## *2.9. Особенности моделирования движения крови в сосуде*

В этом параграфе снова рассматривается дифференцируемое отображение $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ между областями евклидова пространства $E^n$ для применения структурных параметров при моделировании движения крови в сосуде. В первой области естественным образом определяется гиперраспределение, связанный с ним репер второго порядка, а также принадлежащие ему вектора второго порядка. Здесь продолжаются исследования, начатые в ранее изданных работах [125, 126].

Пусть точка $x\in\Omega\subset E^n$ и каждой точке $x$ поставим в соответствие точку $y=f(x)\in\overline{\Omega}\subset E^n$. Уравнения перемещения реперов $\left\{x,\vec{e}_A\right\}$ и $\left\{y,\vec{a}_A\right\}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{x}&=\omega^A\vec{e}_A, & d\vec{e}_A&=\omega_A^B\vec{e}_B \\ d\vec{y}&=\varpi^A\vec{a}_A, & d\vec{a}_A&=\varpi_A^B\vec{a}_B \end{aligned} \tag{9.1}$$

1-формы,рассматриваемые в качестве параметров и входящие в эти уравнения, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства (2.2). В силу согласованного выбора реперов в точках $x$ и $y$ 1-формы $\omega^A$ и $\varpi^A$, определяющие перемещение этих точек, связаны равенствами:

$$\varpi^A=\omega^A \tag{9.2}$$

Дифференцируя равенства (9.2) внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi_B^A-\omega_B^A=h_{BC}^A\omega^C, \tag{9.3}$$

где $h_{BC}^A=h_{CB}^A$ - симметричный тензор деформации евклидовой связности при точечном соответствии $f$.

Свяжем с точкой $x$ такой репер, что вектор $\vec{e}_n$ принадлежит прямой $(xy)$, а вектора $\vec{e}_i$ были ему ортогональны. Тем самым в каждой точке $x \in \Omega$ будет определена гиперплоскость $\xi(x)$, ортогональная прямой $(xy)$, а в области $\Omega$ будет задано гиперраспределение $\Delta^{n-1}$, $(x,\xi)$ - элемент этого гиперраспределения, состоящий из точки $x \in \Omega$ и проходящей через нее гиперплоскости $\xi = \xi(x)$.

Дифференциальные уравнения гиперраспределения имеют вид:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}\omega^j + \Lambda_i\omega^n \tag{9.4}$$

Тогда из уравнений (9.1) имеем:

$$d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j + \omega_i^n\vec{e}_n.$$

Последние равенства запишем в виде:

$$d\vec{e}_i - \omega_i^j\vec{e}_j = \omega_i^n\vec{e}_n = \Lambda_{ij}\omega^j\vec{e}_n + \Lambda_i\omega^n\vec{e}_n = \vec{e}_{ij}\omega^j + \vec{e}_{in}\omega^n,$$

где $\vec{e}_{ij} = \Lambda_{ij}\vec{e}_n$ и $\vec{e}_{in} = \Lambda_i\vec{e}_n$, причем $\vec{e}_{ij} \neq \vec{e}_{ji}$. Положим

$$\vec{y} = \vec{x} + \rho\vec{e}_n$$

и дифференцируя последнее равенство, найдем:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n \\ \vec{a}_n &= -\rho\Lambda^i\vec{e}_i + (1+\rho_n)\vec{e}_n, \end{aligned} \tag{9.5}$$

где $\Lambda_j^i = g^{ik}\Lambda_{kj}$, $\Lambda^i = g^{ij}\Lambda_j$ и $\rho_i\omega^i + \rho_n\omega^n = d\rho.$

Из равенств (9.1) имеем:

$$d\vec{a}_i = \varpi_i^j\vec{a}_j + \varpi_i^n\vec{a}_n.$$

При отображениях $f$ и $f^*$ гиперраспределению $\Delta^{n-1}$ соответствует гиперраспределение $\overline{\Delta}^{n-1}$. Дифференциальные уравнения гиперраспределения $\overline{\Delta}^{n-1}$ имеют, с учетом (9.2), вид

$$\varpi_i^n = \overline{\Lambda}_{ij}\omega^j + \overline{\Lambda}_i\omega^n.$$

Тогда

$$d\vec{a}_i - \varpi_i^j\vec{a}_j = \varpi_i^n\vec{a}_n = (\overline{\Lambda}_{ij}\vec{a}_n)\omega^j + (\overline{\Lambda}_i\vec{a}_n)\omega^n = \vec{a}_{ij}\omega^j + \vec{a}_{in}\omega^n,$$

где $\vec{a}_{ij} = \overline{\Lambda}_{ij}\vec{a}_j$ и $\vec{a}_{in} = \overline{\Lambda}_i\vec{a}_n$, причем $\vec{a}_{ij} \neq \vec{a}_{ji}$.

Из (9.3) получаем:

$$\varpi_i^n = \omega_i^n + h_{ij}^n\omega^j + h_{in}^n\omega^n$$

или

$$\overline{\Lambda}_{ij} = \Lambda_{ij} + h_{ij}^n, \quad \overline{\Lambda}_i = \Lambda_i + h_{in}^n.$$

Отсюда видно, что вполне интегрируемому гиперраспределению соответствует также вполне интегрируемое гиперраспределение.

Рассмотрим единичное векторное поле $\vec{e}_n$, ортогональное гиперраспределению $\Delta^{n-1}$ и направленное вдоль прямой $(xy)$. Ввиду того, что $\omega_n^n = 0$, то по аналогии, как это делалось не раз выше, запишем:

$$d\vec{e}_n = (-g^{ij}\Lambda_{jk}\vec{e}_i)\omega^k + (-g^{ij}\Lambda_j\vec{e}_i)\omega^n = \vec{e}_{nk}\omega^k + \vec{e}_{nn}\omega^n,$$

где векторы $\vec{e}_{nk}$ и $\vec{e}_{nn}$ принадлежат касательному пространству второго порядка $T^2$ к интегральной линии векторного поля $\vec{e}_n$ и

$$\vec{e}_{nk} = -g^{ij}\Lambda_{jk}\vec{e}_i = -\Lambda_k^i\vec{e}_i, \; \vec{e}_{nn} = -g^{ij}\Lambda_j\vec{e}_i = -\Lambda^i\vec{e}_i.$$

С учетом последних равенств, соотношения (9.5) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= \vec{e}_i + \rho\vec{e}_{nj} + \rho_i\vec{e}_n \\ \vec{a}_n &= \rho\vec{e}_{nn} + (1+\rho_n)\vec{e}_n \end{aligned} \qquad (9.6)$$

Как видно из (9.6) вектора $\vec{a}_A$ выражаются через вектора $\vec{e}_A$, а также через вектора $\vec{e}_{nA}$, принадлежащих касательному пространству второго порядка к интегральной линии векторного поля $\vec{e}_n$.

Вектора $\vec{e}_{AB}$ образуют вместе с векторами $\vec{e}_A$ репер второго порядка, связанный с точкой $x$ области $\Omega$. Поэтому вектора $\vec{e}_{AB}$ назовем векторами второго порядка.

