Теорема 3.7. Геодезическое отображение между евклидовым и римановым пространствами порождает в евклидовом пространстве торсообразующее векторное поле.

Ротор векторного поля $\lambda^A = g^{AB}\lambda_B$ определяется как бивектор $\gamma_{AB} = \lambda_A^C g_{CB} - \lambda_B^C g_{CA}$. Умножая равенства (4.14) на g^{CB}, получим:

$$\lambda_A^C = \lambda_A \lambda^C + \frac{R}{n-1}\delta_L^B g_B^L \delta_A^C.$$

Используя последние равенства, легко показать, что $\gamma_{AB} = 0.$ Обращение в нуль ротора векторного поля есть необходимое и достаточное условие градиентности вектора геодезического поля λ^A. Таким образом, векторное поле λ^A является градиентным. Этот факт позволяет сформулировать следствие.

Следствие. Вектор геодезического преобразования является специальным видом торсообразующего векторного поля – концикулярным векторным полем.

Пусть $\overline{W}^{n-1}$ - образ гиперповерхности $W^{n-1} \subset E^n$ при геодезическом отображении $f : E^n \to V^n$. Присоединим к точке $x \in W^{n-1}$ репер так, чтобы вектора $\vec{e}_i$ принадлежали ее касательной гиперплоскости, а вектор $\vec{e}_n$ был ее единичной нормалью. Тогда эти векторы связаны уже известными соотношениями:

$$(\vec{e}_i \vec{e}_j) = g_{ij},\ (\vec{e}_i \vec{e}_n) = 0,\ (\vec{e}_n \vec{e}_n) = 1,$$

а уравнение гиперповерхности W^{n-1} записывается в виде:

$$\omega^n = 0.$$

Дифференциальное продолжение последнего уравнения дает:

$$\omega_i^n = b_{ij}\omega^j,$$

где $b_{ij} = b_{ji}$ – асимптотический тензор гиперповерхности W^{n-1}.

При геодезическом отображении гиперповерхность W^{n-1} перейдет в гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$, которая в некоторой карте U пространства V^n будет определяться тем же дифференциальным уравнением: $\omega^n = 0$.

Формы ϖ_i^n, определяющие перемещение касательной гиперплоскости $T_y(\overline{W}^{n-1})$ в пространстве V^n, запишутся из равенств (3.3) при $B = i$ и $A = n$:

$$\varpi_i^n = \omega_i^n = b_{ij}\omega^j.$$

Ввиду последних равенств асимптотические тензоры гиперповерхностей W^{n-1} и $\overline{W}^{n-1}$ совпадают.

Продифференцируем внешним образом равенства $\varpi_i^n = \omega_i^n$:

$$\varpi_i^A \wedge \varpi_A^n + \frac{1}{2} R_{iCL}^n \omega^C \wedge \omega^L = \omega_i^A \wedge \omega_A^n.$$

С учетом (3.3) последние равенства примут вид:

$$(\omega_i^A + \delta_i^A\theta + \lambda_i\omega^A) \wedge (\omega_A^n + \delta_A^n\theta + \lambda_A\omega^n) + \frac{1}{2} R_{iCL}^n \omega^C \wedge \omega^L = \omega_i^j \wedge \omega_j^n.$$

После раскрытия скобок, запишем:

$$\omega_i^A \wedge \omega_A^n + \delta_i^A\theta \wedge \omega_A^n + \lambda_i\omega^A \wedge \omega_A^n + \omega_i^A \wedge \delta_A^n\theta + \lambda_i\omega^A \wedge \delta_A^n\theta +$$

$$+\omega_i^A \wedge \lambda_A\omega^n + \delta_i^A\theta \wedge \lambda_A\omega^n + \lambda_i\omega^A \wedge \lambda_A\omega^n + \frac{1}{2} R_{iCL}^n \omega^C \wedge \omega^L = \omega_i^j \wedge \omega_j^n.$$

Раскрывая суммы, будем иметь:

$$\theta \wedge \omega_i^n + \lambda_i\omega^A \wedge \omega_A^n + \omega_i^n \wedge \theta + \lambda_i\omega^n \wedge \theta + \omega_i^A \wedge \lambda_A\omega^n + \theta \wedge \lambda_i\omega^n +$$

$$+\lambda_i\theta \wedge \omega^n + \frac{1}{2} R_{iCL}^n \omega^C \wedge \omega^L = 0.$$

