Теорема 2.8. Вектор геодезического преобразования является в E^n параллельным векторным полем.

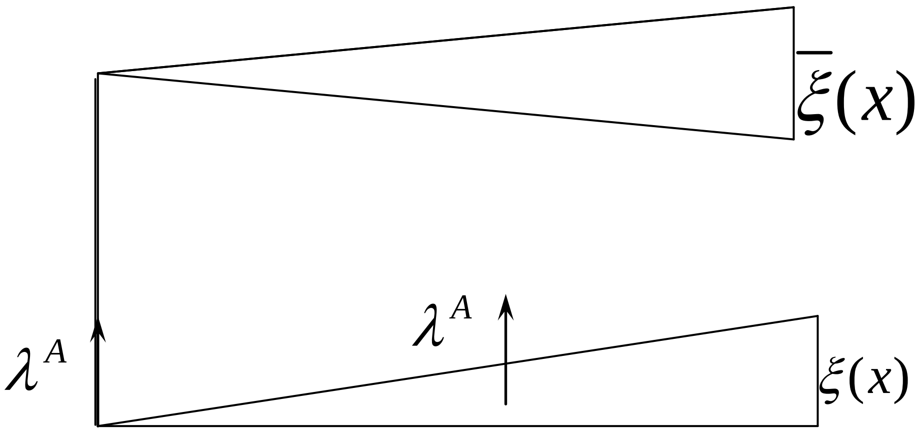

Рис. 5. Иллюстрация параллельного векторного поля.

Замечание. Вектор геодезического преобразования можно рассматривать и как сходящееся векторное поле. При этом прямые, на которых направление определяется вектором λ^A, будут перпендикулярны эквигеодезической гиперплоскости и будут проходить через бесконечно удаленную точку.

Если в области Ω пространства E^n задано гиперраспределение Δ^{n-1} так, что вектор $\vec{e}_n$ ортогонален этому гиперраспределению, то при дифференцируемом отображении f данному гиперраспределению Δ^{n-1} соответствует в области $\overline{\Omega}$ пространства $\overline{E}^n$ гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$. При этом, голономному гиперраспределению Δ^{n-1} соответствует также голономное гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$. При конформном отображении между евклидовыми пространствами сферическое гиперраспределение будет переходить также в сферическое гиперраспределение. Так как при геодезическом соответствии между евклидовыми пространствами, согласно (6.6), имеем:

$$h_{ij}^n = 0,$$

то между основными тензорами гиперраспределения Δ^{n-1} и его образом - гиперраспределением $\overline{\Delta}^{n-1}$, будет следующая взаимосвязь:

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij}.$$

Из последнего равенства видно, что при геодезическом соответствии плоское гиперраспределение Δ^{n-1} будет переходить также в плоское гиперраспределение. Последнее подчеркивает тот факт, что любая геодезическая γ области Ω пространства E^n, которая касается в некоторой своей точке x плоскости $\xi(x)$, являющейся элементом гиперраспределения Δ^{n-1}, будет интегральной кривой гиперраспределения Δ^{n-1}. Поэтому, плоское гиперраспределение, которое характеризуется обращением в нуль своей второй фундаментальной формы, некоторые авторы называют вполне геодезическим.

2.7. Отображения при моделировании движения крови по участку сосуда

В данном параграфе рассмотрим дифференцируемые отображения между евклидовыми пространствами, а также два частных случая таких отображений – конформные и геодезические отображения. С каждым отображением свяжем гиперраспределение определенного вида, которое при данном отображении будет переходить в гиперраспределение такого же вида.

Так как при дифференцируемом отображении голономное гиперраспределение переходит в голономное, то с таким отображением можно связать голономное гиперраспределение.

При конформном отображении сферическое гиперраспределение переходит в сферическое. Тем самым, с конформным отображением можно связать сферическое гиперрапределение.

И, наконец, с геодезическим отображением свяжем плоское гиперраспределение.

Охарактеризуем эти отображения и соответствующие им гиперраспределения следующим образом.