Как видно из первого равенства (9.1) точка $x$ будет неподвижна тогда и только тогда, когда $d\vec{x} = \vec{0}$. Последнее возможно тогда и только тогда, когда $\omega^A \vec{e}_A = \vec{0}$. А это, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда $\omega^A = 0$. Для полной интегрируемости системы дифференциальных уравнений $\omega^A = 0$ должны выполняться структурные уравнения Лаптева Г.Ф.:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A.$$

Дифференцируя последние равенства внешним образом, получим:

$$D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A + \omega^C \wedge \omega_{BC}^A, \tag{9.7}$$

$$\omega_{BC}^A \wedge \omega^B \wedge \omega^C = 0 \tag{9.8}$$

Условий голономности $\omega_{[BC]}^A = 0$ достаточно для выполнения равенств (9.8), но эти условия не являются необходимыми. Оказывается, что соотношения (9.8) могут выполняться, когда формы $\omega_{BC}^A$ не симметричны по индексам B и C. Продолжая равенства (9.7) мы, каждый раз, будем получать формы $\omega_{B_1 \dots B_t}^A$, которые, в общем случае, не симметричны по нижним индексам. Продифференцируем первое уравнение (9.1) обычным образом, получим

$$d^2\vec{x} = d\omega^A \vec{e}_A + \omega^A d\vec{e}_A.$$

Это будет второй дифференциал точки $x$, который с ее первым дифференциалом $d\vec{x}$, определяет соприкасающуюся плоскость любой кривой, принадлежащей гиперраспределению $\Delta^{n-1}$. Второй дифференциал точки $x$ принадлежит касательному пространству 2-го порядка $T^2$, которое задается векторами $\vec{e}_A$ и их дифференциалами:

$$d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}.$$

Повторяя указанную процедуру, получим:

$$d\vec{e}_{AB} = \omega_A^C \vec{e}_{CB} + \omega_B^C \vec{e}_{AC} + \omega_{AB}^C \vec{e}_C + \omega^C \vec{e}_{ABC}, \tag{9.9}$$

где вектора $\vec{e}_{ABC}$ вместе с векторами $\vec{e}_A$ и $\vec{e}_{AB}$ образуют репер третьего порядка, связанный с точкой $x$.

При $\omega^A = 0$ последние соотношения принимают вид:

$$\delta\vec{e}_A = \pi_A^B \vec{e}_B \tag{9.10}$$

$$\delta\vec{e}_{AB} = \pi_A^C \vec{e}_{CB} + \pi_B^C \vec{e}_{AC} + \pi_{AB}^C \vec{e}_C \tag{9.11}$$

Равенства (9.10) – это хорошо известные инфинитезимальные перемещения репера первого порядка, присоединенного к точке $x$, а вместе последние равенства (9.10) и (9.11) представляют собой инфинитезимальные перемещения репера второго порядка. При этом формы $\pi_B^A$ и $\pi_{BC}^A$ представляют собой инвариантные формы дифференциальной группы второго порядка $D_2$. Аналогично можно получить дальнейшие продолжения равенств $D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A$ и (9.7), тем самым определяя дифференциальные группы любого порядка. Также можно неограниченно продолжать и равенства (9.9).

Дифференцируя первое уравнение (9.1) внешним образом, а также используя равенства для $D\omega^A$ и $d\vec{e}_A$, получим:

$$D(d\vec{x}) = \omega^B \wedge \omega^A \vec{e}_{AB} \tag{9.12}$$

Из равенства (9.12) видно, что $Dd\vec{x} = 0$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\vec{e}_{[AB]} = \vec{0} \tag{9.13}$$

Дифференцируя уравнения $d\vec{e}_A$ внешним образом, получим:

$$Dd\vec{e}_A = \omega^C \wedge \omega^B \vec{e}_{ABC}, \tag{9.14}$$

то есть $Dd\vec{e}_A = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\vec{e}_{A[BC]} = \vec{0}$. Последнее, вместе с результатом альтернирования уравнений (9.9) при условиях (9.13) дает симметрию векторов $\vec{e}_{ABC}$ по всем индексам. Аналогично можно показать, что симметричность векторов $\vec{e}_{A_1 \ldots A_t}$ эквивалентно обращению в нуль-вектор внешних дифференциалов от обычных дифференциалов точки $X$ и векторов $\vec{e}_{A_1 \ldots A_{t-1}}$.

Рассмотрим скалярные произведения:

$$\vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_j = -\Lambda_{ji}, \quad \vec{e}_{nn} \cdot \vec{e}_i = -\Lambda_i \tag{9.15}$$

С учетом (9.15) дифференциальные уравнения гиперраспределения $\Delta^{n-1}$ примут вид:

$$\omega_i^n = -(\vec{e}_{nj}\vec{e}_i)\omega^j - (\vec{e}_{nn}\vec{e}_i)\omega^n \tag{9.16}$$

Как видно из соотношений (9.16), дифференциальные уравнения гиперраспределения $\Delta^{n-1}$ выражаются через скалярные произведения векторов, принадлежащих реперу второго порядка. Исходя из этого, найдем условия ортогональности векторов, образующих репер второго порядка, но один из векторов принадлежит реперу первого порядка, а второй – реперу второго порядка. Из равенств (9.15) получаем:

$$\vec{e}_{ni} \cdot \vec{e}_j = 0.$$

Последнее возможно тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij} = 0$. Равенство нулю основного тензора гиперраспределения $\Delta^{n-1}$ возможно тогда и только тогда, когда оно является одновременно вполне интегрируемым и плоским, то есть будет представлять собой 1-параметрическое семейство гиперплоскостей.

Из второго равенства (9.15) видно, что $\vec{e}_{nn} \cdot \vec{e}_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_i = 0$. Известно, что в случае равенства нулю ковектора $\Lambda_i$ интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми. Отсюда получаем еще одну теорему.

***Теорема 2.12.*** Вектора $\vec{e}_{nn}$ и $\vec{e}_i$ ортогональны тогда и только тогда, когда интегральные линии векторного поля $\vec{e}_n$ являются прямыми.

На основании равенств (9.15) можно заключить, что гиперраспределение $\Delta^{n-1}$ является:

1) вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда $\vec{e}_{ni}\cdot\vec{e}_j=\vec{e}_{nj}\cdot\vec{e}_i$;

2) плоским тогда и только тогда, когда $\vec{e}_{ni}\cdot\vec{e}_j=-\vec{e}_{nj}\cdot\vec{e}_i$;

3) сферическим тогда и только тогда, когда $\vec{e}_{ni}\cdot\vec{e}_j=\mu g_{ij}$, где $\mu\in R$.

Так как для сферического гиперраспределения интегральные линии векторного поля, ортогонального к этому гиперраспределению, являются прямыми, то можно сформулировать следующее предложение.

***Теорема 2.13.*** Для сферического гиперраспределения вектора $\vec{e}_{nn}$ и $\vec{e}_i$ ортогональны.

Вектора $\vec{a}_{ij}$ и $\vec{a}_{in}$ принадлежат реперу второго порядка, связанного с точкой $y$. Умножим равенства $\overline{\Lambda}_{ij}=\Lambda_{ij}+h^n_{ij}$ на вектор $\vec{a}_n$, получим:

$$\vec{a}_{ij}=(\Lambda_{ij}+h^n_{ij})\vec{a}_n=(\Lambda_{ij}+h^n_{ij})(-\rho\Lambda^k\vec{e}_k+(1+\rho_n)\vec{e}_n)=$$
$$=-\rho\Lambda^k(\Lambda_{ij}+h^n_{ij})\vec{e}_k+(1+\rho_n)\vec{h}_{ij}+(1+\rho_n)\vec{e}_{ij},$$

где $\vec{h}_{ij}=h^n_{ij}\vec{e}_n$.

Аналогично найдем:

$$\vec{a}_{in}=-\rho(\Lambda_i\Lambda^j+h^n_{in}\Lambda^j)\vec{e}_j+(1+\rho_n)\vec{h}_i+(1+\rho_n)\vec{e}_{in},$$

где $\vec{h}_i=h^n_{in}\vec{e}_n$. Тем самым, репер второго порядка, связанный с точкой $y\in\overline{\Omega}$, определяется через репер второго порядка в точке $x\in\Omega$. В случае, когда гиперраспределение $\Delta^{n-1}$ является одновременно плоским и вполне интегрируемым, то вектора $\vec{a}_{ij}$ будут зависеть только от векторов, принадлежащих реперу первого порядка в точке $x \in \Omega$.

