По аналогии с Норденом А.П. ковектор α_A , а также вектор α^A будем называть вектором конформного преобразования.

Сравнивая (4.15) и (4.19) можно заключить, что векторное поле α^A является торсообразующим векторным полем. Вектор b_C в данном случае есть вектор α_C . Вместе с векторным полем α^A определяется поле аффинора α_B^A . Ротор векторного поля в n – мерном случае определяется как бивектор $\alpha_{[AB]} = \alpha_A^C g_{CB} - \alpha_B^C g_{CA}$. Обращение в нуль ротора векторного поля есть необходимое и достаточное условие градиентности векторного поля. Для векторного поля α^A имеем, после умножения обеих частей (4.15) на g^{BC} :

$$g^{BC} \alpha_{AB} = \alpha_A^C = \alpha_A \alpha^C - \beta \delta_A^C,$$

а также

$$\begin{aligned} \alpha_{[AB]} &= (\alpha_A \alpha^C - \beta \delta_A^C) g_{CB} - (\alpha_B \alpha^C - \beta \delta_B^C) g_{CA} = \\ &= \alpha_A \alpha_B - \beta g_{AB} - \alpha_B \alpha_A + \beta g_{AB} = 0. \end{aligned}$$

Тем самым векторное поле α^A является градиентным. Тогда торсообразующее векторное поле является конциркулярным векторным полем.

Теорема 2.3. Вектор конформного преобразования является торсообразующим векторным полем.

Следствие. Вектор конформного преобразования, как торсообразующее векторное поле, является конциркулярным векторным полем.

Для получения геометрической картины, характеризующей данное векторное поле α^A поступим следующим образом.

Рассмотрим образ \bar{V}^{n-1} гиперповерхности $V^{n-1} \subset \Omega \subset E^n$ при конформном отображении $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$. Найдем связь между асимптотическими квадратичными формами гиперповерхностей V^{n-1} и \bar{V}^{n-1} . Присоединим к точке

$x \in V^{n-1}$ репер таким образом, чтобы вектора \vec{e}_i принадлежали ее касательной гиперплоскости $T_x(V^{n-1})$, а вектор \vec{e}_n был ее единичной нормалью. Тогда эти векторы связаны соотношениями:

$$(\vec{e}_i \vec{e}_j) = g_{ij}, (\vec{e}_i \vec{e}_n) = 0, (\vec{e}_n \vec{e}_n) = 1, \quad (4.20)$$

а уравнение гиперповерхности V^{n-1} запишется в виде:

$$\omega^n = 0 \quad (4.21)$$

1-формы ω^i будут базисными на этой гиперповерхности.

Дифференцируя соотношения (4.20) получим:

$$\begin{aligned} dg_{ij} &= g_{ik} \omega_j^k + g_{jk} \omega_i^k \\ g_{ij} \omega_n^j + \omega_i^n &= 0, \omega_n^n = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Дифференциальное продолжение уравнения (4.21) дает

$$\omega_i^n = b_{ij} \omega^j, \quad (4.23)$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ - асимптотический тензор гиперповерхности V^{n-1} , а $\varphi = b_{ij} \omega^i \omega^j$ ее асимптотическая квадратичная форма. При конформном отображении $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ гиперповерхность V^{n-1} перейдет в гиперповерхность \bar{V}^{n-1} , определяемую в пространстве \bar{E}^n тем же дифференциальным уравнением (4.21). Формы $\bar{\omega}_i^n$, определяющие перемещение касательной гиперплоскости $T_y(\bar{V}^{n-1})$ в пространстве \bar{E}^n , вычисляются из уравнений (4.7) при $A = n, B = i$ с учетом (4.21) получим:

$$\bar{\omega}_i^n = \omega_i^n - \alpha^n \omega_i = (b_{ij} - \alpha^n g_{ij}) \omega^j \quad (4.24)$$

Тогда асимптотический тензор гиперповерхности \bar{V}^{n-1} связан с тензором b_{ij} соотношениями:

$$\bar{b}_{ij} = b_{ij} - \alpha^n g_{ij} \quad (4.25)$$

Предположим теперь, что гиперповерхность V^{n-1} является гиперсферой: $V^{n-1} = S^{n-1}$. Тогда асимптотический тензор гиперсферы пропорционален метрическому $b_{ij} = b g_{ij}$. Из (4.25) следует, что $\bar{b}_{ij} = (b - \alpha^n) g_{ij}$. Ввиду этого и соотношения (4.4) получаем, что $\bar{b}_{ij} = \frac{b - \alpha^n}{e^{2\alpha}} g_{ij}$. Тем самым гиперповерхность \bar{V}^{n-1} также является гиперсферой. Таким образом, доказано, что при конформном отображении $f : E^n \rightarrow \bar{E}^n$ и $n \geq 3$ всякая гиперсфера переходит снова в гиперсферу. Последний результат известен как теорема Лиувилля.