Пусть в области Ω пространства E^n задано гиперраспределение Δ^{n-1}, натянутое на векторы $\vec{e}_i$, а вектор $\vec{e}_n$ ортогонален этому гиперраспределению. Рассмотрим точку F, лежащую на нормали $(x, \vec{e}_n)$ к этому гиперраспределению:

$$\overrightarrow{F} = \vec{x} + \lambda \vec{e}_n \tag{7.1}$$

Найдем многообразие направлений, для которых эта точка является фокальной. Учитывая условие фокальности точки F, то есть $d\overrightarrow{F} \parallel \vec{e}_n$, получим:

$$\omega^i + \lambda \omega_n^i = 0 \tag{7.2}$$

Так как $\omega_n^i = -\Lambda_j^i \omega^j - \Lambda^i \omega^n$, то

$$(\Lambda_j^i - \mu \delta_j^i)\omega^j = 0, \tag{7.3}$$

где $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Уравнения (7.3) определяют в общем случае для каждой точки F одно фокальное направление. Но не для всякого наперед заданного направления мы найдем на нормали $(x, \vec{e}_n)$ соответствующую фокальную точку.

Для кривых, касательные которых принадлежат гиперраспределению Δ^{n-1}, система уравнений (7.3) допускает ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\det \left\| \Lambda_j^i - \mu \delta_j^i \right\| = 0 \tag{7.4}$$

В этом случае, если рассматривать общий случай, с нормалью $(x, \vec{e}_n)$ к гиперраспределению Δ^{n-1} связывается (n-1) инвариантная точка, лежащая на этой нормали, а в гиперплоскости $\xi(x)$ элемента будет задано (n-1) инвариантных направлений. Эти (n-1)-но направлений называются направлениями кривизны, соответствующими данной нормали. Тем самым, в области Ω будет определена (n-1) – ткань линий кривизны, относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$, принадлежащая гиперраспределению Δ^{n-1}.

Из систем (7.3) и (7.4) находим, что

$$\Lambda_{ij} = \mu_j g_{ij}, \tag{7.5}$$

где $i \neq j$ и μ_j являются корнями системы (7.4).

Гиперраспределение Δ^{n-1} голономно тогда и только тогда, когда 1-форма ω^n вполне интегрируема, то

$$D\omega^n = \omega^i \wedge \omega_i^n = \omega^i \wedge (\Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i\omega^n) = \Lambda_{ij}\omega^i \wedge \omega^j + \Lambda_i\omega^i \wedge \omega^n.$$

Согласно теореме Фробениуса $D\omega^n = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega^n = 0$ и тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij} - \Lambda_{ji} = 0$. После подстановки (7.5) в последнее равенство, получим:

$$g_{ij}(\mu_j - \mu_i) = 0 \tag{7.6}$$

Ввиду того, что все μ_i различны, то (7.6) верно тогда и только тогда, когда $g_{ij} = 0 (i \neq j)$. Тем самым, (n-1) – ткань линий кривизны, принадлежащая гиперраспределению Δ^{n-1}, ортогональна, вообще говоря, тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} вполне интегрируемо.

Из (7.5) видно, что в случае голономного гиперраспределения Δ^{n-1} $g_{ij} = 0 \ (i \neq j)$, то $\Lambda_{ii} = \mu_i$. Тем самым на прямой $(x, \vec{e}_n)$ будет определен фокус согласно следующей формуле:

$$\vec{F}_i = \vec{x} + \frac{1}{\Lambda_{ii}}\vec{e}_n \tag{7.7}$$

В общем случае таких фокусов будет (n-1).

На нормали $(x, \vec{e}_n)$ к гиперраспределению Δ^{n-1} можно указать точку:

$$\vec{Q} = \vec{x} + \frac{1}{n-1} g^{ij} \Lambda_{ij} \vec{e}_n, \qquad (7.8)$$

которая называется гармоническим полюсом точки x относительно (n-1) точки F_i или центром нормали $(x, \vec{e}_n)$.

На каждой нормали $(x, \vec{e}_n)$ к гиперраспределению Δ^{n-1} имеется (n-1) фокус (если совпадающие фокусы считать с их кратностью, центр которых совпадает с центром нормали).

Рассмотрим теперь один из частных случаев дифференцируемого отображения между евклидовыми пространствами – конформное отображение.

Так как при конформном отображении сферическое гиперраспределение переходит в сферическое, то при конформном отображении инвариантным является сферическое гиперраспределение.

Пусть все фокусами, определяемые формулами (7.7) на нормали $(x, \vec{e}_n)$ к гиперрапределению Δ^{n-1}, совпадают. Тогда

$\mu_i = \mu$ - для любого i.

