Последняя формула позволяет из конформно-евклидовых пространств выбрать пространства постоянной кривизны. Следует также отметить, что условия выделения пространств постоянной кривизны, выражается через коэффициент конформности и его производные, которые являются симметрическим тензором.

3.2. Геометрические объекты, связанные со структурой сердечно - сосудистой системы

$k-$ кратно проективными В.Ф. Каган называл пространства аффинной связности, геодезические которых в некоторой системе координат выражаются системой из (n-1)-го уравнения, из которых k линейных уравнений. Для представления данного определения можно рассмотреть отображение такого пространства на евклидово. Геодезические линии будут отображаться в линии, находящиеся в $(n-k)-$мерных плоскостях E_{n-k} евклидова пространства. Под «плоскостью» $k-$кратного проективного пространства понимается прообраз плоскости E_{n-k}, то есть $(n-k)-$мерная поверхность, которая в данной системе координат выражается k линейными уравнениями. При $k=n-2$ геодезические линии будут располагаться на двумерных поверхностях, которые играют роль двумерных «плоскостей» пространства аффинной связности. Если все эти «плоскости» проходят через некоторую точку, то пространство называется субпроективным.

Так как субпроективное пространство является конформно-евклидовым, то согласно формуле (1.20), его тензор кривизны имеет вид:

$$R_{ABKL}=\bar{\alpha}_{BL}g_{AK}+\bar{\alpha}_{AK}g_{BL}-\bar{\alpha}_{BK}g_{AL}-\bar{\alpha}_{AL}g_{BK}, \qquad (2.1)$$

где согласно (1.21) тензор $\bar{\alpha}_{BL}$ имеет вид:

$$\bar{\alpha}_{BL}=\frac{e^{2\alpha}}{n-2}R_{BL}-\frac{\bar{\alpha}}{n-2}g_{BL}$$

и в конформно-евклидовом пространстве удовлетворяет соотношениям:

$$\bar{\alpha}_{ABK}=\bar{\alpha}_{AKB}. \qquad (2.2)$$

Необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы риманово пространство являлось конформно-евклидовым, являются условия (2.1) и (2.2). Для трехмерного риманова пространства существенными являются только условия (2.2), так как в любом трехмерном римановом пространстве условия (2.1) будут выполняться автоматически. При n > 3 условия (2.2) вытекают из условий (2.1). Понятно, что не всякое конформно-евклидово пространство является субпроективным. Поэтому нужно выяснить ситуацию, при которой конформно-евклидово пространство будет субпроективным. Оказывается, что это зависит от вида тензора $\overline{\alpha}_{AB}$.

Известно, что тензор Риччи субпроективного пространства, имеет вид в полуприводимой системе координат:

$$R_{AB} = f(x^1)g_{AB} + \varphi(x^1)\delta_A^1\delta_B^1 \tag{2.3}$$

Подставляя равенства (2.3) в выражение для $\overline{\alpha}_{AB}$, получим:

$$\overline{\alpha}_{AB} = P(x^1)g_{AB} + Q(x^1)\delta_A^1\delta_B^1,$$

где

$$P(x^1) = \frac{e^{2\alpha}}{n-2} f(x^1) - \frac{\overline{\alpha}}{n-2},\ Q(x^1) = \frac{e^{2\alpha}}{n-2}\varphi(x^1) \tag{2.4}$$

Вполне естественно ввести обозначение $\alpha = x^1$, тогда $\delta_A^1 = \alpha_A$ и

$$\overline{\alpha}_{AB} = P(\alpha)g_{AB} + Q(\alpha)\alpha_A\alpha_B \tag{2.5}$$

Такой выбор функции $\alpha = x^1$ связан с тем, что, во-первых, $\alpha \neq const$, и, во-вторых, как видно из (2.4) величины P и Q также зависят от α.

Равенство (2.5) не зависит от выбора системы координат в субпроективном пространстве V^n, так как в нем с обеих сторон стоят тензоры. Тем самым, в субпроективном пространстве тензор $\overline{\alpha}_{AB}$ имеет вид (2.5) в любой системе координат.

Условия (2.1), (2.2) и (2.5) являются необходимыми и достаточными условиями для выделения из риманова пространства субпроективного.

После подстановки равенств (2.5) в (2.1) получим инвариантный вид тензора кривизны в субпроективном пространстве:

$$R_{ABCL}=Q(\alpha)(g_{AC}\alpha_B\alpha_L+g_{BL}\alpha_A\alpha_C-g_{AL}\alpha_B\alpha_C-g_{BC}\alpha_A\alpha_L)+ \\ +2P(\alpha)(g_{AC}g_{BL}-g_{AL}g_{BC}) \tag{2.6}$$

Умножим равенства (2.6) на g^{AC}, получим:

$$g^{AC}R_{ABCL}=Q(\alpha)(n\alpha_B\alpha_L+2\beta g_{BL}-\delta_L^C\alpha_B\alpha_C-\delta_B^A\alpha_A\alpha_L)+ \\ +P(\alpha)(ng_{BL}-\delta_L^C g_{BC})$$