## *Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В СИСТЕМЕ КРОВООБРАЩЕНИЯ*

При выборе пространства, соответствующего пространству системы кровообращения, учитывалась идея Вернадского В.И., в которой он говорит о том, что пространством всего живого должно быть риманово пространство. Изучением свойств римановых пространств постоянной кривизны еще в 19 веке занимались такие математики как Лобачевский, Гаусс, Больаи, Риман, Бельтрами, Пуанкаре, Клейн, Киллинг и другие. Причем, вначале, геометрия Лобачевского и геометрия Римана (или эллиптическая геометрия) рассматривались и изучались как неевклидовы геометрии. Затем было выяснено, что эти геометрии вместе с евклидовой геометрией имеют больше общих свойств, чем отличий. Пространства Евклида, Лобачевского и Римана составляют один из важнейших классов римановых пространств и характеризуются в них постоянством кривизны, которая, соответственно, принимает значения $K = 0$, $K < 0$ и $K > 0$.

К общим свойствам римановых пространств постоянной кривизны относится свойство геодезических линий этих пространств, которое заключается в том, что только у этих пространств геодезические линии являются «прямыми». В таких пространствах всегда можно указать систему координат, в которой геодезические линии задаются линейными уравнениями. При отображении таких пространств на евклидово пространство, их геодезические будут переходить в прямые линии.

Дальнейшие исследования римановых пространств приводили к различным обобщениям пространств постоянной кривизны. Одни из таких обобщений получили дальнейшее развитие, а другие не получили такого развития. К обобщениям пространств постоянной кривизны, которые стали развиваться в рамках римановой геометрии, можно выделить симметрические пространства, рассмотренные в начале Э. Картаном и казанским геометром А.П. Широковым. В этом случае обобщалось свойство пространств постоянной кривизны допускать симметрию относительно каждой своей точки. Еще одно обобщение свойств пространств постоянной кривизны было предложено В.Ф. Каганом в виде введения понятия субпроективного пространства, где обобщаются проективные свойства этих пространств. Здесь рассматриваются римановы пространства, геодезические линии которых являются плоскими кривыми. Такое пространство должно обладать аффинной связностью.

В данной главе рассматривается геометрия римановых и субпроективных римановых пространств, основываясь на методах, которые применялись в главе 2.

### *3.1. Конформное отображение при моделировании движения крови в сердечно-сосудистой системе*

Конформные соответствия между евклидовым и римановым пространствами также широко представлены в литературе, но меньше, чем конформные отображения между евклидовыми пространствами. Конформное соответствие между евклидовым и римановым пространствами позволяет получить пространство, которое можно использовать в приложениях, например, при рассмотрении геометрии сердечно-сосудистой системы (ССС) человека и которое позволяет исследовать движение крови в системе кровообращения.

Пусть $E^n$ - евклидово n-мерное пространство, $V^n$ - n-мерное риманово пространство и $f:\Omega \to \overline{\Omega}$ - точечное невырожденное дифференцируемое отображение области $\Omega$ пространства $E^n$ в область $\overline{\Omega}$ пространства $V^n$ так, что для точки $x \in \Omega$ имеем $y = f(x) \in \overline{\Omega}$. Присоединим к точке $x$ множество всех реперов $\left\{x, \vec{e}_A\right\}$ с началом в этой точке. Положим $\vec{a}_A = f_x^*(\vec{e}_A)$, где, как всегда $f_x^*$ - касательное линейное отображение к отображению $f$ в точке $x$. Так как $f_x^*$ - невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в касательном пространстве к $V^n$. Данный вид отображения рассматривался автором в работе [139].

Уравнения перемещения реперов $\left\{x, \vec{e}_A\right\}$ и $\left\{y, \vec{a}_A\right\}$ запишем в виде:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A,\ d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B,\ d\vec{y} = \varpi^A \vec{a}_A,\ d\vec{a}_A = \varpi_A^B \vec{a}_B + \varpi^B \vec{a}_{AB}, \quad (1.1)$$

где $\vec{a}_{AB}$ - векторы, образующие с $\vec{a}_A$ репер второго порядка, связанный с точкой $y$ [139]. Причем вектора $\vec{a}_{AB}$ могут быть как симметричными по нижним индексам, так и не быть симметричными. В первом случае репер называется голономным и с ним можно связать вполне интегрируемое гиперраспределение по аналогии, как это делалось в 2.10, но здесь оно рассматривается в касательном расслоении к $V^n$. Во втором случае, репер принято называть неголономным и с ним можно связать не голономное гиперраспределение, заданное в касательном расслоении к $V^n$ в некоторой окрестности точки *y*.

Дифференциальные формы $\omega^A$ и $\omega_A^B$, входящие в соотношения (1.1), удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства, а дифференциальные формы $\varpi^A$ и $\varpi_A^B$, удовлетворяют уравнениям структуры риманова пространства:

$$D\varpi^A = \varpi^B \wedge \varpi_B^A, \quad D\varpi_B^A = \varpi_B^C \wedge \varpi_C^A + \frac{1}{2}\overline{R}_{BCL}^A \varpi^C \wedge \varpi^L, \qquad (1.2)$$

где $\overline{R}^{A}_{BCL}$ - тензор кривизны риманова пространства $V^n$.

Обозначим через $g_{AB}$ и $\overline{g}_{AB}$ - метрические тензоры пространств $E^n$ и $V^n$ в точках $x$ и $y$ соответственно. В силу (1.1) элементы длины в этих пространствах записываются в виде:

$$ds^2 = g_{AB}\omega^A\omega^B, \quad d\overline{s}^2 = \overline{g}_{AB}\varpi^A\varpi^B \qquad (1.3)$$

Тензоры $g_{AB}$ и $\overline{g}_{AB}$, опять же в силу (1.1), удовлетворяют уравнениям:

$$dg_{AB} = g_{AC}\omega^C_B + g_{CB}\omega^C_A, \; d\overline{g}_{AB} = \overline{g}_{AC}\varpi^C_B + \overline{g}_{CB}\varpi^C_A + \overline{g}_{ABC}\varpi^C, \qquad (1.4)$$

где $\overline{g}_{ABC} = \vec{a}_{AC}\vec{a}_B + \vec{a}_A\vec{a}_{BC}$.

В силу согласованного выбора реперов в пространствах $E^n$ и $V^n$, 1-формы $\omega^A$ и $\varpi^A$, определяющие перемещение точек $x$ и $y$, связаны равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A \qquad (1.5)$$

Эти равенства представляют собой основные дифференциальные уравнения рассматриваемого соответствия $f$ между евклидовым и римановым пространствами. Дифференцируя последние равенства внешним образом и используя лемму Картана, получим:

$$\varpi^A_B - \omega^A_B = h^A_{BC}\omega^C, \qquad (1.6)$$

где $h^A_{BC} = h^A_{CB}$.

Пусть отображение $f$ является конформным. Тогда можно положить, что $d\overline{s}^2 = \lambda^2 ds^2$, где $\lambda$ - коэффициент конформности, зависящий от точки $x: \lambda = \lambda(x)$. Для удобства дальнейших вычислений, положим $\lambda = e^{\alpha}$, то есть можно записать

$$\overline{g}_{AB} = e^{2\alpha} g_{AB}.$$

Дифференцируя последние соотношения и используя формулы, приведенные в этом параграфе, будем получать:

$$e^{2\alpha}g_{AC}(\varpi_B^C-\omega_B^C)+e^{2\alpha}g_{CB}(\varpi_A^C-\omega_A^C)+\overline{g}_{ABC}\omega^C=2e^{2\alpha}g_{AB}d\alpha\,.$$

Так как $\alpha=\alpha(x)$, то

$$d\alpha=\alpha_A\omega^A.$$

Ввиду этого предпоследнее равенство перепишется:

$$e^{2\alpha}g_{AC}h_{BL}^C+e^{2\alpha}g_{BC}h_{AL}^C+\overline{g}_{ABL}=2e^{2\alpha}g_{AB}\alpha_L.$$

Делая циклическую замену $A$ на $B$, $B$ на $L$ и $L$ на $A$, запишем еще два равенства:

$$e^{2\alpha}g_{BC}h_{LA}^C+e^{2\alpha}g_{LC}h_{BA}^C+\overline{g}_{BLA}=2e^{2\alpha}g_{BL}\alpha_A$$
$$e^{2\alpha}g_{LC}h_{AB}^C+e^{2\alpha}g_{AC}h_{LB}^C+\overline{g}_{LAB}=2e^{2\alpha}g_{LA}\alpha_B.$$

Складывая первые два равенства и вычитая третье, найдем компоненты тензора

$$h_{BC}^A=\delta_B^A\alpha_C+\delta_C^A\alpha_B-g_{BC}\alpha^A-\frac{1}{2e^{2\alpha}}g^{AL}(\overline{g}_{LBC}+\overline{g}_{CLB}-\overline{g}_{BCL}),\quad(1.7)$$

где $\alpha^A=g^{AB}\alpha_B$.