Тогда

$$\vec{F} = \vec{x} + \frac{1}{\mu} \vec{e}_n \qquad (7.9)$$

Выясним, что из себя, в этом случае, представляет гиперраспределение Δ^{n-1}. Так как в данном случае $\Lambda_{ii} = \mu$ и $\omega^n = 0$ для любой линии, принадлежащей Δ^{n-1}, то получим:

$$\omega_i^n = \mu \omega^i.$$

Продифференцируем внешним образом последнее равенство:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^n = d\mu \wedge \omega^i + \mu \omega^j \wedge \omega_j^i.$$

Так как, в данном случае, $\Lambda_{ij} = \mu g_{ij}$, то гиперраспределение Δ^{n-1} - голономно, а голономному гиперраспределению принадлежит ортогональная (n-1) – ткань линий кривизны. Репер $R_x = \left\{ x, \vec{e}_i, \vec{e}_n \right\}$ зададим так, что векторa $\vec{e}_i$ являются касательными к линиям кривизны, принадлежащими данному гиперраспределению. В этом случае для форм ω_i^j и ω_j^i справедливы следующие равенства: $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$. Тогда

$$\omega_i^j \wedge \mu\omega^j = d\mu \wedge \omega^i + \mu\omega_i^j \wedge \omega^j$$

или

$$d\mu \wedge \omega^i = 0 \qquad (7.10)$$

Ввиду линейной независимости форм ω^i из (7.12) следует, что $d\mu = 0$, то есть $\mu =$ *const*. Тогда и $\lambda = \frac{1}{\mu} =$ *const*. Отсюда для линий, принадлежащих гиперраспределению Δ^{n-1}, будем иметь:

$$d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i = -g^{ij}\omega_j^n \vec{e}_i = -g^{ij}\mu g_{jk}\omega^k \vec{e}_i = -\mu\omega^i \vec{e}_i = -\mu d\vec{x}.$$

Поэтому

$$d\vec{F} = d\vec{x} + \frac{1}{\mu} d\vec{e}_n = d\vec{x} - \frac{1}{\mu}\mu d\vec{x} = \vec{0}.$$

Из последнего равенства видно, что точка F неподвижна. Значит, нормаль к гиперраспределению Δ^{n-1} проходит через неподвижную точку F. Такое гиперраспределение, будет сферическим. Можно сделать вывод: при конформном отображении между евклидовыми пространствами инвариантным является сферическое гиперраспределение, которому принадлежит ортогональная (n-1) – ткань линий кривизны, относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$, на которой имеется (n-1) – кратный фокус, совпадающий с центром нормали.

Так как все эквиконформные сферы имеют общий центр в точке $\vec{z} = \vec{x} + \frac{2}{\alpha_n}\vec{e}_n$, то есть являются концентрическими гиперсферами, то в случае конформного отображения (n-1) – кратный фокус или центр нормали, совпадает с центром эквиконформных сфер.

Случай совпадения фокусов на нормали $(x, \vec{e}_n)$ к гиперрапределению Δ^{n-1} приводит к сферическому гиперраспределению, с которым связывается сходящееся векторное поле – поле нормалей к соответствующей эквиконформной сфере.

Для сферического гиперраспределения вектор средней кривизны будет иметь вид:

$$\overrightarrow{M}_{n-1} = \mu \vec{e}_n.$$

Как видно из последней формулы, в евклидовом пространстве сферическое гиперраспределение не может быть минимальным.

В случае плоского гиперраспределения, которому принадлежит (n-1) – ткань линий кривизны относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$, имеем:

$$\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji} = 0$$

или

$$\mu_j g_{ij} + \mu_i g_{ij} = 0.$$

Из последнего равенства получаем либо $\mu_j + \mu_i = 0$, либо $g_{ij} = 0$. В обеих случаях получаем, что $\Lambda_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\Lambda_{ii} = \mu_i = 0$. Линии кривизны, принадлежащие плоскому гиперраспределению Δ^{n-1}, неопределенны, то есть любое направление, принадлежащее гиперраспределению Δ^{n-1} является направлением кривизны относительно нормали к этому гиперраспределению, а любая линия, принадлежащая гиперраспределению, является линией кривизны.