Рассмотрим в E^n подповерхности уровня коэффициента конформности α - так называемые эквиконформные гиперповерхности. Выберем в E^n репер так, чтобы вектор \vec{e}_n был ортогонален к этим гиперповерхностям и имел единичную длину, а векторы \vec{e}_i касались этих гиперповерхностей. Тогда будут верны соотношения (4.20) и (4.22) и кроме того

$$d\alpha = \alpha_n \omega^n.$$

Так как в этом случае $\alpha_i = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$, то из соотношений (4.16) следует, что

$$\omega_i^n = \frac{1}{2} \alpha_n \omega_i, d\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_n)^2 \omega^n \quad (4.26)$$

Ввиду того, что на эквиконформной гиперповерхности $d\alpha = 0$, $\omega^n = 0$, тогда в силу первого из соотношений (4.26) $b_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_n g_{ij}$. Отсюда видно, что эквиконформные гиперповерхности являются гиперсферами.

Найдем центр и радиус эквиконформной гиперсферы S^{n-1} . При $\omega^n = 0$ имеем

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i.$$

С учетом (4.26)

$$\omega_n^i = -g^{ij}\omega_j^n = -\frac{1}{2}\alpha_n\omega^i \quad (4.27)$$

Поэтому

$$d\vec{e}_n = -\frac{1}{2}\alpha_n\omega^i\vec{e}_i.$$

Так как $\omega^n = 0$, то из (4.26) следует, что $d\alpha_n = 0$, то

$$d\left(\vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n\right) = \vec{0}.$$

Поэтому точка $\vec{z} = \vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$ является центром эквиконформной гиперсферы

и так как $|\vec{e}_n| = 1$, то ее радиус равен $r = \frac{2}{\alpha_n}$. Величину α_n всегда можно

сделать положительной, направляя вектор \vec{e}_n к центру гиперсферы S^{n-1} .

Находя дифференциал $d\vec{z}$, получим:

$$d\vec{z} = (\omega^n - 2\frac{d\alpha_n}{\alpha_n^2})\vec{e}_n.$$

Последнее выражение также обращается в нуль в силу (4.26). Следовательно,

все эквиконформные сферы имеют общий центр в точке $\vec{z} = \vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$.

При конформном преобразовании f эквиконформные гиперсферы S^{n-1} пространства E^n перейдут в эквиконформные гиперсферы \bar{S}^{n-1} пространства \bar{E}^n , которые тоже будут концентрическими. Для нахождения радиуса гиперсферы $\bar{S}^{n-1} = f(S^{n-1})$ и ее центра запишем для нее следующие равенства:

$$d\vec{y} = \omega^i\vec{e}_i, d\vec{a}_n = \varpi_n^i\vec{a}_i.$$

Но из (4.7) и (4.27) следует, что

$$\vec{\omega}_n^i = \omega_n^i + \alpha_n \omega^i = \frac{1}{2} \alpha_n \omega^i.$$

Тогда

$$d\vec{a}_n = \frac{1}{2} \alpha_n \omega^i \vec{a}_i \text{ и } d(\vec{y} - \frac{2}{\alpha_n} \vec{a}_n) = \vec{0}.$$

Таким образом, точка $\vec{z} = \vec{y} - \frac{2}{\alpha_n} \vec{a}_n$ будет центром гиперсферы \bar{S}^{n-1} . Так как

$$|\vec{a}_n| = \lambda |\vec{e}_n| = \lambda, \text{ то радиус этой гиперсферы равен } \bar{r} = \frac{2\lambda}{\alpha_n}.$$

Рассмотрим произведение

$$r \cdot \bar{r} = \frac{4\lambda}{\alpha_n^2}.$$

Ввиду того, что $\lambda = e^\alpha$, $\beta = \frac{1}{2} \alpha_n^2$, то $r \cdot \bar{r} = \frac{2e^\alpha}{\beta}$. Тогда

$$d \ln(r \cdot \bar{r}) = d\alpha - d \ln \beta = 0.$$

в силу равенства (4.17). Поэтому $r \cdot \bar{r} = c^2$ - некоторая постоянная величина.