Введем обозначения

$$\gamma_{BC}^A=-\frac{1}{2e^{2\alpha}}g^{AL}(\overline{g}_{LBC}+\overline{g}_{CLB}-\overline{g}_{BCL})\qquad(1.8)$$

Тогда $\gamma_{CB}^A=-\dfrac{1}{2e^{2\alpha}}g^{AL}(\overline{g}_{LCB}+\overline{g}_{BLC}-\overline{g}_{CBL})$.

Далее, запишем следующие величины:

$$\overline{g}_{LCB}=\vec{a}_{LB}\vec{a}_C+\vec{a}_L\vec{a}_{CB},\quad \overline{g}_{BLC}=\vec{a}_{BC}\vec{a}_L+\vec{a}_B\vec{a}_{LC}$$
$$\overline{g}_{CBL}=\vec{a}_{CL}\vec{a}_B+\vec{a}_C\vec{a}_{BL},\quad \overline{g}_{LBC}=\vec{a}_{LC}\vec{a}_B+\vec{a}_L\vec{a}_{BC}$$
$$\overline{g}_{CLB}=\vec{a}_{CB}\vec{a}_L+\vec{a}_C\vec{a}_{LB},\quad \overline{g}_{BCL}=\vec{a}_{BL}\vec{a}_C+\vec{a}_B\vec{a}_{CL}$$

Отсюда видно, что $\overline{g}_{LCB}=\overline{g}_{CLB}$, $\overline{g}_{BLC}=\overline{g}_{LBC}$, $\overline{g}_{CBL}=\overline{g}_{BCL}$, то есть величины $\overline{g}_{ABC}$ симметричны по первым двум индексам. Тогда

$$\gamma^A_{BC}=-\frac{1}{2e^{2\alpha}}g^{AL}(\vec{a}_{LC}\vec{a}_B+\vec{a}_L\vec{a}_{BC}+\vec{a}_{CB}\vec{a}_L+\vec{a}_C\vec{a}_{LB}-\vec{a}_{BL}\vec{a}_C-\vec{a}_B\vec{a}_{CL})$$

и

$$\gamma^A_{CB}=-\frac{1}{2e^{2\alpha}}g^{AL}(\vec{a}_{LB}\vec{a}_C+\vec{a}_L\vec{a}_{CB}+\vec{a}_{BC}\vec{a}_L+\vec{a}_B\vec{a}_{LC}-\vec{a}_{CL}\vec{a}_B-\vec{a}_C\vec{a}_{BL}).$$

Отсюда видно, что $\gamma^A_{BC}=\gamma^A_{CB}$.

С учетом введенного обозначения, получим:

$$h^A_{BC}=\delta^A_B\alpha_C+\delta^A_C\alpha_B-g_{BC}\alpha^A+\gamma^A_{BC} \tag{1.9}$$

Подставляя равенства (1.9) в равенства (1.6), получим:

$$\varpi^A_B-\omega^A_B=\delta^A_B d\alpha+\alpha_B\omega^A-\alpha^A\omega_B+\gamma^A_{BC}\omega^C, \tag{1.10}$$

где $\omega_B=g_{BC}\omega^C$.

Для упрощения дальнейших вычислений, введем в римановом пространстве $V^n$ новые формы:

$$\theta^A_B=\varpi^A_B-\gamma^A_{BC}\omega^C.$$

Тогда равенства (1.10) примут вид:

$$\theta^A_B-\omega^A_B=\delta^A_B d\alpha+\alpha_B\omega^A-\alpha^A\omega_B \tag{1.11}$$

При $\omega^A=0$ имеем $\theta^A_B\big|_{\omega^A=0}=\sigma^A_B$ и $\varpi^A_B\big|_{\omega^A=0}=\pi^A_B$. Тогда $\sigma^A_B=\pi^A_B$.

Так как структурной группой римановой структуры является ортогональная группа *O(n)*, то инвариантные формы $\sigma^A_B$ этой группы удовлетворяют условиям:

$$\sigma_B^A + \sigma_A^B = 0.$$

Ввиду этого можно также считать, что формы $\theta_B^A$ также удовлетворяют уравнениям $\theta_B^A + \theta_A^B = 0$. Ввиду того, что $\sigma_B^A = \pi_B^A$, то формы $\varpi_B^A$ также будут удовлетворять уравнениям: $\varpi_B^A + \varpi_A^B = 0$. По аналогии с равенствами для $\theta_B^A$, запишем $\theta_A^B = \varpi_A^B - \gamma_{AC}^B \omega^C$. Почленно складывая равенства для $\theta_B^A$ и последние равенства, получим:

$$\theta_B^A + \theta_A^B = \varpi_B^A + \varpi_A^B - (\gamma_{BC}^A + \gamma_{AC}^B)\omega^C.$$

С учетом того, что $\theta_B^A + \theta_A^B = 0$ и $\varpi_B^A + \varpi_A^B = 0$, получим ввиду линейной независимости форм $\omega^C$:

$$\gamma_{BC}^A = -\gamma_{AC}^B,$$

то есть величины $\gamma_{BC}^A$ кососимметричны по индексам $A$ и $B$. На основании этого будем иметь:

$$\gamma_{BC}^A = \gamma_{CB}^A = -\gamma_{AB}^C = -\gamma_{BA}^C = \gamma_{CA}^B = \gamma_{AC}^B = -\gamma_{BC}^A.$$

Отсюда видно, что $\gamma_{BC}^A = 0$. Тогда

$$\theta_B^A = \varpi_B^A \tag{1.12}$$

Используя последние равенства покажем, что второе из равенств (1.4) можно переписать в виде:

$$d\overline{g}_{AB} = \overline{g}_{AC}\varpi_B^C + \overline{g}_{CB}\varpi_A^C \tag{1.13}$$

Для этого во второе из равенств (1.4) подставим $\varpi_B^A = \theta_B^A + \gamma_{BC}^A \omega^C$. Тогда

$$\begin{aligned} d\overline{g}_{AB} &= \overline{g}_{AC}(\theta_B^C + \gamma_{BK}^C \omega^K) + \overline{g}_{CB}(\theta_A^C + \gamma_{AK}^C \omega^K) + \overline{g}_{ABK}\omega^K = \\ &= \overline{g}_{AC}\theta_B^C + \overline{g}_{CB}\theta_A^C + (\overline{g}_{ABK} + \overline{g}_{AC}\gamma_{BK}^C + \overline{g}_{CB}\gamma_{AK}^C)\omega^K \end{aligned} \tag{1.14}$$

Покажем, что в последних равенствах величины $\gamma^{A}_{BK}$ можно подобрать таким образом, чтобы правые части в этих равенствах стали равными нулю. Для этого рассмотрим систему уравнений:

$$\overline{g}_{ABK} = -\overline{g}_{AC}\gamma^{C}_{BK} - \overline{g}_{CB}\gamma^{C}_{AK}.$$

Проделывая циклическую замену по индексам $A$, B, K, получим:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{BKA} &= -\overline{g}_{BC}\gamma^{C}_{KA} - \overline{g}_{CK}\gamma^{C}_{BA}\\ \overline{g}_{KAB} &= -\overline{g}_{KC}\gamma^{C}_{AB} - \overline{g}_{CA}\gamma^{C}_{KB}\end{aligned}.$$