С учетом того, что $g^{AC}=e^{2\alpha}\overline{g}^{AC}$, последнее равенство перепишется:

$$e^{2\alpha}R_{BL}=(n-2)Q(\alpha)\alpha_B\alpha_L+2(Q(\alpha)\beta+(n-1)P(\alpha))g_{BL} \tag{2.7}$$

После умножения равенств (2.7) на g^{BL}, получим выражение для скалярной кривизны R субпроективного пространства:

$$e^{4\alpha}R=2(n-1)(2Q\beta+nP) \tag{2.8}$$

Для нахождения связи между функциями $P(\alpha)$ и $Q(\alpha)$ поступим следующим образом. Так как субпроективное пространство является конформно-евклидовым, то согласно формуле (1.19) имеем, с одной стороны, $\overline{\alpha}_{AB}=\alpha_{AB}-\alpha_A\alpha_B+\beta g_{AB,}$ а с другой стороны имеем формулу (2.5). Приравнивая их, получим:

$$\alpha_{AB}=(1+Q(\alpha))\alpha_A\alpha_B+(P(\alpha)-\beta)g_{AB} \tag{2.9}$$

Далее, введем обозначения: $1+Q(\alpha)=u(\alpha),\ P(\alpha)-\beta=v(\alpha).$

Тогда равенства (2.9) примут вид:

$$\alpha_{AB}=u(\alpha)\alpha_A\alpha_B+v(\alpha)g_{AB} \tag{2.10}$$

С учетом (2.10), равенства (1.18) примет вид:

$$d\alpha_A-\alpha_B\omega_A^B=u(\alpha)\alpha_A d\alpha+v(\alpha)g_{AB}\omega^B.$$

Продифференцируем внешним образом последние равенства:

$$-d\alpha_B \wedge \omega_A^B - \alpha_B \omega_A^C \wedge \omega_C^B = (du(\alpha)\alpha_A + u(\alpha)d\alpha_A) \wedge d\alpha +$$
$$+(dv(\alpha)g_{AB} + v(\alpha)dg_{AB}) \wedge \omega^B + v(\alpha)g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

С учетом самого равенства будем иметь:

$$-(\alpha_C\omega_B^C + u(\alpha)\alpha_B d\alpha + v(\alpha)g_{BC}\omega^C) \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = u(\alpha)(\alpha_B\omega_A^B +$$
$$+u(\alpha)\alpha_A d\alpha + v(\alpha)g_{AB}\omega^B) \wedge d\alpha + (dv(\alpha)g_{AB} + v(\alpha)g_{AC}\omega_B^C +$$
$$+v(\alpha)g_{BC}\omega_A^C) \wedge \omega^B + v(\alpha)g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B - u(\alpha)\alpha_B d\alpha \wedge \omega_A^B -$$
$$-v(\alpha)g_{BC}\omega^C \wedge \omega_A^B = u(\alpha)\alpha_B\omega_A^B \wedge d\alpha + u(\alpha)v(\alpha)g_{AB}\omega^B \wedge d\alpha +$$
$$+dv(\alpha)g_{AB} \wedge \omega^B + v(\alpha)g_{BC}\omega_A^C \wedge \omega^B.$$

После всех преобразований, получим

$$(dv(\alpha)g_{AB} - u(\alpha)v(\alpha)g_{AB}d\alpha) \wedge \omega^B = 0 \text{ или}$$

$$(dv(\alpha) - u(\alpha)v(\alpha)d\alpha) \wedge \omega_A = 0, \text{ где } \omega_A = g_{AB}\omega^B.$$

Так формы ω_A линейно-независимы, то из последнего равенства имеем:

$$dv(\alpha) - u(\alpha)v(\alpha)d\alpha = 0, \text{ или}$$

$$\frac{dv(\alpha)}{v(\alpha)} = u(\alpha)d\alpha, \quad d\ln v(\alpha) = u(\alpha)d\alpha.$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$\ln v(\alpha) = \int u(\alpha)d\alpha + C_1.$$

Последнее равенство перепишем в виде:

$$v(\alpha) = C \cdot e^{\int u(\alpha)d\alpha}, \tag{2.11}$$

где $C = e^{C_1}$.

В обратную сторону, то есть если функции $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$ связаны соотношением (2.11), то величины $\overline{\alpha}_{AB}$ будут удовлетворять равенствам (2.5), также легко доказывается. Тем самым данное риманово пространство является субпроективным. Последний факт отразим в виде следующей теоремы.

Теорема 3.4. Конформно-евклидово пространство является субпроективным тогда и только тогда, когда функции $u(\alpha)$ и $v(\alpha)$ связаны между собой зависимостью $v(\alpha) = C \cdot e^{\int u(\alpha)d\alpha}$,.

До сего момента рассматривалось субпроективное пространство основного случая. Далее рассмотрим субпроективное пространство исключительного случая. В этом случае $P(\alpha) = 0$. Тогда $v(\alpha) = -\beta$ и

$$\alpha_{AB} = u(\alpha)\alpha_A\alpha_B - \beta g_{AB},$$

а также $\nabla\alpha_A = u(\alpha)\alpha_A d\alpha - \beta g_{AB}\omega^B$.