Так как и при геодезическом отображении плоское гиперраспределение переходит в плоское, то будет верна следующая теорема.

Теорема 2.9. При геодезическом отображении между евклидовыми пространствами инвариантным является плоское гиперраспределение, каждая линия которого является линией кривизны относительно нормали к этому гиперраспределению.

2.8. Геометрия специального соответствия

Соответствие Петерсона, при котором касательные плоскости к поверхности V и ее образу $\overline{V}$ в соответствующих точках являются параллельными, неоднократно изучалось многими авторами. Однако соответствие, при котором гиперраспределению Δ^{n-1}области Ω евклидова пространства E^n соответствует параллельное гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$ области $\overline{\Omega}$ пространства E^n, практически не рассматривалось. Именно такое соответствие рассматривалось автором ранее [124] и будет рассматриваться в данном параграфе. Такое соответствие применимо при моделировании как ламинарного движения крови, так и движения крови по винтовой линии. Устанавливается связь между данным соответствием и соответствием Петерсона для гиперповерхностей.

Пусть Ω и $\overline{\Omega}$ - области n-мерного евклидова пространства E^n и $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω пространства E^n в область $\overline{\Omega}$ пространства E^n так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \overline{\Omega}$.

В каждой точке $x \in \Omega$ будет определена гиперплоскость $\xi(x)$, перпендикулярная прямой (xy). Тогда в области Ω будет определено гиперраспределение Δ^{n-1}, где $(x,\ \xi(x))$ - элемент этого гипераспределения, состоящий из точки $x \in \Omega$ и проходящей через нее гиперплоскости $\xi(x)$.

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера $\left\{x,\ \vec{e}_A\right\}$ принадлежат гиперраспределению Δ^{n-1}, а вектор $\vec{e}_n$ направлен вдоль прямой (xy) и $\left|\vec{e}_n\right| = 1$. Так как

$\vec{a}_A = f^*(\vec{e}_A)$, то в области $\overline{\Omega}$ будет определено гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$, натянутое на вектора $\vec{a}_i$.

Уравнения перемещения реперов $\left\{x, \vec{e}_A\right\}$ и $\left\{y, \vec{a}_A\right\}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B \\ d\vec{y} &= \varpi^A \vec{a}_A, \quad d\vec{a}_A = \varpi_A^B \vec{a}_B \end{aligned} \tag{8.1}$$

1-формы, входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства. В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\overline{\Omega}$ 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A \tag{8.2}$$

Последние равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия $f : \Omega \to \overline{\Omega}$. Дифференцируя их внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = h_{BC}^A \omega^C, \tag{8.3}$$

где $h_{BC}^A = h_{CB}^A -$ симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии f.

Основная система уравнений, определяющая гиперраспределение Δ^{n-1}, запишется в виде:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i \omega^n \tag{8.4}$$

Обозначим, как и прежде, через $g_{AB} = (\vec{e}_A, \vec{e}_B)$ и $\overline{g}_{AB} = (\vec{a}_A, \vec{a}_B) -$ метрические тензоры областей Ω и $\overline{\Omega}$ в точках x и y соответственно, а через g^{AB} и $\overline{g}^{AB}$ $-$ контравариантные компоненты тензоров g_{AB} и $\overline{g}_{AB}$.

Так как $(\vec{e}_i, \vec{e}_n) = 0$, то, дифференцируя это равенство, получаем $\omega_i^n + \omega_n^j g_{ij} = 0$. С учетом (9.4) запишем

$$\omega_n^i = -\Lambda_j^i \omega^j - \Lambda^i \omega^n, \tag{8.5}$$

где $\Lambda_j^i = g^{ik}\Lambda_{kj}$ и $\Lambda^i = g^{ij}\Lambda_j$.

Пусть далее

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho\vec{e}_n \tag{8.6}$$

Для нахождения представления векторов $\vec{a}_A$ через векторы $\vec{e}_A$, продифференцируем равенство (8.6) и получим:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i \vec{e}_n, \\ \vec{a}_n &= -\rho\Lambda^i \vec{e}_i + (1 + \rho_n)\vec{e}_n, \end{aligned} \tag{8.7}$$

где $d\rho = \rho_i \omega^i + \rho_n \omega^n$ и δ_i^j – символ Кронекера.