Так как для эквиконформной гиперсферы $\alpha_i = 0$, то векторное поле α^A будет коллинеарно векторному полю \vec{e}_n , перпендикулярному эквиконформной гиперсфере S^{n-1} , а вектора \vec{e}_i принадлежат касательной плоскости к этой гиперсфере. Все прямые, на которых направление задается с помощью вектора α^A , будут перпендикулярны к концентрическим эквиконформным гиперсферам и будут проходить через точку $\vec{z} = \vec{x} + \frac{2}{\alpha_n} \vec{e}_n$ - общий центр этих ги-

персфер. При $A = B = n$ имеем

$$\alpha_{nn} = \alpha_n^2 - \beta, \text{ а } \alpha_{ni} = 0.$$

Так как $\beta = \frac{1}{2} \alpha_n^2$, то

$$\alpha_{nm} = \frac{1}{2} \alpha_n^2 \quad (4.28)$$

Сравнивая (4.28) с (4.19), получаем $b_n = 0$, а $a = \frac{1}{2} \alpha_n^2$. Тогда

$$da = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha_n d\alpha_n = \alpha_n \cdot \frac{1}{2} (\alpha_n)^2 \omega^n = \frac{1}{2} (\alpha_n)^3 \omega^n.$$

Так как на эквиконформной гиперсфере $\omega^n = 0$, то $da = 0$, то есть $a = const$. Тем самым, векторное поле α^A на эквиконформной гиперсфере является сходящимся векторным полем.

Теорема 2.4. Конциркулярное векторное поле, определяемое конформным отображением $f : E^n \rightarrow \bar{E}^n$, на эквиконформных гиперсферах является сходящимся векторным полем.

Более наглядно этот факт выглядит следующим образом (рис. 4):

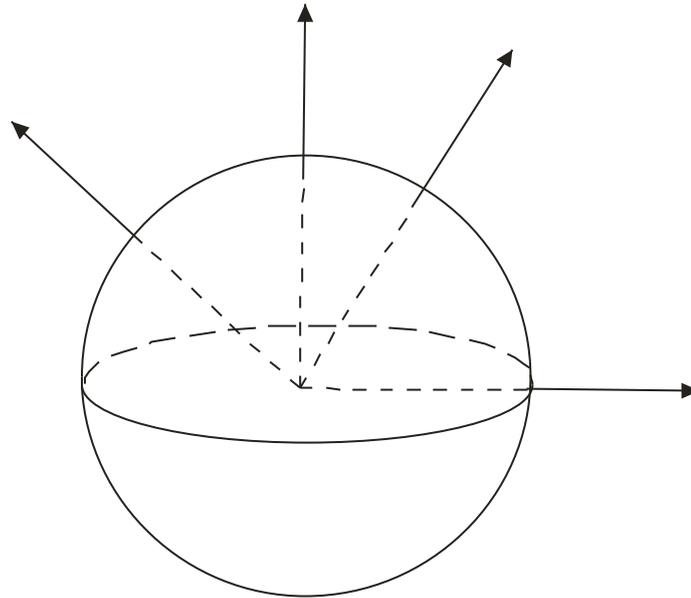


Рис. 4. Иллюстрация сходящегося векторного поля.

Вернемся снова к графику M^n конформного отображения $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ и найдем его асимптотические квадратичные формы. Согласно соотношениям (2.6) и (4.6) асимптотические квадратичные формы примут следующий вид:

$$\varphi^A = 2\omega^A d\alpha - \alpha^A g_{AB} \omega^A \omega^B.$$

Рассмотрим гиперповерхность $V^{n-1} \subset E^n$ и ее образ $V^{n-1} = f(V^{n-1})$ на графике M^n конформного отображения $f: E^n \rightarrow \bar{E}^n$. Так как гиперповерхность $V^{n-1} \subset E^n$ определяется уравнением $\omega^n = 0$, то гиперповерхность V^{n-1} на M^n определяется тем же уравнением и для точки $x \in V^{n-1}$ имеем

$$dx = \omega^i \tilde{e}_i,$$

где $\tilde{e}_i = \vec{e}_i + \vec{a}_i$ - векторы, касательные к V^{n-1} . Дифференцируя последнее равенство, получим:

$$d\tilde{e}_i = \omega_j^j \tilde{e}_j + \omega_i^n \tilde{e}_n + (\varpi_i^A - \omega_i^A) \vec{e}_A,$$

где согласно (4.23) получим:

$$\omega_i^n = b_{ij} \omega^j, \text{ а в силу (4.7)}$$

$$\varpi_j^i - \omega_j^i = \delta_j^i d\alpha + \alpha_j \omega^i - \alpha^i g_{jk} \omega^k,$$

$$\varpi_i^n - \omega_i^n = -\alpha^n g_{ij} \omega^j.$$

В последних равенствах g_{ij} - метрический, а b_{ij} - асимптотический тензор гиперповерхности $V^{n-1} \subset E^n$. Тогда асимптотические квадратичные формы поверхности $V^{n-1} = f(V^{n-1})$ запишем в виде:

$$\begin{aligned} \varphi^i &= 2\alpha_j \omega^j \omega^i - \alpha^i g_{jk} \omega^j \omega^k \\ \varphi^n &= -\alpha^n g_{ij} \omega^i \omega^j \end{aligned} \quad (4.29)$$