Продифференцируем внешним образом последнее равенство:

$$-d\alpha_B \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = (du(\alpha)\alpha_A + u(\alpha)d\alpha_A) \wedge d\alpha - (d\beta g_{AB} +$$
$$+\beta dg_{AB}) \wedge \omega^B - \beta g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

Используя само равенство и делая некоторые преобразования, будем иметь:

$$-(\alpha_C\omega_B^C + u(\alpha)\alpha_B d\alpha - \beta g_{BC}\omega^C) \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = u(\alpha)(\alpha_B\omega_A^B +$$
$$+u(\alpha)\alpha_A d\alpha - \beta g_{AB}\omega^B) \wedge d\alpha - d\beta g_{AB} \wedge \omega^B - \beta g_{AC}\omega_B^C \wedge \omega^B -$$
$$-\beta g_{BC}\omega_A^C \wedge \omega^B - \beta g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

Далее, проделывая аналогичные преобразования, запишем:

$$-u(\alpha)\alpha_B d\alpha \wedge \omega_A^B + \beta g_{BC}\omega^C \wedge \omega_A^B = u(\alpha)\alpha_B\omega_A^B \wedge d\alpha -$$
$$-u(\alpha)\beta g_{AB}\omega^B \wedge d\alpha - d\beta g_{AB} \wedge \omega^B - \beta g_{AC}\omega_B^C \wedge \omega^B -$$
$$-\beta g_{BC}\omega_A^C \wedge \omega^B - \beta g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

Из последнего равенства имеем:

$$(u(\alpha)\beta d\alpha - d\beta) \wedge \omega_A = 0, \text{ где } \omega_A = g_{AB}\omega^B.$$

Ввиду линейной независимости форм ω_A будем иметь:

$$u(\alpha)\beta d\alpha - d\beta = 0 \qquad (2.12)$$

Имеем:

$$d\beta = (2u(\alpha) - 1)\beta d\alpha \qquad (2.13)$$

После подстановки (2.13) в (2.12) получим:

$$(u(\alpha)-1)\beta d\alpha = 0 \qquad (2.14)$$

Равенство нулю β и $d\alpha$ в случае конформного отображения говорит о том, что исследования ведутся на эквиконформных гиперсферах. Равенство $u(\alpha)=1$ в исключительном случае приводит к тому, что $Q(\alpha)=0$. Тогда, согласно равенствам (2.5), получаем $\overline{\alpha}_{AB}=0$. После подстановки этих равенств в (2.1) имеем $R_{ABCL}=0$, то есть риманово пространство становится евклидовым пространством.

Теорема 3.5. Конформное отображение между евклидовым и субпроективным пространствами определяет в евклидовом пространстве векторное поле α^A, которое является торсообразующим векторным полем.

Так как $\alpha_{[AB]}=0$, то величина $\varepsilon_B=(1+Q(\alpha))\alpha_B$ является градиентом, а $P(\alpha)-\beta$ - произвольная функция. На основании полученных фактов получаем

Следствие. Конформное отображение между евклидовым и субпроективным пространствами определяет в евклидовом пространстве конциркулярное векторное поле.

Используя формулы (2.10), а также введенное обозначение ε_B, получим:

$$\nabla\alpha_A = \varepsilon_A d\alpha + v\omega_A = \varepsilon_A d\alpha + vg_{AB}\omega^B \qquad (2.15)$$

Дифференцируя последние равенства внешним образом, получим:

$$-d\alpha_B \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = d\varepsilon_A \wedge d\alpha + (dvg_{AB} + vg_{AC}\omega_B^C + vg_{BC}\omega_A^C) \wedge \omega^B +$$
$$+vg_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

С учетом принятых обозначений, последнее перепишется в виде:

$$-(\alpha_C\omega_B^C + \varepsilon_B d\alpha + vg_{BC}\omega^C) \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = dvg_{AB} \wedge \omega^B +$$
$$+vg_{AC}\omega_B^C \wedge \omega^B + vg_{BC}\omega_A^C \wedge \omega^B + vg_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

После приведения подобных и преобразований, будем иметь:

$$(dv-(1+Q(\alpha))vd\alpha) \wedge \omega_A = 0.$$

Так как формы ω_A линейно независимы, то из последних равенств имеем:

$$d\ln v = (1+Q(\alpha))d\alpha \tag{2.16}$$

Таким образом, при $n\geq 3$ конформное отображение между евклидовым и субпроективным пространствами определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа, состоящей из уравнений (2.15) и (2.16) и, следовательно, зависит от коечного числа параметров.