Складывая второе и третье из этих соотношений, а также вычитая из суммы первое равенство, получим:

$$\overline{g}_{BKA} + \overline{g}_{KAB} - \overline{g}_{ABK} = -2\overline{g}_{CK}\gamma^{C}_{AB}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\overline{g}^{LK}$, получим:

$$\gamma^{L}_{AB} = -\frac{1}{2}\overline{g}^{LK}(\overline{g}_{BKA} + \overline{g}_{KAB} - \overline{g}_{ABK}).$$

Подставим эти выражения для $\gamma^{K}_{AB}$ в правую часть формул (1.14):

$$\begin{aligned}d\overline{g}_{AB} &= \overline{g}_{AC}\theta^{C}_{B} + \overline{g}_{CB}\theta^{C}_{A} + (\overline{g}_{ABK} - \frac{1}{2}\overline{g}_{AC}\cdot\overline{g}^{CL}(\overline{g}_{KLB} + \overline{g}_{LBK} - \overline{g}_{BKL}) -\\ &-\frac{1}{2}\overline{g}_{CB}\cdot\overline{g}^{CL}\cdot(\overline{g}_{KLA} + \overline{g}_{LAK} - \overline{g}_{AKL}))\omega^{K} = \overline{g}_{AC}\theta^{C}_{B} + \overline{g}_{CB}\theta^{C}_{A} +\\ &+(\overline{g}_{ABK} - \frac{1}{2}(\overline{g}_{KAB} + \overline{g}_{ABK} - \overline{g}_{BKA}) - \frac{1}{2}(\overline{g}_{KBA} + \overline{g}_{BAK} - \overline{g}_{AKB}))\omega^{K} =\\ &= \overline{g}_{AC}\theta^{C}_{B} + \overline{g}_{CB}\theta^{C}_{A},\end{aligned}$$

где учтена симметричность величин $\overline{g}_{ABC}$ по первым двум индексам, которая следует из их представления через векторы репера второго порядка. Тогда, согласно (1.12), имеем:

$$d\overline{g}_{AB} = \overline{g}_{AC}\varpi^C_B + \overline{g}_{CB}\varpi^C_A \tag{1.15}$$

Ввиду приведенных выше рассуждений, равенства (1.10) запишутся:

$$\varpi^A_B - \omega^A_B = \delta^A_B d\alpha + \alpha_B\omega^A - \alpha^A\omega_B \tag{1.16}$$

По тем же причинам равенства (1.9) примут вид:

$$h^A_{BC} = \delta^A_B\alpha_C + \delta^A_C\alpha_B - g_{BC}\alpha^A \tag{1.17}$$

Дифференцируя уравнения (1.16) внешним образом, получим:

$$(d\alpha_A - \alpha_K\omega^K_A - \alpha_A d\alpha + \beta\omega_A)\wedge\omega_B - (d\alpha_B - \alpha_K\omega^K_B - \alpha_B d\alpha +$$

$$+\beta\omega_B)\wedge\omega_A - \frac{1}{2}\overline{R}_{BAKL}\omega^K\wedge\omega^L = 0,$$

где, по-прежнему, $\beta = \dfrac{1}{2}g^{KL}\alpha_K\alpha_L$.

Последние равенства перепишем в виде:

$$(\nabla\alpha_A - \alpha_A d\alpha + \beta\omega_A)\wedge\omega_B - (\nabla\alpha_B - \alpha_B d\alpha + \beta\omega_B)\wedge\omega_A -$$

$$-\frac{1}{2}\overline{R}_{BAKL}\omega^K\wedge\omega^L = 0,$$

где $\nabla\alpha_A = d\alpha_A - \alpha_K\omega^K_A$ - ковариантный дифференциал ковектора $\alpha_A$.

Дифференцируя внешним образом равенство $d\alpha = \alpha_A\omega^A$, получим:

$$\nabla\alpha_A\wedge\omega^A = 0.$$

Из последних соотношений, в силу леммы Картана следует, что

$$\nabla\alpha_A = \alpha_{AB}\omega^B, \tag{1.18}$$

где $\alpha_{AB} = \alpha_{BA}$.

Далее имеем, с учетом равенств (1.18):

$$\nabla\alpha_A - \alpha_A d\alpha + \beta\omega_A = (\alpha_{AB} - \alpha_A\alpha_B + \beta g_{AB})\omega^B = \overline{\alpha}_{AB}\omega^B,$$

где

$$\overline{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB} - \alpha_A \alpha_B + \beta g_{AB} - \qquad (1.19)$$

также симметричный тензор. Поэтому имеем:

$$\overline{\alpha}_{AK}\omega^K \wedge g_{BL}\omega^L - \overline{\alpha}_{BK}\omega^K \wedge g_{AL}\omega^L - \frac{1}{2}\overline{R}_{BAKL}\omega^K \wedge \omega^L = 0,$$

или

$$(\overline{\alpha}_{AK} g_{BL} - \overline{\alpha}_{BK} g_{AL} - \frac{1}{2}\overline{R}_{BAKL})\omega^K \wedge \omega^L = 0.$$

Из последних соотношений получаем:

$$\overline{\alpha}_{AK} g_{BL} - \overline{\alpha}_{AL} g_{BK} - \overline{\alpha}_{BK} g_{AL} + \overline{\alpha}_{BL} g_{AK} - R_{BAKL} = 0,$$

где $R_{BAKL} = \overline{R}_{BA[KL]}$.

Последнее равенство перепишем в виде:

$$R_{ABKL} = \overline{\alpha}_{BL} g_{AK} + \overline{\alpha}_{AK} g_{BL} - \overline{\alpha}_{BK} g_{AL} - \overline{\alpha}_{AL} g_{BK} \qquad (1.20)$$

Следуя терминологии Нордена А.П., такое риманово пространство назовем конформно-евклидовым и будем обозначать $C^n$.

Свертывая равенства (1.20) с $g^{AK}$, получим:

$$g^{AK} R_{ABKL} = n\overline{\alpha}_{BL} + \overline{\alpha} g_{BL} - \overline{\alpha}_{BL} - \overline{\alpha}_{BL},$$

где $\overline{\alpha} = g^{AK}\overline{\alpha}_{AK}$.

Так как $\overline{g}_{AB} = e^{2\alpha} g_{AB}$, то при умножении этого равенства на $g^{BK}$, получим:

$$g^{BK} = e^{2\alpha}\overline{g}^{BK}.$$

Подставляя эти равенства в предпоследние, запишем:

$$e^{2\alpha} R_{BL} = (n-2)\overline{\alpha}_{BL} + \overline{\alpha} g_{BL},$$

где $R_{BL}$ – тензор Риччи пространства $C^n$. Тогда

$$\overline{\alpha}_{BL}=\frac{e^{2\alpha}}{n-2}R_{BL}-\frac{\overline{\alpha}}{n-2}g_{BL} \tag{1.21}$$

Подставляя (1.21) в (1.20), получим еще одно выражение для тензора $R_{ABKL}$, который называют ковариантным тензором кривизны:

$$R_{ABKL}=\frac{e^{2\alpha}}{n-2}(R_{BL}g_{AK}+R_{AK}g_{BL}-R_{BK}g_{AL}-R_{AL}g_{BK})-$$
$$-\frac{2\overline{\alpha}}{n-2}(g_{BL}g_{AK}-g_{BK}g_{AL}). \tag{1.22}$$

Найдем, каким уравнениям удовлетворяет в конформно-евклидовом пространстве тензор $\overline{\alpha}_{AK}$. Для этого найдем ковариантный дифференциал равенств (1.19):

$$\nabla\overline{\alpha}_{AB}=\nabla\alpha_{AB}-\nabla(\alpha_A\alpha_B)+\nabla(\beta g_{AB})$$

или

$$\nabla\overline{\alpha}_{AB}=\nabla\alpha_{AB}-\nabla\alpha_A\cdot\alpha_B-\alpha_A\nabla\alpha_B+\nabla\beta\cdot g_{AB}.$$