Если гиперповерхность V^{n-1} является гиперсферой S^{n-1} , то для нее $b_{ij} = b g_{ij}$ и из равенств (4.29) видно, что при $\alpha^i \neq 0$ ровно n из квадратичных форм будут линейно независимыми. Если же $\alpha_i = 0$, то гиперсфера S^{n-1} является эквиконформной, а все асимптотические формы (4.29) пропорциональны квадратичной форме $d\tilde{s}^2$ поверхности V^{n-1} . Поэтому последняя поверхность будет $(n-1)$ - мерной сферой S^{n-1} . Так как при конформном отображении

$f : E^n \rightarrow \bar{E}^n$ в пространстве E^n имеется однопараметрическое семейство эквифонформных гиперсфер, то и график M^n этого отображения расслаивается на однопараметрическое семейство $(n-1)$ -мерных сфер.

2.5. Математический аппарат для моделирования движения крови, основанный на свойствах распределений при конформном отображении

В предыдущем параграфе рассматривалось конформное соответствие между n -мерными евклидовыми пространствами. Рассматривался голономный случай, так как довольно-таки широко использовалось понятие эквифонформной гиперсферы. Для рассмотрения неголономного случая, то есть рассмотрение конформного отображения распределений, в некотором смысле удобнее рассматривать распределение и ее образ в одном пространстве E^n [113]. Конформное отображение позволяет получить модель для исследования ламинарного движения крови.

Пусть $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\bar{\Omega}$ того же пространства E^n , так что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \bar{\Omega}$. Тогда в области Ω , в каждой ее точке, будет определена гиперплоскость $\xi(x)$, ортогональная прямой xu . Тем самым в области Ω n -мерного евклидова пространства будет задано гиперраспределение, где $(x, \xi(x))$ - элемент этого распределения. В отображении f ему будет соответствовать гиперраспределение $\bar{\Delta}^{n-1}$ области $\bar{\Omega}$, а $(y, \bar{\xi}(y))$ - элемент гиперраспределения $\bar{\Delta}^{n-1}$. Как и ранее, присоединим к точке x множество реперов $\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_n\}$ с началом в этой точке. Положим $\vec{a}_A = f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^* - касательное линейное отображение к отображению f в точке x . Так как f_x^* - невырожденное отображение, то векторы \vec{a}_A неза-

висимы и образуют репер в области $\bar{\Omega}$ с началом в точке y . Уравнения перемещения реперов $\{x, \vec{e}_A\}$ и $\{y, \vec{a}_A\}$ имеют уже известный вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^A \vec{e}_A, & d\vec{e}_A &= \omega_A^B \vec{e}_B \\ d\vec{y} &= \varpi^A \vec{a}_A, & d\vec{a}_A &= \varpi_A^B \vec{a}_B \end{aligned} \quad (5.1)$$

1-формы ω^A и ϖ^A , определяющие перемещение точек x и y , связаны равенствами

$$\varpi^A = \omega^A \quad (5.2)$$

Дифференцируя равенства (5.2) внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = h_{BC}^A \omega^C, \quad (5.3)$$

где $h_{BC}^A = h_{CB}^A$ и в случае конформного отображения, то есть когда $\bar{g}_{AB} = e^{2\alpha} g_{AB}$:

$$h_{BC}^A = \delta_B^A \alpha_C + \delta_C^A \alpha_B - g_{BC} \alpha^A \quad (5.4)$$

После операций, проделанных точно также как и в предыдущем параграфе, получим

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &= \alpha_A \alpha_B - \beta g_{AB} \text{ и} \\ \nabla \alpha_A &= \alpha_A d\alpha - \beta \omega_A \end{aligned} \quad (5.5)$$

Как видно из последних формул, конформное отображение определяет в области Ω конциркулярное векторное поле α^A , которое становится сходящимся векторным полем на эквikonформной гиперсфере. Так как при конформном отображении гиперсфера перейдет в гиперсферу, а также ввиду сохранения углов получим, что при конформном отображении сходящееся векторное поле будет переходить снова в сходящееся векторное поле.