Для геометрической интерпретации полученных результатов рассмотрим образ $\overline{W}^{n-1}$ гиперповерхности $W^{n-1}\subset\Omega\in E^n$. Найдем связь между асимптотическими квадратичными формами данных гиперповерхностей. Для гиперповерхности $\overline{W}^{n-1}$ рассмотрения ведутся в некоторой ее координатной окрестности. Присоединим к точке $x\in W^{n-1}$ репер так, чтобы вектора $\vec{e}_i$ принадлежали ее касательной гиперплоскости $T_x(W^{n-1})$, а вектор $\vec{e}_n$ является ее единичной нормалью. Тогда получим для данных векторов следующие соотношения:

$$(\vec{e}_i\vec{e}_j)=g_{ij},\ (\vec{e}_i\vec{e}_n)=0,\ (\vec{\mathrm{e}}_n\vec{e}_n)=1, \tag{2.17}$$

а уравнение гиперповерхности W^{n-1} запишется в виде:

$$\omega^n=0 \tag{2.18}$$

1-формы ω^i будут базисными на этой гиперповерхности. Дифференцируя соотношения (2.17), получим:

$$dg_{ij}=g_{ik}\omega_j^k+g_{jk}\omega_i^k,\ g_{ij}\omega_n^j+\omega_i^n=0,\ \omega_n^n=0 \tag{2.19}$$

Дифференциальное продолжение уравнения (2.18) дает:

$$\omega_i^n=b_{ij}\omega^j,$$

где $b_{ij}=b_{ji}$ - асимптотический тензор гиперповерхности W^{n-1}.

При конформном отображении гиперповерхность W^{n-1} перейдет в гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$, определяемую в некоторой карте пространства V^n тем же дифференциальным уравнением (2.18). Формы ϖ_i^n, определяющие перемещение касательной гиперплоскости $T_y(\overline{W}^{n-1})$, вычисляются из уравнений (1.16) при $A=n,\ B=i$ и с учетом (2.18) принимают вид:

$$\varpi_i^n = \omega_i^n - \alpha^n \omega_i = (b_{ij} - \alpha^n g_{ij})\omega^j .$$

Ввиду этого асимптотический тензор гиперповерхности $\overline{W}^{n-1}$ связан с тензором b_{ij} соотношениями:

$$\bar{b}_{ij} = b_{ij} - \alpha^n g_{ij} \tag{2.20}$$

Пусть гиперповерхность W^{n-1} является гиперсферой, то есть $W^{n-1} = S^{n-1}$. Тогда ее асимптотический тензор пропорционален метрическому, то есть $b_{ij} = bg_{ij}$. Но в этом случае из (2.20) следует, что $\bar{b}_{ij} = (b - \alpha^n)g_{ij}$. Ввиду этих равенств гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$ также является гиперсферой. Таким образом, при конформном отображении между евклидовым и субпроективным пространствами гиперсфера переходит в гиперсферу.

Рассмотрим в E^n подповерхности уровня коэффициента конформности α – эквиконформные гиперповерхности. Выберем репер в E^n так, чтобы вектор $\vec{e}_n$ был ортогонален к этим гиперповерхностям в каждой их точке и имел единичную длину, а вектора $\vec{e}_i$ касались этих гиперповерхностей. Тогда будут выполняться соотношения (2.17) и (2.18) и кроме того

$$d\alpha = \alpha_n \omega^n .$$

Так как, в этом случае, $\alpha_i = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$, то из соотношений (2.15) следует, что:

$$\omega_i^n = -\frac{v}{\alpha_n} g_{ij}\omega^j ,\ d\alpha_n = ((1+Q(\alpha))\alpha_n^2 + v)\omega^n \tag{2.21}$$

На эквиконформной гиперповерхности $d\alpha = 0,\ \omega^n = 0$. В силу первого из соотношений (2.21) имеем:

$$b_{ij} = -\frac{v}{\alpha_n} g_{ij}$$

Из последних равенств следует, что эквиконформные гиперповерхности являются гиперсферами. Как это делалось и ранее, можно найти центр и радиус эквиконформной гиперсферы S^{n-1}. При $\omega^n = 0$ имеем

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i,\ d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i.$$

Но в силу (2.19) и (2.21) получаем:

$$\omega_n^i = \frac{v}{\alpha_n} \omega^i$$

Поэтому $d\vec{e}_n = \frac{v}{\alpha_n} \omega^i \vec{e}_i$. Так как при $\omega^n = 0$ из (2.21) следует, что $d\alpha_n = 0$, то

$v = P(\alpha) - \beta = P(\alpha) - \frac{1}{2}(\alpha_n)^2$ и

$dv = dP(\alpha) - \alpha_n d\alpha_n = P^{/}(\alpha) d\alpha = P^{/}(\alpha)\alpha_n \omega^n = 0$. Тогда

$$d(\vec{x} - \frac{\alpha_n}{v}) = \vec{0}.$$

Поэтому точка $\vec{z} = \vec{x} - \frac{\alpha_n}{v}\vec{e}_n$ является центром эквиконформной гиперсферы и так как $\left|\vec{e}_n\right| = 1$, то ее радиус $r = \frac{\alpha_n}{v}$. Ввиду того, что $d\vec{z} = \vec{0}$, то все эквиконформные гиперсферы имеют общий центр в точке z.