Пусть гиперраспределение Δ^{n-1} параллельно гиперраспределению $\overline{\Delta}^{n-1}$. Тогда вектор $\vec{e}_n$ перпендикулярен $\overline{\Delta}^{n-1}$, то есть $\vec{e}_n \vec{a}_i = 0$ или $\rho_i = 0$. Равенства (8.7), в этом случае, запишутся так:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j, \\ \vec{a}_n &= -\rho\Lambda^i \vec{e}_i + (1 + \rho_n)\vec{e}_n \end{aligned} \tag{8.8а}$$

или

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= c_i^j \vec{e}_j, \\ \vec{a}_n &= c_n^i \vec{e}_i + c_n^n \vec{e}_n, \end{aligned} \tag{8.8б}$$

где $c_i^j = \delta_i^j - \rho\Lambda_i^j$, $c_n^i = -\rho\Lambda^i$, $c_n^n = 1 + \rho_n$.

Случай параллельности гиперраспределений позволяет упростить выражения представления векторов-образов через векторы-прообразы. В некоторых задачах этот факт приводит к существенным упрощениям в вычислениях. В данном же параграфе это рассматривается в контексте соответствия Петерсона.

Геометрическая картина данных рассуждений имеет следующий вид:

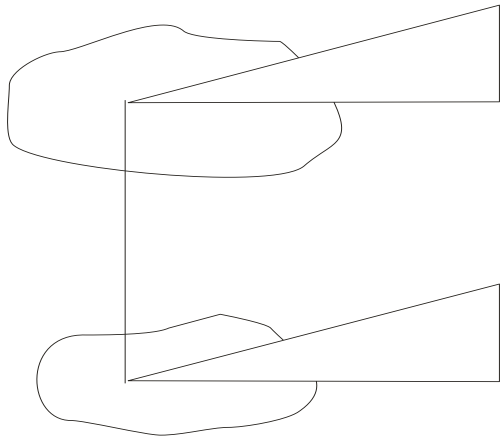

Рис. 6. К иллюстрации соответствия Петерсона.

Дифференцируя внешним образом $d\rho = \rho_i \omega^i + \rho_n \omega^n$ и применяя лемму Картана, получаем:

$$d\rho_i + \rho_j \omega_i^j - \rho_n \omega_i^n = \rho_{ij} \omega^j + \rho_{in} \omega^n,$$
$$d\rho_n - \rho_i \omega_n^i = \rho_{in} \omega^i + \rho_{nn} \omega^n,$$

где $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ и $\rho_{in} = \rho_{ni}$. Так как $\rho_i = 0$, то последние равенства перепишутся в виде:

$$\begin{aligned} -\rho_n \omega_i^n &= \rho_{ij} \omega^j + \rho_{in} \omega^n, \\ d\rho_n &= \rho_{in} \omega^i + \rho_{nn} \omega^n. \end{aligned} \tag{8.9}$$

С учетом (8.4) первое соотношение из (8.9) запишется в виде:

$$-\rho_i \Lambda_{ij} \omega^j - \rho_n \Lambda_i \omega^n = \rho_{ij} \omega^j + \rho_{in} \omega^n$$

или, с учетом линейной независимости форм ω^A:

$$\begin{aligned} -\rho_i \Lambda_{ij} &= \rho_{ij} \\ -\rho_n \Lambda_i &= \rho_{in}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Из первого равенства (8.10) следует, что основной тензор гиперраспределения Δ^{n-1} симметричен по индексам i и j. А это говорит о том, что гиперраспределение Δ^{n-1} вполне интегрируемо.

Основная система уравнений, определяющая гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$, запишется в виде:

$$\varpi_i^n = \overline{\Lambda}_{ij}\omega^j + \overline{\Lambda}_i\omega^n \qquad (8.11)$$

Из уравнений (8.3) в случае $B = i$ и $A = n$ с учетом (8.4) и (8.11) получим:

$$\overline{\Lambda}_{ij} - \Lambda_{ij} = h_{ij}^n, \quad \overline{\Lambda}_i - \Lambda_i = h_{in}^n \qquad (8.12)$$

Как видно из первого соотношения (8.12), основной тензор гипрраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$ $\overline{\Lambda}_{ij}$ также симметричен по нижним индексам в случае симметричности по этим индексам Λ_{ij}, то есть гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда вполне интегрируемо гиперраспределение Δ^{n-1}.