Найдем

$$\nabla\beta=\frac{1}{2}(g^{AB}\alpha_A\alpha_B)=\frac{1}{2}g^{AB}(\nabla\alpha_A\cdot\alpha_B+\alpha_A\nabla\alpha_B).$$

Согласно соотношениям (11.18), последнее равенство примет вид:

$$\nabla\beta=\frac{1}{2}g^{AB}(\alpha_B\alpha_{AK}+\alpha_A\alpha_{BK})\omega^K.$$

Тогда

$$\nabla\overline{\alpha}_{AB}=\nabla\alpha_{AB}+(\frac{1}{2}g_{AB}g^{CL}(\alpha_L\alpha_{CK}+\alpha_C\alpha_{LK})-\alpha_B\alpha_{AK}-\alpha_A\alpha_{BK})\omega^K.$$

Продифференцируем равенства $\nabla\alpha_A=\alpha_{AB}\omega^B$ внешним образом и, используя лемму Картана, получим:

$$\nabla \alpha_{AB} = \alpha_{ABC}\omega^C,$$

где $\nabla \alpha_{AB} = d\alpha_{AB} - \alpha_{AC}\omega_B^C - \alpha_{CB}\omega_A^C$ и $\alpha_{ABC}$ - симметричный по всем нижним индексам тензор. Тогда, с учетом последнего равенства, запишем:

$$\nabla \overline{\alpha}_{AB} = (\alpha_{ABK} + \frac{1}{2} g_{AB} g^{CL}(\alpha_L \alpha_{CK} + \alpha_C \alpha_{LK}) -$$
$$- \alpha_B \alpha_{AK} - \alpha_A \alpha_{BK})\omega^K = \overline{\alpha}_{ABK}\omega^K,$$

где

$$\overline{\alpha}_{ABK} = \alpha_{ABK} + \frac{1}{2} g_{AB}(\alpha^C \alpha_{CK} + \alpha^L \alpha_{LK}) - \alpha_B \alpha_{AK} - \alpha_A \alpha_{BK}.$$

Введем обозначение:

$$\nu_{ABK} = 2g_{AB}\alpha^C \alpha_{CK} - \alpha_B \alpha_{AK} - \alpha_A \alpha_{BK} \tag{1.23}$$

Тогда

$$\nabla \overline{\alpha}_{AB} = \overline{\alpha}_{ABK}\omega^K,$$

где $\overline{\alpha}_{ABK} = \alpha_{ABK} + \frac{1}{2}\nu_{ABK}$.

Величины $\nu_{ABK}$ образуют тензор как произведение и сумма тензоров. Найдем $\nu_{AKB}$. Для этого в (1.23) поменяем местами индексы $B$ и $K$:

$$\nu_{AKB} = 2g_{AK}\alpha^C \alpha_{CB} - \alpha_K \alpha_{AB} - \alpha_A \alpha_{KB}.$$

Далее, рассмотрим разность:

$$\nu_{ABK} - \nu_{AKB} = 2\alpha^C (g_{AB}\alpha_{CK} - g_{AK}\alpha_{CB}) + \alpha_K \alpha_{AB} - \alpha_B \alpha_{AK} =$$
$$= 2\alpha^C (\delta_B^K g_{AK}\alpha_{CK} - g_{AK}\delta_B^K \alpha_{CK}) + \delta_K^B \alpha_B \alpha_{AB} - \alpha_B \delta_K^B \alpha_{AB} =$$
$$= 2\alpha^C \delta_B^K (g_{AK}\alpha_{CK} - g_{AK}\alpha_{CK}) + \delta_K^B (\alpha_B \alpha_{AB} - \alpha_B \alpha_{AB}) = 0.$$

То есть $\nu_{ABK} = \nu_{AKB}$.

На основании последних равенств и ввиду того, что $\alpha_{ABK}$ симметричен по всем индексам, получаем симметричность величин $\bar{\alpha}_{ABK}$ по двум последним индексам. Имеем:

$$\bar{\alpha}_{ABK} = \bar{\alpha}_{AKB} \tag{1.24}$$

Известно, что соотношения (1.20) и (1.24) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы риманово пространство было конформно-евклидовым.

Далее, свернем (1.21) с $g^{BL}$, получим:

$$\bar{\alpha} = \frac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)},$$

где $R = \bar{g}^{BL} R_{BL}$ – скалярная кривизна пространства $C^n$. Тогда

$$\bar{\alpha}_{BL} = \frac{e^{2\alpha}}{n-2} R_{BL} - \frac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)(n-2)} g_{BL}.$$

Приравнивая последние равенства с равенствами $\bar{\alpha}_{BL} = \alpha_{BL} - \alpha_B \alpha_L + \beta g_{BL}$, запишем:

$$\alpha_{BL} - \alpha_B \alpha_L + \beta g_{BL} = \frac{e^{2\alpha}}{n-2} R_{BL} - \frac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)(n-2)} g_{BL}$$

или

$$\alpha_{BL} = \alpha_B \alpha_L + \frac{e^{2\alpha}}{n-2} R_{BL} - \left(\beta + \frac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)(n-2)}\right) g_{BL} \tag{1.25}$$

Получим еще одно соотношение для $\alpha_{BL}$. Для этого воспользуемся равенством $g^{AB} \bar{\alpha}_{AB} = \dfrac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)}$. После подстановки равенств (1.19) в последнее равенство, получим:

$$g^{AB}(\alpha_{AB}-\alpha_A\alpha_B+\beta g_{AB})=\frac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)}.$$

Умножим последнее равенство на $g_{BK}$, после чего получим:

$$\alpha_{AB}=\alpha_A\alpha_B+(\frac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)}-\beta)g_{AB} \qquad (1.26)$$

Сравнивая (4.19) и (1.26) положим:

$$a=\frac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)}-\beta, \quad b_B=\alpha_B \qquad (1.27)$$

где $b_B$ — градиент, а $a$ — произвольная функция.

Как следует из (1.27) и (1.26) векторное поле $\alpha^A$ является торсообразующим векторным полем. Векторное поле $\alpha^A$ определяется аналогично как и в случае конформного отображения между евклидовыми пространствами. Точно также вектор $\alpha^A$ будем называть вектором конформного преобразования между евклидовым и римановым пространствами.

Так как $\alpha_B$ является градиентом, а $\dfrac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)}-\beta$ — произвольная функция, то данное векторное поле $\alpha^A$ является концикулярным векторным полем. Тем самым доказана следующая теорема.

***Теорема 3.1.*** Конформное отображение между евклидовым и римановым пространствами определяет в евклидовом пространстве концикулярное векторное поле, которое является одним из видов торсообразующего векторного поля.

Для более наглядного представления теоремы 3.2, а также полученных результатов, рассмотрим образ $\overline{W}^{n-1}$ гиперповерхности $W^{n-1}\subset\Omega\in E^n$ при конформном отображении $f:\Omega\to\overline{\Omega}$. Найдем связь между асимптотическими квадратичными формами гиперповерхностей $W^{n-1}$ и $\overline{W}^{n-1}$. Присоединим к точке $x \in W^{n-1}$ репер так, чтобы вектора $\vec{e}_i (i = \overline{1, n-1})$ принадлежали ее касательной гиперплоскости $T_x(W^{n-1})$, а вектор $\vec{e}_n$ был ее единичной нормалью. Тогда эти вектора связаны следующими условиями:

$$(\vec{e}_i \vec{e}_j) = g_{ij},\ (\vec{e}_i \vec{e}_n) = 0,\ (\vec{e}_n \vec{e}_n) = 1,$$

а уравнение гиперповерхности $W^{n-1}$ записывается в виде:

$$\omega^n = 0.$$

1-формы $\omega^i$ будут базисными на этой гиперповерхности. Дифференцируя последние равенства, получим:

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{jk}\omega_i^k,\ g_{ij}\omega_n^j + \omega_i^n = 0,\ \omega_n^n = 0.$$

Дифференциальное продолжение уравнения $\omega^n = 0$ дает:

$$\omega_i^n = b_{ij}\omega^j,$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ – асимптотический тензор гиперповерхности $W^{n-1}$.