Пусть $\vec{y} = \vec{x} + \rho \vec{e}_n$. Дифференцируя последнее равенство, получим:

$$\begin{aligned}\vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n \\ \vec{a}_n &= -\rho\Lambda^i\vec{e}_i + (1 + \rho_n)\vec{e}_n\end{aligned}\quad (*)$$

В случае, когда интегральные линии векторного поля \vec{e}_n являются прямыми, то есть $\Lambda_i = 0$, то последние равенства примут вид:

$$\begin{aligned}\vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n \\ \vec{a}_n &= (1 + \rho_n)\vec{e}_n\end{aligned}\quad (5.6)$$

Дифференцируя первые равенства из (5.6) и введя обозначение $\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j = c_i^j$, получим:

$$d\vec{a}_i = (dc_i^j + c_i^k\omega_k^j + \rho_i\omega_n^j)\vec{e}_j + (c_i^j\omega_j^n + d\rho_i)\vec{e}_n.$$

С другой стороны, из формул (5.1) и (5.6), запишем:

$$d\vec{a}_i = \varpi_i^k c_k^j \vec{e}_j + (\varpi_i^j \rho_j + (1 + \rho_n)\varpi_i^n)\vec{e}_n.$$

Сравнивая последние два равенства, получим:

$$dc_i^j + c_i^k\omega_k^j + \rho_i\omega_n^j = \varpi_i^k c_k^j, c_i^j\omega_j^n + d\rho_i = \varpi_i^j \rho_j + (1 + \rho_n)\varpi_i^n \quad (5.7)$$

Ввиду конформности отображения f имеем $\vec{a}_i \perp \vec{a}_n$, тогда $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_n = 0$ или $\rho_i(1 + \rho_n) = 0$. Так как f_x^* - невырожденное отображение, то $1 + \rho_n \neq 0$.

Значит, $\rho_i = 0$. Тогда равенства (5.6) примут вид:

$$\vec{a}_i = c_i^j \vec{e}_j, \vec{a}_n = (1 + \rho_n)\vec{e}_n.$$

Теорема 2.1. В случае конформного отображения $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ интегральные линии векторного поля \vec{e}_n являются прямыми тогда и только тогда, когда гиперраспределения Δ^{n-1} и $\bar{\Delta}^{n-1}$ параллельны.

Доказательство:

В одну сторону теорема доказана. Докажем в обратную сторону. При конформном отображении гиперраспределения Δ^{n-1} и $\bar{\Delta}^{n-1}$ параллельны. Это,

согласно следствию из теоремы 1.2, возможно тогда и только тогда, когда $\rho_i = 0$. Тогда формулы (*) примут вид:

$$\begin{aligned}\vec{a}_i &= c_i^j \vec{e}_j \\ \vec{a}_n &= -\rho \Lambda^k \vec{e}_k + (1 + \rho_n) \vec{e}_n.\end{aligned}$$

Так как при конформном отображении сохраняются углы между векторами, то $\vec{a}_i \perp \vec{a}_n$. Таким образом,

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_n = -\rho \Lambda^k c_i^j g_{jk} = -\rho c_i^j \Lambda_j = 0.$$

Невырожденность отображения f^* говорит о том, что матрица $\|c_i^j\|$ невырожденная, а ее определитель отличен от нуля. Имеем систему

$$c_i^j \Lambda_j = 0,$$

где в роли неизвестных выступают компоненты ковектора Λ_j . Так как система из (n-1)-го линейного однородного уравнения с (n-1)-ой неизвестной обладает решениями, отличными от нулевого, тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. А так как определитель системы отличен от нуля, то нулевое решение будет единственным. Таким образом, доказано, что $\Lambda_j = 0$, то есть интегральные линии векторного поля \vec{e}_n являются прямыми.

□

Так как $\rho_i = 0$, то формулы (5.7) перепишутся:

$$dc_i^j + c_i^k \omega_k^j = \varpi_i^k c_k^j, c_i^j \omega_j^n = (1 + \rho_n) \varpi_i^n \quad (5.8)$$

Основная система дифференциальных уравнений, определяющая гиперраспределение $\bar{\Delta}^{n-1}$, запишется в виде:

$$\varpi_i^n = \bar{\Lambda}_{ij} \omega^j + \bar{\Lambda}_i \omega^n,$$

где $\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + h_{ij}^n, \bar{\Lambda}_i = h_{in}^n$.