В случае параллельности гиперраспределений Δ^{n-1} и $\overline{\Delta}^{n-1}$ интегральная гиперповерхность V_{n-1} гиперраспределение Δ^{n-1} имеет в качестве касательной плоскости в точке x гиперплоскость $\xi(x)$. При отображении f гиперповерхности V_{n-1} соответствует интегральная гиперповерхность $\overline{V}_{n-1}$ гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$, которая в произвольной своей точке y имеет касательную плоскость $\overline{\xi}(y) = f(\xi(x))$. Тогда имеем, что при соответствии f касательные плоскости к гиперповерхностям V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ в соответствующих точках являются параллельными. Тем самым, соответствие f является соответствием Петерсона.

Теорема 2.10. Гиперраспределения Δ^{n-1} и $\overline{\Delta}^{n-1}$ параллельны тогда и только тогда, когда отображение $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ является отображением Петерсона.

Доказательство:

В одну сторону теорема доказана. Докажем в обратную сторону. Имеем: отображение f - отображение Петерсона, то есть касательные плоскости к гиперповерхностям V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ параллельны. Пусть в каждой точке $x \in V_{n-1}$ задан репер $R_x = \left\{ x, \vec{e}_i, \vec{e}_n \right\}$ следующим образом: $\vec{e}_i$ принадлежат касательной плоскости, а $\vec{e}_n$ ортогонален этой плоскости. Тем самым, на гиперповерхности V_{n-1} определено гиперраспределение Δ^{n-1}, элементом которого является точка x и касательная плоскость, перпендикулярная вектору $\vec{e}_n$ в точке x. Гиперраспределению Δ^{n-1} в отображении f соответствует гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$, элемент которого содержит точку y и касательную плоскость к гиперповерхности $\overline{V}_{n-1}$. Так как касательные плоскости к гиперповерхностям параллельны, то гиперраспределения Δ^{n-1} и $\overline{\Delta}^{n-1}$ также параллельны. □

Вектор $\vec{e}_n$ ортогонален гиперраспределениям Δ^{n-1} и $\overline{\Delta}^{n-1}$, а также положим $\vec{e}_n^{\,2} = 1$. Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$\omega_n^n = 0 \qquad (8.13)$$

Продифференцируем (8.13) внешним образом, запишем:

$$\omega_n^i \wedge \omega_i^n = 0.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для форм ω_n^i и ω_i^n из (8.5) и (8.4), найдем

$$\Lambda^i_j \Lambda_{ik} \omega^j \wedge \omega^k + (\Lambda^i_k \Lambda_i - \Lambda^i \Lambda_{ik}) \omega^k \wedge \omega^n = 0.$$

Так как первое и второе слагаемые этой суммы не содержат подобных членов, то они по отдельности должны быть равны нулю, откуда следует, что

$$\begin{aligned} &\Lambda^i_j \Lambda_{ik} - \Lambda^i_k \Lambda_{ij} = 0 \\ &\Lambda^i_k \Lambda_i - \Lambda^i \Lambda_{ik} = 0 \end{aligned}.$$

Согласно (8.8б) можно записать $\vec{a}_A = c^B_A \vec{e}_B$. Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$$d\vec{a}_A = (dc^C_A + c^B_A \omega^C_B)\tilde{c}^K_C \vec{a}_K,$$

где $c^K_A \cdot \tilde{c}^B_K = \delta^B_A$. Сравнивая это равенство с последним равенством (8.1), получаем

$$\varpi^B_A = (dc^S_A + c^C_A \omega^S_C)\tilde{c}^B_S.$$

Подставляя полученные соотношения в (8.3), запишем:

$$(dc^K_B + c^S_B \omega^K_S)\tilde{c}^A_K - \omega^A_B = h^A_{BC} \omega^C.$$

Свертывая последнее равенство с c^D_A, получим:

$$dc^A_B + c^K_B \omega^A_K - c^A_K \omega^K_B = c^A_K h^K_{BC} \omega^C \qquad (8.14)$$