Аналогично тому, как было показано в 3.1, где рассматривалось конформное отображение между евклидовым и римановым пространствами, можно показать, что при конформном отображении f между евклидовым и субпроективным пространствами эквиконформные гиперсферы S^{n-1} пространства E^n перейдут в эквиконформные гиперсферы $\overline{S}^{n-1}$ субпроективного пространства, которые также будут концентрическими (рис.7):

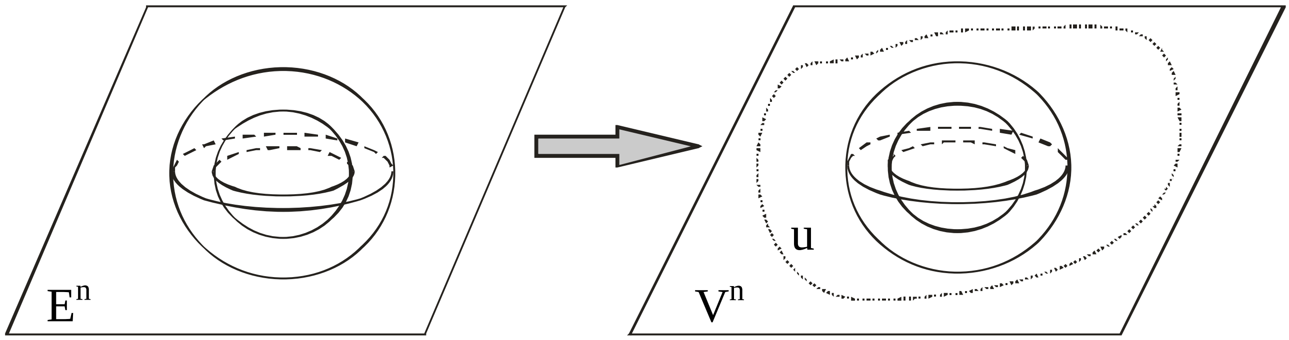

Рис.7. Иллюстрация движения крови в системе кровообращения.

Векторное поле α^A будет специальным конциркулярным векторным полем, если $(1+Q(\alpha))\alpha_B = 0$, а $P(\alpha)-\beta-$ произвольная функция. Так как рассматривается конформное отображение, то $\alpha_B \neq 0$. Тогда равенство нулю $(1+Q(\alpha))\alpha_B$ для случая, когда не находимся на эквиконформной гиперсфере, приводит к тому, что $Q(\alpha) = -1$. Также для эквиконформной гиперсферы будем иметь:

$$\nabla\alpha_A = v(\alpha)\omega_A = v(\alpha)g_{AB}\omega^B \qquad (2.22)$$

Продифференцируем внешним образом равенства (2.22):

$$-d\alpha_B \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = (dv(\alpha)g_{AB} + v(\alpha)dg_{AB}) \wedge \omega^B + v(\alpha)g_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

С учетом равенств (2.22), будем иметь:

$$-(\alpha_C\omega_B^C + v(\alpha)g_{BC}\omega^C) \wedge \omega_A^B - \alpha_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B = dv(\alpha)g_{AB} \wedge \omega^B +$$
$$+v(\alpha)(g_{AC}\omega_B^C + g_{BC}\omega_A^C) \wedge \omega^B + v(\alpha)\omega^C \wedge \omega_C^B g_{AB}.$$

Окончательно будем иметь:

$$dv(\alpha) \wedge \omega_A = 0.$$

Так как формы ω_A линейно – независимы, то из последних равенств получаем:

$$dv(\alpha) = 0, \text{ то есть } v(\alpha) = const.$$

В этом случае специальное конциркулярное векторное поле становится сходящимся векторным полем.

В случае, когда $Q(\alpha)=-1$, будем иметь $\alpha_{AB}=(P(\alpha)-\beta)g_{AB}$, а $\overline{\alpha}_{AB}=P(\alpha)g_{AB}-\alpha_A\alpha_B$, где использованы соотношения (2.5).

Так как $v(\alpha)=P(\alpha)-\beta$ и $v(\alpha)=C$, то получаем

$$P(\alpha)=\beta+C.$$

Тогда

$$\overline{\alpha}_{AB}=(\beta+C)g_{AB}-\alpha_A\alpha_B \tag{2.23}$$

Для сходящегося векторного поля будем иметь:

$$e^{2\alpha}R_{BL}=(2-n)\alpha_B\alpha_L+2((n-1)P(\alpha)-\beta)g_{BL} \tag{2.24}$$

Так как

$$e^{2\alpha}R_{ij}=2((n-1)P(\alpha)-\beta)g_{ij,}$$
$$e^{2\alpha}R_{in}=2((n-1)P(\alpha)-\beta)g_{in}.$$

А так как вектор $\vec{e}_n$ ортогонален эквиконформным гиперсферам, то $g_{in}=0$. Тем самым $R_{in}=0$. Также можно записать

$$e^{2\alpha}R_{nn}=(2-n)\alpha_n^2+2((n-1)P(\alpha)-\beta)g_{nn}.$$

С учетом того, что $P(\alpha)=\beta+C$ и положив $C=0$, получим

$$e^{2\alpha}R_{nn}=(2-n)\alpha_n^2+2(n-2)\beta=(2-n)\alpha_n^2+2(n-2)\frac{1}{2}\alpha_n^2=0.$$

Ранее было отмечено, что не всегда конциркулярное векторное поле, определяемое конформным отображением между евклидовым и римановым пространствами, будет переходить в конциркулярное векторное поле, то есть не всякое риманово пространство, являющееся конформно-евклидовым, допускает конциркулярное векторное поле. На основании известного факта говорящего о том, что риманово пространство является субпроективным тогда и только тогда, когда оно конформно-евклидово и допускает конциркулярное векторное поле. Получаем следующую теорему.