Так как на гиперповерхности W^{n-1} $\omega^n = 0$, то последние равенства примут вид:

$$\lambda_i\omega^j \wedge \omega_j^n + R_{ijk}^n \omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Ввиду того, что $\omega_j^n = b_{jk}\omega^k$, то:

$$\lambda_i\omega^j \wedge b_{jk}\omega^k + R_{ijk}^n\omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

После приведения подобных, получим:

$$(\lambda_i b_{jk} + R_{ijk}^n)\omega^j \wedge \omega^k = 0.$$

Ввиду симметричности b_{jk} по нижним индексам, получим:

$$R_{ijk}^n = 0 \tag{3.17}$$

Далее примем за W^{n-1} в евклидовом пространстве E^n такие гиперповерхности, для которых $\lambda_i = 0$. Как и в [115] такие гиперповерхности будем называть эквигеодезическими.

Так как $\nabla\lambda_A = \lambda_A\theta + \dfrac{Rg}{n-1}\omega_A$, где $g = \sum\limits_{B=1}^{n} g_B^B$ и, введя обозначение $\dfrac{Rg}{n-1} = u,$ получим:

$$\begin{aligned} -\lambda_n\omega_i^n &= u\omega_i \\ d\lambda_n &= \lambda_n\theta + u\omega_n = (\lambda_n^2 + u)\omega^n, \end{aligned} \tag{3.18}$$

а так как на этих гиперповерхностях $\omega^n = 0$, то $d\lambda_n = 0$, то есть $\lambda_n = const.$

Из первого уравнения (3.18), получаем:

$$\omega_i^n = -\frac{1}{\lambda_n} u g_{ij}\omega^j, \text{ или}$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{\lambda_n} u g_{ij} = -\frac{1}{\lambda_n}\frac{Rg}{n-1} g_{ij} \tag{3.19}$$

Как видно из (3.19), данные гиперповерхности являются либо гиперсферами в E^n, либо гиперплоскостями. Последний случай возможен лишь в том случае, когда скалярная кривизна R для данной гиперповерхности равна нулю, то есть все компоненты тензора R_{Bkl}^A для данной поверхности равны нулю.

Покажем, что компоненты тензора кривизны для гиперповерхности W^{n-1} R^i_{nkl} равны нулю, что с учетом равенств (3.17) дает равенство нулю и всего тензора кривизны на данной гиперповерхности.

Из (3.3) при $B = n,\ A = i$ получим:

$$\varpi^i_n = \omega^i_n + \lambda_n \omega^i \tag{3.20}$$

Продифференцируем внешним образом равенства (3.20):

$$\varpi^A_n \wedge \varpi^i_A + \frac{1}{2} R^i_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l = \omega^A_n \wedge \omega^i_A + d\lambda_n \wedge \omega^i + \lambda_n \omega^j \wedge \omega^i_j,$$

где учтено, что на рассматриваемой гиперповерхности $\omega^n = 0$. С учетом (3.3) последнее перепишем в следующем виде:

$$(\omega^A_n + \delta^A_n \theta + \lambda_n \omega^A) \wedge (\omega^n_A + \delta^i_A \theta + \lambda_A \omega^i) + \frac{1}{2} R^i_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l =$$
$$= \omega^A_n \wedge \omega^i_A + \lambda_n \omega^j \wedge \omega^i_j.$$

В последнем равенстве учтено, согласно (3.18), что $d\lambda_n = 0$ при $\omega^n = 0$.

$$\omega^A_n \wedge \omega^i_A + \theta \wedge \omega^i_n + \lambda_n \omega^A \wedge \omega^i_A + \omega^i_n \wedge \theta + \lambda_n \omega^i \wedge \theta + \omega^A_n \wedge \lambda_A \omega^i +$$
$$+\theta \wedge \lambda_n \omega^i + \lambda_n \omega^A \wedge \lambda_A \omega^i + \frac{1}{2} R^i_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l = \omega^A_n \wedge \omega^i_A + \lambda_n \omega^j \wedge \omega^i_j.$$