Воспользовавшись равенством (8.13), окончательно будем иметь:

$$c^j_i \omega^n_j - c^n_j \omega^j_i - c^n_n \omega^n_i = c^n_j h^j_{iC} \omega^C + c^n_n h^n_{iC} \omega^C,$$

$$(c^j_i - c^n_n \delta^j_i) \omega^n_j = c^n_n h^n_{iC} \omega^C.$$

С учетом (8.4), последнее равенство примет вид:

$$(c^j_i - c^n_n \delta^j_i)(\Lambda_{jk} \omega^k + \Lambda_j \omega^n) = c^n_n (h^n_{ik} \omega^k + h^n_{in} \omega^n).$$

Ввиду линейной независимости форм ω^A можно записать:

$$\begin{aligned} &(c^j_i - c^n_n \delta^j_i)\Lambda_{jk} = c^n_n h^n_{ik} \\ &(c^j_i - c^n_n \delta^j_i)\Lambda_j = c^n_n h^n_{in} \end{aligned} \qquad (8.15)$$

Из первого равенства системы (8.15) найдем h^n_{ik} :

$$h^n_{ik} = \frac{1}{c^n_n}(c^j_i - c^n_n \delta^j_i)\Lambda_{jk} = \frac{1}{1+\rho_n}(\delta^j_i - \rho\Lambda^j_i)\Lambda_{jk} - \Lambda_{ik},$$

то есть

$$h^n_{ik} = \frac{1}{1+\rho_n}(\delta^j_i - \rho\Lambda^j_i)\Lambda_{jk} - \Lambda_{ik} \qquad (8.16)$$

Пусть точка F лежит на нормали $(x, \vec{e}_n)$ к гиперраспределению Δ^{n-1}:

$$\vec{F} = \vec{x} + \lambda\vec{e}_n.$$

Найдем многообразие фокальных направлений, для которых эта точка является фокальной. Учитывая условие фокальности точки F, получим уже известное равенство:

$$\omega^i + \lambda\omega^i_n = 0 \qquad (8.17)$$

С учетом (8.5) равенство (8.17) запишется так:

$$(\Lambda^i_j - \mu\delta^i_j)\omega^j = 0, \qquad (8.18)$$

где $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$. В общем случае для каждой точки F определено одно фокальное направление. При этом значение параметра μ, определяющего фокусы на нормали к гиперраспределению Δ^{n-1}, находится из уравнения:

$$\det(\Lambda^i_j - \mu\delta^i_j) = 0, \qquad (8.19)$$

обеспечивающего существование нетривиального решения системы (8.17). Уравнение (8.18) является характеристическим уравнением аффинора Λ^i_j. Степень этого уравнения равна (n-1), а его корнями будут собственные значения этого аффинора. Обозначим эти корни через μ_k. Тогда фокусы на нормали к гиперраспределению Δ^{n-1} можно находить из следующего равенства:

$$\overrightarrow{F}_k = \vec{x} + \frac{1}{\mu_k}\vec{e}_n.$$

Каждому фокусу на прямой (xy) соответствует направление, принадлежащее гиперраспределению Δ^{n-1}. В общем случае таких направлений будет (n-1). Эти (n-1) – направлений называются направлениями кривизны, относительно данной нормали. Другими словами, в области Ω определена (n-1)-ткань линий кривизны относительно нормали (xy), принадлежащая гиперраспределению Δ^{n-1}.

Из уравнений (8.18) и (8.19) получаем, что

$$\Lambda_{ij} = \mu_j g_{ij} \qquad (8.20)$$

Так как гиперраспределение Δ^{n-1} вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда 1-форма ω^n вполне интегрируема, то $D\omega^n = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega^n = 0$ и $\Lambda_{ij} - \Lambda_{ji} = 0$. Подставляя (8.20) в последнее равенство, получаем:

$$g_{ij}(\mu_j - \mu_i) = 0 \qquad (8.21)$$

Так как все μ_i различны, то (8.21) верно тогда и только тогда, когда $g_{ij} = 0\ (i \neq j)$, то есть (n-1)- ткань линий кривизны, принадлежащая гиперраспределению Δ^{n-1}, ортогональна, вообще говоря, тогда и только тогда, когда гиперраспределение Δ^{n-1} вполне интегрируемо. В случае, когда Δ^{n-1} параллельно $\overline{\Delta}^{n-1}$ получаем, что (n-1)- ткань линий кривизны, принадлежащая гиперраспределению Δ^{n-1}, ортогональна.