Теорема 3.6. При конформном отображении между евклидовым и римановым пространствами конциркулярное векторное поле будет переходить в конциркулярное векторное поле тогда и только тогда, когда риманово пространство является субпроективным.

3.3. *Геодезическое отображение при моделировании движения крови в системе кровообращения*

В рассматриваемой модели кровь движется по геодезическим линиям евклидова или риманова пространства. Поэтому для моделирования движения крови в рамках всей системы рассматривается геодезическое соответствие. Пусть $f:\Omega\to\overline{\Omega}$ – точечное невырожденное дифференцируемое отображение области Ω евклидова пространства E^n в область $\overline{\Omega}$ риманова пространства V^n такое, что для точки $x\in\Omega$ имеем $y=f(x)\in\overline{\Omega}$. При этом точка y принадлежит некоторой координатной окрестности или карте пространства V^n. Как всегда присоединим к точке x множество всех аффинных реперов $\left\{x,\vec{e}_A\right\}$ с началом в этой точке. Примем $\vec{a}_A=f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^* – касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f_x^* – невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в касательном пространстве к V^n. Уравнения перемещения реперов $\left\{x,\vec{e}_A\right\}$ и $\left\{y,\vec{a}_A\right\}$ запишем в виде:

$$d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A;\quad d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B;$$
$$d\vec{y}=\varpi^A\vec{a}_A;\quad d\vec{a}_A=\varpi_A^B\vec{a}_B+\varpi^B\vec{a}_{AB},$$

где $\vec{a}_{AB}$ – векторы, которые вместе с $\vec{a}_A$ образуют репер второго порядка в точке y [139]. Следует иметь в виду, что в случае голономных реперов векторы $\vec{a}_{AB}$ симметричны по нижним индексам, а в случае неголономных реперов эти векторы не симметричны по нижним индексам. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе.

Дифференциальные формы и одновременно структурные параметры ω^A и ω_A^B, удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства, а формы ϖ^A и ϖ_A^B удовлетворяют уравнениям структуры риманова пространства (1.2).

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\overline{\Omega}$ 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами:

$$\varpi^A = \omega^A.$$

Дифференцируя последние равенства внешним образом и применяя лемму Картана, получим:

$$\varpi_B^A - \omega_B^A = h_{BC}^A \omega^C.$$

Гладкую линию $\gamma \in \Omega$ зададим уравнениями вида $\omega^A = \theta \xi^A$, где $D\theta = \theta \wedge \theta_1$ и θ - параметрическая форма. В силу равенства форм ϖ^A и ω^A линия $\overline{\gamma} = f(\gamma)$ будет определяться теми же уравнениями, что и линия γ, но только в карте U области $\overline{\Omega}$. Линия γ будет геодезической, если:

$$d\omega^A + \omega^B \omega_B^A = \theta \omega^A \qquad (3.1)$$

Аналогично, линия $\overline{\gamma}$ будет геодезической, если выполняются следующие условия:

$$d\omega^A + \omega^B \varpi_B^A = \overline{\theta} \omega^A.$$

Последние равенства перепишем в виде:

$$d\omega^A + \omega^B \omega_B^A + h_{BC}^A \omega^B \omega^C = \overline{\theta} \omega^A.$$

Сравнивая последние равенства и (3.1), получим:

$$h_{BC}^A \omega^B \omega^C = (\overline{\theta} - \theta) \omega^A.$$

Введем обозначение $\theta = \overline{\theta} - \theta = \lambda_A \omega^A$ [115], тогда:

$$h_{BC}^A \omega^B \omega^C = \lambda_K \omega^K \omega^A = \delta_B^A \lambda_K \omega^B \omega^K$$

и отсюда

$$h^A_{BC} = \delta^A_B \lambda_C + \delta^A_C \lambda_B, \qquad (3.2)$$

где $\lambda_K = h^A_{AK}$ – ковектор.

Учитывая равенства (3.2), получим:

$$\varpi^A_B - \omega^A_B = \delta^A_B \theta + \lambda_B \omega^A \qquad (3.3)$$

Так как $\theta = \lambda_A \omega^A$, то дифференцируя внешним образом это равенство, запишем:

$$D\theta = \nabla\lambda_A \wedge \omega^A,$$

где $\nabla\lambda_A = d\lambda_A - \lambda_B \omega^B_A$.