Принимая во внимание конформность отображения f , найдем из (5.4):

$$h_{ij}^n = -g_{ij}\alpha^n = -g_{ij}\alpha_n, h_{in}^n = \alpha_i \quad (5.9)$$

Учитывая соотношения (5.9), получим:

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}, \quad \bar{\Lambda}_i = \alpha_i \quad (5.10)$$

Тогда

$$\varpi_i^n = (\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\omega^j + \alpha_i \omega^n \quad (5.11)$$

Далее, подставим $\omega_i^n = \Lambda_{ij}\omega^j$ и (5.11) во второе уравнение (5.8):

$$c_i^j \Lambda_{jk} \omega^k = (1 + \rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij})\omega^j + (1 + \rho_n)\alpha_i \omega^n.$$

Ввиду линейной независимости форм ω^A из последней системы получаем следующее:

$$c_i^k \Lambda_{kj} = (1 + \rho_n)(\Lambda_{ij} - \alpha_n g_{ij}), \quad (1 + \rho_n)\alpha_i = 0 \quad (5.12)$$

Так как $(1 + \rho_n) \neq 0$, то из второго соотношения (5.12) имеем $\alpha_i = 0$. Тогда

$$d\alpha = \alpha_n \omega^n.$$

В этом случае $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$ и из соотношений (5.5) следует, что

$$\omega_i^n = \frac{1}{2}\alpha_n \omega_i = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}\omega^j, \quad d\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2 \omega^n \quad (5.13)$$

Из первого равенства (5.13) заключаем, что

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\alpha_n g_{ij}.$$

Из полученной формулы можно сделать вывод, что гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим.

Теорема 2.5. Пусть $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ - конформное отображение между областями евклидова пространства E^n . Тогда интегральные линии векторного поля, ортогонального к гиперраспределению Δ^{n-1} , являются прямыми тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим.

Доказательство:

Истинность теоремы в одну сторону следует из ранее приведенных рассуждений. Для доказательства обратного утверждения поступим следующим образом. Так как Δ^{n-1} - сферическое гиперраспределение, то прямая (x, y) проходит через неподвижную точку C пространства E^n . Полагаем

$$\vec{C} - \vec{x} = c^n \vec{e}_n.$$

Дифференцируя последнее равенство, при условии неподвижности точки C , получаем:

$$c^n \omega_n^i = \omega^i, \quad dc^n = \omega^n.$$

Первой группе соотношений последних равенств на основании того, что $\omega_n^i = -g^{ij} \omega_j^n$, можно придать вид $c^n \omega_k^n = -g_{kj} \omega^j$ и, следовательно, имеем:

$$c^n (\Lambda_{kj} \omega^j + \Lambda_k \omega^n) = -g_{kj} \omega^j, \quad c^n \Lambda_{kj} = -g_{kj}, \quad c^n \Lambda_k = 0.$$

Так как точка x не может быть неподвижной точкой, то $\Lambda_k = 0$. Тем самым, интегральные линии векторного поля \vec{e}_n - прямые. \square

Из соотношений (5.10) видно, что в случае сферического распределения Δ^{n-1} , основной тензор распределения $\bar{\Delta}^{n-1}$ будет иметь вид:

$$\bar{\Lambda}_{ij} = \frac{1}{2} \alpha_n g_{ij} - \alpha_n g_{ij} = -\frac{1}{2} \alpha_n g_{ij}.$$

С учетом равенств (4.4) он примет вид:

$$\bar{\Lambda}_{ij} = -\frac{1}{2e^{2\alpha}} \alpha_n \bar{g}_{ij} \quad (5.14)$$

Используя теоремы 1.6 и 1.7, получим следующую теорему.

Теорема 2.6. При конформном отображении $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ в евклидовом пространстве E^n гиперраспределению Δ^{n-1} будет соответствовать параллельное ему гиперраспределение $\bar{\Delta}^{n-1}$ тогда и только тогда, когда эти гиперраспределения являются сферическими.

Конформное отображение определяет в области Ω конциркулярное векторное поле α^A , которое на эквikonформной гиперсфере является сходящимся векторным полем. Для гиперраспределения Δ^{n-1} , интегральные линии нормали к которому являются прямыми, будут выполняться равенства $d\alpha = \alpha_n \omega^n$ и (5.13). На гиперраспределении $\omega^n \neq 0$, значит, для данного гиперраспределения $d\alpha \neq 0$ и $d\alpha_n \neq 0$. Тем самым, на сферическом гиперраспределении Δ^{n-1} , коэффициент конформности не будет принимать постоянное значение. В этом проявляется отличие сферы от сферического гиперраспределения, которое по другому называют неголономной сферой.

Так как компоненты $\alpha_i = 0$, то для векторного поля α^A , получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= -\frac{1}{2}(\alpha_n)^2 g_{ij} \\ \alpha_{nn} &= \frac{1}{2}(\alpha_n)^2 g_{nn}\end{aligned}\tag{5.15}$$

На сферическом гиперраспределении Δ^{n-1} $d\alpha_n \neq 0$, то есть α_n не является постоянной функцией. На основании последнего факта доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. Конформное отображение на сферическом гиперраспределении определяет конциркулярное векторное поле.