Рассмотрим теперь случай, когда все F_i совпадают. Так как в этом случае гиперраспределение Δ^{n-1} является сферическим, то $\Lambda_i = 0$ и $\Lambda_{ij} = \mu g_{ij}$. Тогда равенства (8.8а) примут вид:

$$\vec{a}_i = (1-\rho\mu)\vec{e}_i$$
$$\vec{a}_n = (1+\rho_n)\vec{e}_n \qquad (8.21)$$

Тогда $\overline{g}_{ij} = (\vec{a}_i, \vec{a}_j) = (1-\rho\mu)^2 g_{ij}$, $\overline{g}_{in} = 0$, $\overline{g}_{nn} = (1+\rho_n)^2 g_{nn}$.

Последние формулы говорят о том, что соответствие Петерсона представляет собой, в общем случае, конформное отображение областей евклидова пространства в рассматриваемом случае. Покажем, что для линий, принадлежащих гиперраспределению Δ^{n-1}, коэффициент конформности постоянен. Для этого продифференцируем $(1-\rho\mu)^2$ и $(1+\rho_n)^2$. Получим соответственно:

$$d(1-\rho\mu)^2 = 2(1-\rho\mu)(-\mu d\rho) = 2\mu(\rho\mu - 1)\rho_n\omega^n,$$

где учтено, что $d\mu = 0$. Также имеем

$$d(1+\rho_n)^2 = 2(1+\rho_n)d\rho_n.$$

С учетом (9.9) и (9.10), получим:

$$d\rho_n = -\rho_n\Lambda_i\omega^i + \rho_{nn}\omega^n = 0,$$

так как гиперраспределение Δ^{n-1} сферическое и для него $\Lambda_i = 0$.

Тогда для линий, принадлежащих гиперраспределению Δ^{n-1}, имеем

$$d(1-\rho\mu)^2 = 0 \quad \text{и} \quad d(1+\rho_n)^2 = 0.$$

Тем самым соответствие Петерсона, в случае сферического гиперраспределения Δ^{n-1}, является преобразованием гомотетии с центром в точке F.

Так как $\overline{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + h^n_{ij}$, то согласно (8.10) получим:

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + \frac{1}{1+\rho_n}(\delta^k_i - \rho\Lambda^k_i)\Lambda_{kj} - \Lambda_{ij} = \frac{1}{1+\rho_n}(\delta^k_i - \rho\Lambda^k_i)\Lambda_{kj}.$$

В случае, когда все фокусы на нормали к гиперраспределению Δ^{n-1}совпадают, то есть для сферического гиперраспределения, последнее равенство запишется так:

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \frac{\mu}{1+\rho_n}(1-\rho\mu)g_{ij}.$$

Так как $g_{ij} = \dfrac{1}{(1-\rho\mu)^2}\overline{g}_{ij}$, то получаем

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \frac{\mu}{(1+\rho_n)(1-\rho\mu)}\overline{g}_{ij}, \tag{8.22}$$

то есть основной тензор гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$, как и Δ^{n-1}, пропорционален метрическому тензору $\overline{g}_{ij}$ области $\overline{\Omega}$. Нормаль к $\overline{\Delta}^{n-1}$ в случае пары параллельных гиперраспределений проходит через неподвижную точку F. Отсюда следует, что $\overline{\Delta}^{n-1}$ является сферическим гиперраспределением.

Теорема 2.11. Если $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ является соответствием Петерсона, то сферическое гиперраспределение Δ^{n-1}переходит в сферическое $\overline{\Delta}^{n-1}$.

В случае соответствия Петерсона для сферического гиперраспределения Δ^{n-1} вычисляются компоненты тензора h_{ij}^n:

$$h_{ij}^n = -\frac{\mu(\rho\mu+\rho_n)}{1+\rho_n}g_{ij} \tag{8.23}$$

Как видно из (8.23), в случае ортогональности репера $R_x = \left\{x, \vec{e}_A\right\}$тензор h_{ij}^n будет иметь диагональный вид. В том случае, когда на нормали к гиперраспределению существует (n-1) фокус, данный тензор, согласно формуле (8.16), примет вид:

$$h_{ik}^n = \frac{1}{1+\rho_n}(\delta_i^j - \rho\delta_i^j\mu_i)\Lambda_{jk} - \Lambda_{ik} = -\frac{\rho\mu_i+\rho_n}{1+\rho_n}\mu_k g_{ik}.$$