Дифференцируя внешним образом равенства (3.3), получим:

$$(\nabla\lambda_B - \lambda_B\theta) \wedge \omega^A + \delta^A_B(\nabla\lambda_K - \lambda_K\theta) \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R^A_{BKL}\omega^K \wedge \omega^L.$$

После введения обозначения $\nabla\lambda_B - \lambda_B\theta = \lambda_{BK}\omega^K$, запишем:

$$\lambda_{BK}\omega^K \wedge \omega^A + \delta^A_B \lambda_{KL}\omega^L \wedge \omega^K = \frac{1}{2} R^A_{BKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$

или

$$(\delta^A_L \lambda_{BK} + \delta^A_B \lambda_{LK} - \frac{1}{2} R^A_{BKL})\omega^K \wedge \omega^L = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\delta^A_L \lambda_{BK} - \delta^A_K \lambda_{BL} + \delta^A_B \lambda_{LK} - \delta^A_B \lambda_{KL} - R^A_{BKL} = 0.$$

Умножая последнее равенство на $\overline{g}_{AS}$, запишем:

$$\overline{g}_{LS}\lambda_{BK} - \overline{g}_{KS}\lambda_{BL} + \overline{g}_{BS}\lambda_{LK} - \overline{g}_{BS}\lambda_{KL} = R_{SBKL}.$$

Окончательно имеем:

$$R_{ABKL} = \overline{g}_{LA}\lambda_{BK} - \overline{g}_{KA}\lambda_{BL} + \overline{g}_{BA}\lambda_{LK} - \overline{g}_{BA}\lambda_{KL} \qquad (3.4)$$

Следует отметить, что Норден А.П. в книге, такое риманово пространство называет проективно-евклидовым. Свертывая, далее, (3.4) с $\overline{g}^{AK}$, получим:

$$R_{BL} = \delta_L^K \lambda_{BK} - n\lambda_{BL} + \delta_B^K \lambda_{LK} - \delta_B^K \lambda_{KL}.$$

Окончательно последние равенства перепишутся в виде:

$$R_{BL} = \lambda_{LB} - n\lambda_{BL} \tag{3.5}$$

Сравнивая равенства (3.5) с равенствами $R_{LB} = \lambda_{BL} - n\lambda_{LB}$, получим:

$$\lambda_{BL} = \frac{nR_{BL} + R_{LB}}{1-n^2} \tag{3.6}$$

Равенства (3.5) и (3.6) с точностью до знака можно переписать в виде:

$$R_{BL} = n\lambda_{BL} - \lambda_{LB} \text{ и } \quad \lambda_{BL} = \frac{nR_{BL} + R_{LB}}{n^2-1} \tag{3.7}$$

Умножая обе части последнего равенства в (3.7) на $\bar{g}^{BL}$, получим:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n-1}R, \text{ где } \bar{\lambda} = \bar{g}^{BL}\lambda_{BL}.$$

Последнее равенство перепишем в виде $\bar{g}^{AB}\lambda_{AB} = \dfrac{R}{n-1}$. После умножения последнего равенства на $\bar{g}_{BK}$, получим:

$$\lambda_{KB} = \frac{R}{n-1}\bar{g}_{KB}.$$

Тем самым, тензор λ_{KB} симметричен по нижним индексам, что вполне согласуется с тем, что V^n является римановым пространством. Для риманова пространства тензор Риччи R_{AB} также симметричен по нижним индексам. Уравнения (3.4) и (3.7) превращаются в уравнения:

$$R_{ABKL} = \bar{g}_{LA}\lambda_{BK} - \bar{g}_{KA}\lambda_{BL} \tag{3.4′}$$

$$R_{BL} = (n-1)\lambda_{BL} \text{ и } \lambda_{BL} = \frac{1}{n-1}R_{BL} \tag{3.7′}$$

Применяя оператор ковариантного дифференцирования к обеим частям первого уравнения (3.7′), запишем:

$$\nabla R_{BL} = (n-1)\nabla\lambda_{BL} \tag{3.8}$$

Продифференцируем внешним образом $d\lambda_A - \lambda_B\omega_A^B - \lambda_A\theta = \lambda_{AB}\omega^B$, получим:

$$-d\lambda_B \wedge \omega_A^B - \lambda_B D\omega_A^B - d\lambda_A \wedge \theta - \lambda_A D\theta = d\lambda_{AB} \wedge \omega^B + \lambda_{AB} D\omega^B.$$

Используя само равенство и уравнения структуры, будем иметь:

$$-(\lambda_C\omega_B^C + \lambda_B\theta + \lambda_{BC}\omega^C) \wedge \omega_A^B - \lambda_B\omega_A^C \wedge \omega_C^B - (\lambda_B\omega_A^B + \lambda_A\theta + \lambda_{AB}\omega^B) \wedge \theta -$$
$$-\lambda_A\nabla\lambda_B \wedge \omega^B = d\lambda_{AB} \wedge \omega^B + \lambda_{AB}\omega^C \wedge \omega_C^B.$$

После преобразований, получим:

$$(d\lambda_{AB} - \lambda_{AC}\omega_B^C - \lambda_{CB}\omega_A^C) \wedge \omega^B = -\lambda_{AB}\omega^B \wedge \theta - \lambda_A(\lambda_B\theta + \lambda_{BC}\omega^C) \wedge \omega^B.$$

Окончательно будем иметь

$$(\nabla\lambda_{AB} - \lambda_{AB}\theta) \wedge \omega^B = 0.$$

Применяя теперь лемму Картана, получим:

$$\nabla\lambda_{AB} - \lambda_{AB}\theta = \lambda_{ABC}\omega^C, \tag{3.9}$$

где $\lambda_{ABC} = \lambda_{ACB}$.