При конформном отображении $f$ гиперповерхность $W^{n-1}$ перейдет в гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$, определяемую в пространстве $C^n$ тем же дифференциальным уравнением: $\omega^n = 0$. Формы $\varpi_i^n$, определяющие перемещение касательной гиперплоскости $T_y(\overline{W}^{n-1})$, где точка $y$ принадлежит некоторой окрестности $U \subset C^n$, находятся из равенств (1.16) при $B = i,\ A = n$:

$$\varpi_i^n = \omega_i^n - \alpha^n \omega_i = (b_{ij} - \alpha^n g_{ij})\omega^j.$$

Следует иметь в виду, что все рассмотрения в римановом пространстве $C^n$ ведутся в окрестности $U$. В дальнейшем, без особой необходимости, это не будет упоминаться. Ввиду последних равенств, асимптотический тензор гиперповерхности $\overline{W}^{n-1}$ связан с тензором $b_{ij}$ соотношениями:

$$\bar{b}_{ij} = b_{ij} - \alpha^n g_{ij}.$$

Предположим теперь, что гиперповерхность $W^{n-1}$ является гиперсферой: $W^{n-1} = S^{n-1}$. Тогда для нее $b_{ij} = bg_{ij}$. Но, в этом случае, $\bar{b}_{ij} = (b - \alpha^n)g_{ij}$ и так как $\bar{g}_{ij} = e^{2\alpha} g_{ij}$, то получим

$$\bar{b}_{ij} = \frac{1}{e^{2\alpha}}(b - \alpha^n)\bar{g}_{ij},$$

то есть гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$ также является гиперсферой в $C^n$.

Из соотношений $\nabla \alpha_A = (\alpha_A \alpha_B + (\dfrac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)} - \beta)g_{AB})\omega^B$, в которых, как и ранее, рассмотрим следующее обозначение $\dfrac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)} - \beta = a$, получим:

$$\nabla \alpha_A = \alpha_A d\alpha + a\omega_A.$$

Из последних равенств следует, что

$$\omega_i^n = -\frac{a}{\alpha_n}\omega_i, \quad d\alpha_n = (\alpha_n^2 + a)\omega^n \tag{1.28}$$

Дифференцируя внешним образом равенства для $\nabla \alpha_A$, получим:

$$-d\alpha_B \wedge \omega_A^B - \alpha_B \omega_A^C \wedge \omega_C^B = d\alpha_A \wedge d\alpha + da \wedge \omega_A + aD\omega_A.$$

В свою очередь

$$D\omega_A = D(g_{AB}\omega^B) = g_{CB}\omega_A^C \wedge \omega^B.$$

На основании последних равенств, будем иметь:

$$-(\alpha_C\omega_B^C+\alpha_B d\alpha+a\omega_B)\wedge\omega_A^B-\alpha_B\omega_A^C\wedge\omega_C^B=(\alpha_B\omega_A^B+\alpha_A d\alpha+$$
$$+a\omega_A)\wedge d\alpha+da\wedge g_{AB}\omega^B+ag_{CB}\omega_A^C\wedge\omega^B.$$

После приведения подобных слагаемых, запишем:

$$ag_{AB}\omega^B\wedge d\alpha+da\wedge g_{AB}\omega^B=0$$

или

$$(da-ad\alpha)\wedge\omega_A=0.$$

Откуда следует, что $d\ln a=d\alpha$ или $da=ad\alpha$. Последние равенства выполняются тождественно. Интегрируя последнее равенство, получим:

$\ln a=\alpha+C$ или $a=e^{\alpha+C}$.

Поэтому $\dfrac{e^{4\alpha}R}{2(n-1)}-\beta=e^{\alpha+C}$, или

$$\overline{\alpha}-\beta=e^{\alpha+C} \tag{1.29}$$

Как видно из равенства (1.29), разность между функциями $\overline{\alpha}$ и $\beta$ равна коэффициенту конформности, умноженному на действительное число, равное $e^C$.

Распишем равенство (1.29):

$$g^{AB}\overline{\alpha}_{AB}-\beta=e^{\alpha+C}$$

$$g^{AB}(\alpha_{AB}-\alpha_A\alpha_B+\beta g_{AB})-\beta=e^{\alpha+C}$$

$$g^{AB}\alpha_{AB}+(n-3)\beta=e^{\alpha+C}$$

$$g^{AB}\alpha_{AB}+\frac{n-3}{2}g^{AB}\alpha_A\alpha_B=e^{\alpha+C}$$. Отсюда

$$\alpha_{AB}=\frac{3-n}{2}\alpha_A\alpha_B-g_{AB}e^{\alpha+C} \tag{1.30}$$

Таким образом, при $n\geq 3$ конформное отображение $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, состоящей из уравнений (1.5), $d\alpha = \alpha_A \omega^A$, (1.16), $\nabla \alpha_A = \alpha_A d\alpha + a\omega_A$ и $da = ad\alpha$ и, следовательно, зависит от конечного числа параметров.

Рассмотрим, как и в главе 2, в $E^n$ подповерхности уровня коэффициента конформности $\alpha$ - эквиконформные гиперповерхности. Выберем репер в $E^n$ таким образом, чтобы вектор $\vec{e}_n$ был ортогонален к этим гиперповерхностям в каждой точке и имел бы единичную длину, а вектора $\vec{e}_i$ касались этих гиперповерхностей, то есть они принадлежат касательной гиперплоскости этой гиперповерхности в любой ее точки. Тогда с уже известными соотношениями будет верно:

$$d\alpha = \alpha_n \omega^n.$$

Так как, в этом случае, $\alpha_i = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$, то из соотношений $\nabla \alpha_A = \alpha_A d\alpha + a\omega_A$ следует, что

$$\omega_i^n = -\frac{a}{\alpha_n}\omega_i, \quad d\alpha_n = (\alpha_n^2 + a)\omega^n.$$

На эквиконформной гиперповерхности $d\alpha = 0,\ \omega^n = 0.$ Тогда в силу первого из последних соотношений:

$$b_{ij} = -\frac{a}{\alpha_n} g_{ij}.$$

Откуда следует, что эквиконформные гиперповерхности являются гиперсферами. Последние факты сформулируем в виде следующей теоремы.

***Теорема 3.2.*** Конформное отображение между евклидовым и римановым пространствами определяет в евклидовом пространстве гиперсферы, на которых коэффициент конформности принимает постоянные значения.

Аналогично, как это делалось во второй главе, найдем центр и радиус эквиконформной гиперсферы $S^{n-1}$. При $\omega^n = 0$ имеем

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i.$$

В виду того, что $\omega_n^i = -g^{ij}\omega_j^n$, получаем:

$$\omega_n^i = \frac{a}{\alpha_n}\omega^i.$$

Поэтому $d\vec{e}_n = \dfrac{a}{\alpha_n}\omega^i \vec{e}_i$.

Так как при $\omega^n = 0$ из $da = a\alpha_n\omega^n$ и $d\alpha_n = (\alpha_n^2 + a)\omega^n$ следует, что

$$da = 0 \text{ и } d\alpha_n = 0, \text{ то } d(\vec{x} - \frac{\alpha_n}{a}\vec{e}_n) = \vec{0}.$$

Поэтому точка $\vec{z} = \vec{x} - \dfrac{\alpha_n}{a}\vec{e}_n$ является центром эквиконформной гиперсферы и так как $\left|\vec{e}_n\right| = 1$, то ее радиус равен $r = \left|\dfrac{\alpha_n}{a}\right|$.

Найдем $d\vec{z} = (\omega^n - \dfrac{d\alpha_n \cdot a - \alpha_n da}{a^2})\vec{e}_n$. И это выражение обращается в нуль в силу того, что $d\alpha_n = (\alpha_n{}^2 + K)\omega^n$ и $da = a\alpha_n\omega^n$. Следовательно, все эквиконформные гиперсферы имеют общий центр в точке $\vec{z} = \vec{x} - \dfrac{\alpha_n}{a}\vec{e}_n$.