2.6. Геодезическое отображение

Геодезические отображения, в другой терминологии проективные отображения [111], - это хорошо изученный и важный для применения раздел дифференциальной геометрии. В данном параграфе затрагиваются вопросы, которые характеризуют геодезическое отображение с точки зрения векторного поля и которые идут в рамках проводимых автором этой работы исследований для моделирования движения крови [115].

Рассмотрим, как и прежде, точечное невырожденное дифференцируемое отображение $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ области Ω пространства E^n в область $\bar{\Omega}$ пространства \bar{E}^n так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \bar{\Omega}$. Присоединим к точке x множество всех реперов $\{x, \vec{e}_A\}$ с началом в этой точке. Положим $\vec{a}_A = f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^* - касательное линейное отображение к отображению f в точке x . Так как f_x^* - невырожденное отображение, то векторы \vec{a}_A независимы и образуют репер в области $\bar{\Omega}$ с началом в точке y .

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\bar{\Omega}$ 1-формы ω^A и ϖ^A , определяющие перемещение точек x и y , связаны равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A \quad (6.1)$$

Дифференцируя равенства (6.1) внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = h_{BC}^A \omega^C, \quad (6.2)$$

где $h_{BC}^A = h_{CB}^A$ - симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f .

Гладкую линию $\gamma \in \Omega$ зададим уравнениями вида $\omega^A = \theta \xi^A$, $D\theta = \theta \wedge \theta_1$, где θ - параметрическая форма. В силу уравнений (6.1) линия $\bar{\gamma} = f(\gamma)$ определяется теми же уравнениями, что и линия γ . Линия γ будет геодезической, если

$$d\omega^A + \omega^B \omega_B^A = \theta \omega^A \quad (6.3)$$

Аналогично, линия $\bar{\gamma}$ будет геодезической, если выполнены следующие условия:

$$d\omega^A + \omega^B \varpi_B^A = \bar{\theta} \omega^A \quad (6.4)$$

С учетом (6.2), (6.4) переписывается:

$$d\omega^A + \omega^B \omega_B^A + h_{BC}^A \omega^C = \bar{\theta} \omega^A$$

Сравнивая последние равенства с (6.3), получим:

$$h_{BC}^A \omega^B \omega^C = (\bar{\theta} - \theta) \omega^A \quad (6.5)$$

Введем обозначение $\theta = \bar{\theta} - \theta = \lambda_A \omega^A$, тогда (6.5) примут вид:

$$h_{BC}^A \omega^B \omega^C = \lambda_C \omega^C \omega^A = \delta_B^A \lambda_C \omega^B \omega^C.$$

Отсюда

$$h_{BC}^A = \delta_B^A \lambda_C + \delta_C^A \lambda_B, \quad (6.6)$$

где $\lambda_C = h_{AC}^A$ - ковектор.

Далее, подставляя (6.6) в (6.2), получим:

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = \delta_B^A \theta + \lambda_B \omega^A \quad (6.7)$$

Так как $\theta = \lambda_A \omega^A$, то, дифференцируя внешним образом это равенство, запишем:

$$D\theta = \nabla \lambda_A \wedge \omega^A, \quad (6.8)$$

где $\nabla \lambda_A = d\lambda_A - \lambda_B \omega_B^A$.

Дифференцируя внешним образом равенства (6.7), получим:

$$(\nabla \lambda_B - \lambda_B \theta) \wedge \omega^A + \delta_B^A (\nabla \lambda_C - \lambda_C \theta) \wedge \omega^C = 0.$$

Обозначим $\nabla \lambda_B - \lambda_B \theta = \lambda_B$, тогда последние равенства примут вид:

$$\lambda_B \wedge \omega^A + \delta_B^A \lambda_C \wedge \omega^C = 0 \quad (6.9)$$

Пусть $A \neq B$, тогда (6.9) запишется $\lambda_B \wedge \omega^A = 0$. Отсюда, в силу леммы Картана, имеем $\lambda_B = \lambda_{BA} \omega^A$ (по A нет суммирования). Из последнего в силу линейной независимости форм ω^A следует, что $\lambda_{BA} = 0$. Значит, $\lambda_B = 0$ в случае, когда $A \neq B$. Пусть, теперь, $A = B$. Тогда соотношения (6.9) примут вид:

$$\lambda_A \wedge \omega^A + \lambda_C \wedge \omega^C = 0$$

или

$$2\lambda_A \wedge \omega^A + \lambda_C \wedge \omega^C (C \neq A) = 0.$$

По лемме Картана из последнего равенства имеем:

$$2\lambda_A = \lambda_{AK}\omega^K, \quad \lambda_C = \lambda_{CK}\omega^K.$$

Подставляя полученные равенства в предыдущее, получим:

$$\lambda_{AK}\omega^K \wedge \omega^A + \lambda_{CK}\omega^K \wedge \omega^C = 0.$$

Отсюда получим

$$\lambda_{AK}\omega^K \wedge \omega^A = 0.$$

Так как в последнем равенстве слагаемые не содержат подобных членов, то они по отдельности должны быть равны нулю. То есть для любого A имеем $\lambda_{AK} = 0$. Исходя из этого и $\lambda_A = 0$.