Тем самым величины λ_{ABC} симметричны по всем нижним индексам. Равенства (3.9) перепишем в виде:

$$\nabla\lambda_{AB} = (\lambda_{AB}\lambda_C + \lambda_{ABC})\omega^C, \text{ или}$$

$$\nabla_C\lambda_{AB} = \lambda_{CA}\lambda_B + \lambda_{CAB}.$$

Тогда равенства (3.8) примут вид:

$$\nabla R_{AB} = (n-1)(\lambda_{AB}\lambda_C + \lambda_{ABC})\omega^C.$$

Последние равенства перепишем в виде:

$$\nabla_C R_{AB} = (n-1)(\lambda_{CA}\lambda_B + \lambda_{CAB}) \tag{3.10}$$

Тогда

$$\nabla_{[C}R_{A]B} = 0 \tag{3.11}$$

Тензор Риччи данного пространства удовлетворяет условию (3.11), которое называют уравнением Кодацци, если удовлетворяющий ему тензор симметричен. Рассмотрим снова

$$\nabla\lambda_A = \lambda_A\theta + \lambda_{AB}\omega^B = (\lambda_A\lambda_B + \lambda_{AB})\omega^B = \lambda_{AB}\omega^B,$$

где

$$\lambda_{AB} = \lambda_A\lambda_B + \lambda_{AB} = \lambda_A\lambda_B + \frac{1}{n-1}R_{AB}, \qquad (3.12)$$

где λ_{AB} – симметричный тензор.

Между точками евклидова и риманова пространств рассматривается невырожденное дифференцируемое отображение, при котором геодезические линии первого пространства переходят в геодезические линии второго. Такое соответствие называется геодезическим или проективным, а пространства будут проективны друг другу. Вектор λ_A назовем вектором проективного преобразования связности. Его также называют вектором геодезического преобразования. Пространство V^n, проективное n-мерному евклидову пространству E^n, называется проективно-евклидовым.

Рассмотрим систему (3.12), как систему дифференциальных уравнений. Найдем условия ее интегрируемости в римановом пространстве V^n, которое является проективно-евклидовым и эквиаффинным. Такое пространство называется эквипроективным.

Дифференцируя ковариантно уравнения (3.12), запишем:

$$\nabla\lambda_{AB} = \nabla\lambda_A\lambda_B + \lambda_A\nabla\lambda_B + \frac{1}{n-1}\nabla R_{AB}.$$

Так как $\nabla\lambda_A = \lambda_A\theta + \lambda_{AB}\omega^B = (\lambda_A\lambda_B + \lambda_{AB})\omega^B = \lambda_{AB}\omega^B$. Тогда

$$\nabla\lambda_{AB} = \lambda_{AC}\omega^C\lambda_B + \lambda_A\lambda_{BC}\omega^C + \frac{1}{n-1}\nabla R_{AB}.$$

Последние равенства перепишем в виде:

$$\nabla_B \lambda_{AC} = \lambda_B \lambda_{AC} + \lambda_{BC} \lambda_A + \frac{1}{n-1} \nabla_B R_{AC}.$$

Альтернируя последние равенства по индексам B и A с учетом (3.11), получим:

$$\nabla_{[B} \lambda_{A]C} = \lambda_B \lambda_{AC} - \lambda_A \lambda_{BC} + \lambda_{BC} \lambda_A - \lambda_{AC} \lambda_B = 0,$$ то есть

$$\nabla_{[B} \lambda_{A]K} = 0 \tag{3.13}$$

На основании этого получаем, что решение уравнения (3.13) в данном пространстве V^n имеет вид (3.12). В случае, когда V^n является евклидовым пространством, решение уравнения (3.13) имеет вид $\lambda_{AB} = \lambda_A \lambda_B$.

Ввиду того, что $\lambda_{AB} = \frac{R}{n-1} \overline{g}_{AB}$, где $R -$ скалярная кривизна риманова пространства V^n, то уравнения (3.12) можно записать в виде:

$$\lambda_{AB} = \lambda_A \lambda_B + \frac{R}{n-1} \overline{g}_{AB} \tag{3.14}$$

Рассмотрим тензор $g_B^A = g^{AC} \overline{g}_{CB}$. Умножим обе части последнего равенства на g_{LA}:

$$g_{LA} g_B^A = \delta_L^C \overline{g}_{CB}.$$

Окончательно запишем:

$$\overline{g}_{LB} = g_{LA} g_B^A \tag{3.15}$$

После подстановки (3.15) в (3.14) получим:

$$\lambda_{AB} = \lambda_A \lambda_B + \frac{R}{n-1} \delta_C^B g_B^C g_{AB} \tag{3.16}$$

Из равенств (3.16) можно заключить, что вектор геодезического преобразования λ_A является торсообразующим векторным полем в E^n. Последнее утверждение сформулируем в виде теоремы.