Так как при конформном отображении $f$ эквиконформные гиперсферы $S^{n-1}$ пространства $E^n$ перейдут в эквиконформные гиперсферы $\overline{S}^{n-1}$ риманова пространства $C^n$. Найдем радиус гиперсферы $\overline{S}^{n-1} = f(S^{n-1})$ и ее центр. На гиперсфере $\overline{S}^{n-1}$ имеем

$$d\vec{y}=\omega^i\vec{a}_i,\quad d\vec{a}_n=\varpi_n^A\vec{a}_A+\omega^A\vec{a}_{nA}.$$

Из (1.16), получаем

$$\varpi_n^n=d\alpha+\alpha_n\omega^n-\alpha^n\omega_n=0$$

Тогда $d\vec{a}_n=\varpi_n^i\vec{a}_i+\omega^i\vec{a}_{ni}$. Также из (1.16) найдем:

$$\varpi_n^i=\omega_n^i+\alpha_n\omega^i.$$

Так как $\omega_n^i=-g^{ij}\omega_j^n=g^{ij}\cdot\frac{a}{\alpha_n}\omega_j=\frac{a}{\alpha_n}\omega^i$, то

$$\varpi_n^i=(\frac{a}{\alpha_n}+\alpha_n)\omega^i.$$

Поэтому $d\vec{a}_n=(\frac{a}{\alpha_n}+\alpha_n)\omega^i\vec{a}_i+\omega^i\vec{a}_{ni}=(\frac{a}{\alpha_n}+\alpha_n)d\vec{y}+\omega^i\vec{a}_{ni}$.

Последнее равенство перепишем в виде:

$$d\vec{a}_n=(\frac{a}{\alpha_n}+\alpha_n)d\vec{y}\ (\text{mod}\ \ \omega^i=0).$$

Тогда

$$d(\vec{y}-\frac{\alpha_n}{a+\alpha_n^2}\vec{a}_n)=\vec{0}.$$

Следовательно, точка $\vec{z}=\vec{y}-\frac{\alpha_n}{a+\alpha_n^2}\vec{a}_n$ будет центром гиперсферы $\overline{S}^{n-1}$.

Так как $\left|\vec{a}_n\right|=\lambda\left|\vec{e}_n\right|=\lambda$, то радиус этой гиперсферы равен

$$\bar{r}=\frac{\alpha_n\lambda}{a+\alpha_n^2}.$$

Тогда $r \cdot \bar{r} = \dfrac{\alpha_n^2 \lambda}{a(a+\alpha_n^2)}$. Имеем $\lambda = e^{\alpha}$ и $\beta = \dfrac{1}{2}\alpha_n^2$, то $\alpha_n^2 = 2\beta$. Поэтому будем иметь:

$$r \cdot \bar{r} = \frac{2\beta e^{\alpha}}{a(a+2\beta)}.$$

Дифференцируя последнее равенство, запишем:

$$d(r\bar{r}) = \frac{2e^{\alpha}[(d\beta + \beta d\alpha)a(a+2\beta) - \beta(da(a+2\beta) + a(da + 2d\beta))]}{a^2(a+2\beta)^2}.$$

Также запишем:

$$\begin{aligned} d\beta &= \alpha_n d\alpha_n = \alpha_n(\alpha_n^2 + a)\omega^n = (2\beta + a)d\alpha \\ d\alpha &= \alpha_n \omega^n \\ da &= a d\alpha \end{aligned}.$$

Тогда

$$d(r\bar{r}) = \frac{2e^{\alpha}[(3\beta + a)(2\beta + a)a - \beta(4a^2 + 6a\beta)]}{a^2(a+2\beta)^2} d\alpha =$$

$$= \frac{2e^{\alpha}[6\beta^2 + 2a\beta + 3a\beta + a^2 - 4a\beta - 6\beta^2]}{a(a+2\beta)^2} d\alpha =$$

$$= \frac{2e^{\alpha}(a\beta + a^2)d\alpha}{a(a+2\beta)^2} = \frac{2e^{\alpha}(a+\beta)d\alpha}{(a+2\beta)^2}.$$

Окончательно имеем:

$$d(r\bar{r}) = \frac{2(a+\beta)e^{\alpha}}{(a+2\beta)^2}\alpha_n \omega^n,$$

то на эквиконформной гиперсфере при $\omega^n = 0$, получим:

$$d(r\bar{r}) = 0.$$

Поэтому $r\bar{r} = C^2$ – постоянная величина.

Рассматривая векторное поле $\alpha^A$ на эквиконформной гиперсфере, которое имеет только одну, неравную нулю, компоненту $\alpha^n$. Тем самым, данное векторное поле будет ортогонально эквиконформным гиперсферам и равенства (1.26) будут иметь вид:

$$\alpha_{nn} = \alpha_n^2 + a \tag{1.31}$$

Так как $da = ad\alpha = a\alpha_n\omega^n$, то на эквиконформной гиперсфере $da = 0$, то есть $a = const$. Тем самым на эквиконформной гиперсфере конциркулярное векторное поле, определяемое конформным отображением в евклидовом пространстве, является сходящимся (или конкуррентным) векторным полем. На основании последних рассуждений доказана следующая теорема.

***Теорема 3.3.*** Конформное отображение между евклидовым и римановым пространствами определяет на эквиконформной гиперсфере сходящееся (конкуррентное) векторное поле.

Здесь следует отметить тот факт, что при конформном отображении между евклидовым и римановым пространствами, эквиконформные гиперсферы евклидова пространства переходят в гиперсферы риманова пространства и векторное поле, ортогональное в каждой точке эквиконформной гиперсфере евклидова пространства, также будет переходить в векторное поле, ортогональное соответствующей гиперсфере риманова пространства. То есть сходящееся векторное поле при конформном отображении между евклидовым и римановым пространствами переходит в сходящееся векторное поле. Понятие сходящегося векторного поля является инвариантным понятием при конформном отображении между данными пространствами. Но следует иметь в виду, что понятие конциркулярного векторного поля не является инвариантным при конформном отображении между этими пространствами. Только для специального случая риманово пространства понятие конциркулярного векторного поля является инвариантным. Позднее этот случай также будет рассмотрен.

В заключении рассмотрим случай, когда конформно-евклидово пространство $C^n$ имеет постоянную скалярную кривизну. Для этого продифференцируем равенство $\overline{\alpha} = \frac{e^{4\alpha} R}{2(n-1)}$, предварительно выразив из него $R$: $R = 2(n-1)\frac{\overline{\alpha}}{e^{4\alpha}}$. Тогда

$$dR = 2(n-1)\frac{d\overline{\alpha}e^{4\alpha} - \overline{\alpha}e^{4\alpha}4d\alpha}{e^{8\alpha}}.$$

Так как $R = const$ тогда и только тогда, когда $dR = 0$, то получим:

$$d\overline{\alpha} - 4\overline{\alpha}d\alpha = 0$$

Решая последнее дифференциальное уравнение, получим:

$$\overline{\alpha} = e^C \cdot e^{4\alpha} \qquad (1.32)$$

Тем самым пространство $C^n$ будет пространством постоянной скалярной кривизны тогда и только тогда, когда функция $\overline{\alpha}$ пропорциональна четвертой степени коэффициента конформности.

Из (1.32) получим $\overline{\alpha}_{BL} = e^C e^{4\alpha} g_{BL}$. Подставляя последнее равенство в (1.21), запишем:

$$e^C e^{2\alpha} g_{BL} = \frac{1}{n-2} R_{BL} - \frac{e^C e^{2\alpha}}{n-2} g_{BL}$$

Из последних равенств имеем:

$$R_{BL} = (n-1)e^C e^{2\alpha} g_{BL}.$$

Из последних равенств получаем известный факт, что пространство $C^n$, как пространство постоянной скалярной кривизны, есть пространство Эйнштейна. Так как скалярная кривизна и кривизна пространства $C^n$ связаны равенством:

$$R = n(1-n)K,$$