На основании приведенных рассуждений получаем, что $\lambda_B = 0$. Тогда имеем

$$\nabla \lambda_B = \lambda_B \theta \tag{6.10}$$

Подставляя (6.10) в (6.8), будем иметь:

$$D\theta = \lambda_A \theta \wedge \omega^A = \theta \wedge \lambda_A \omega^A = \theta \wedge \theta = 0.$$

Из последнего равенства видим, что θ является полным дифференциалом, то есть можем записать

$$d\lambda = \theta = \lambda_A \omega^A \tag{6.11}$$

С учетом (6.11) соотношения (6.10) переписуются:

$$\nabla \lambda_A = \lambda_A d\lambda \tag{6.12}$$

Внешнее дифференцирование системы (6.12) приводит к соотношениям

$$\nabla \lambda_A \wedge d\lambda = 0 \tag{6.13}$$

Но в силу (6.12), равенства (6.13) удовлетворяются тождественно. Таким образом, геодезическое отображение $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, состоящей из уравнений (6.1), (6.7), (6.11), (6.12) и, следовательно, зависит от конечного числа параметров.

Так как $d\lambda = \lambda_A \omega^A$, то, дифференцируя внешним образом последнее равенство, запишем:

$$\nabla \lambda_A \wedge \omega^A = 0,$$

где $\nabla \lambda_A = d\lambda_A - \lambda_B \omega_A^B$ - ковариантный дифференциал ковектора λ_A . Из последних соотношений в силу леммы Картана следует, что

$$\nabla \lambda_A = \lambda_{AB} \omega^B, \quad (6.14)$$

где $\lambda_{AB} = \lambda_{BA}$.

Сравнивая (6.12) и (6.14), получаем

$$\lambda_{AB} = \lambda_A \lambda_B \quad (6.15)$$

Сопоставляя полученное значение для ковариантной производной λ_A из (6.15) с (4.19), можно сделать вывод, что векторное поле λ^A будет одним из видов торсообразующего векторного поля. Как видно из (6.15), геодезическое отображение $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ определяет в области Ω частный случай торсообразующего векторного поля – рекуррентное или параллельное векторное поле.

Для геометрической интерпретации полученного векторного поля поступим, как и в предыдущих двух параграфах. Рассмотрим в E^n подповерхности уровня коэффициента геодезичности λ , которые будем обозначать V^{n-1} . В дальнейшем такие поверхности будем называть эквигеодезическими гиперповерхностями.

Уравнение гиперповерхности V^{n-1} запишем в виде:

$$\omega^n = 0 \quad (6.16)$$

1-формы ω^i будут базисными на этой гиперповерхности. Дифференциальное продолжение равенства (6.16) дает

$$\omega_i^n = b_{ij} \omega^j, \quad (6.17)$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ - асимптотический тензор гиперповерхности V^{n-1} . При геодезическом отображении $f : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ гиперповерхность V^{n-1} перейдет в гиперповерхность \bar{V}^{n-1} , определяемую тем же дифференциальным уравнением (6.16).

Формы ϖ_i^n , определяющие перемещение касательной гиперплоскости $T_y(\bar{V}^{n-1})$ в области $\bar{\Omega}$, вычисляются из уравнений (6.7) при $B = i, A = n$.

Тогда с учетом (6.16) получаем $\varpi_i^n = \omega_i^n = b_{ij}\omega^j$. Ввиду этого асимптотические тензоры гиперповерхностей V^{n-1} и \bar{V}^{n-1} совпадают. На эквигеодезической гиперповерхности $d\lambda = 0, \omega^n = 0$.

Так как на эквигеодезической гиперповерхности $\lambda_i = 0$, то из (6.14) и (6.15) при $A = i, C = n$, имеем:

$$\omega_i^n = 0 \quad (6.18)$$

Сравнивая (6.17) и (6.18), получаем:

$$b_{ij} = 0,$$

то есть эквигеодезические гиперповерхности являются гиперплоскостями в E^n .

При геодезическом отображении f эквигеодезические гиперплоскости перейдут в эквигеодезические гиперплоскости. Для эквигеодезических гиперплоскостей векторное поле λ^A коллинеарно вектору \vec{e}_n . То есть векторное поле λ^A переносится параллельно вдоль эквигеодезической гиперплоскости.