После приведения подобных слагаемых будем иметь:

$$R^i_{nkl} = 0 \tag{3.21}$$

Так как гиперповерхность $\overline{W}^{n-1}$ является образом гиперповерхности W^{n-1} и для нее верны равенства (3.21), то в римановом пространстве V^n эта поверхность является гиперплоскостью. Значит, ее асимптотический тензор $\overline{b}_{ij}$ равен нулю. Тем самым асимптотический тензор гиперповерхности W^{n-1} также равен нулю, то есть данная гиперповерхность, на которой $\lambda_i = 0$, другими словами, эквигеодезическая гиперповерхность в евклидовом пространстве E^n является гиперплоскостью.

Для эквигеодезической гиперплоскости будем иметь:

$$\lambda_{nn} = \lambda_n^2 + \frac{Rg}{n-1},$$

где $g = \sum_{B=1}^{n} g_B^B$. Так как величина R для данной гиперповерхности равна нулю, то

$$\lambda_{nn} = \lambda_n^2.$$

Векторное поле, определяемое λ^A, на эквигеодезической гиперплоскости будет коллинеарно вектору $\vec{e}_n$ и является рекуррентным или параллельным векторным полем. Полученный результат заслуживает того, чтобы быть сформулированным в виде теоремы.

Теорема 3.8. Геодезическое отображение между евклидовым и римановым пространствами порождает в евклидовом пространстве концциркулярное векторное поле, которое на эквигеодезических гиперплоскостях является параллельным векторным полем.

При геодезическом отображении между евклидовым и римановым пространствами, вектор геодезического преобразования, являющийся концциркулярным векторным полем, на эквигеодезической гиперплоскости является параллельным векторным полем. Так как геодезическими линиями на гиперплоскости в евклидовом пространстве являются прямые, то вектор геодезического преобразования переносится параллельно вдоль этих прямых.

При рассмотрении конформных и геодезических отображений между евклидовым и римановым пространствами можно сделать заключение: данные отображения порождают в евклидовом пространстве концциркулярное векторное поле. По определяемому этими отображениями векторному полю нельзя установить специфичность конформного или геодезического отображений. Различия проявляются только тогда, когда рассматриваются эквиконформные и эквигеодезические гиперповерхности. Понятие коэффициента геодезичности λ

введено по аналогии с понятием коэффициента конформности. Выводом из последних рассуждений является: конформное и геодезическое отображения между евклидовым и римановым пространствами определяют различные гиперповерхности в евклидовом пространстве, на которых соответствующий коэффициент принимает постоянное значение. В случае конформного отображения эти гиперповерхности являются эквиконформными гиперсферами, на которых вектор конформного преобразования является сходящимся векторным полем, а в случае геодезического отображения эти гиперповерхности являются эквигеодезическими гиперплоскостями, на которых вектор геодезического преобразования является параллельным векторным полем.

3.4. Векторы второго порядка при анализе структуры системы кровообращения

Пусть $V^n -$ n-мерное риманово пространство, $U -$ некоторая его координатная окрестность. В каждой точке y этого пространства рассмотрим репер, образованный векторами $\vec{a}_A$, которые принадлежат касательному пространству к V^n.

Уравнения перемещения репера $\left\{y, \vec{a}_A\right\}$ имеют вид:

$$d\vec{y} = \varpi^A \vec{a}_A, \quad d\vec{a}_A = \varpi_A^B \vec{a}_B + \varpi^B \vec{a}_{AB}, \tag{4.1}$$

где $\vec{a}_{AB}$ - векторы, которые вместе с векторами $\vec{a}_A$ образуют репер второго порядка в точке y. Случай симметричности векторов второго порядка рассматривался Акивисом М.А., а также Рыбниковым А.К. Это случай голономных реперов, связанных с точкой y. Данный случай предполагает, что дифференциалы $d\vec{y},\ d\vec{a}_A -$ полные, то есть

$$D(d\vec{y}) = \vec{0}, \quad D(d\vec{a}_A) = \vec{0}.$$

Формы ϖ^A удовлетворяют структурным уравнениям Лаптева:

$$D\varpi^A = \varpi^B \wedge \varpi_B^A \tag{4.2}$$

Дифференцируя внешним образом первое уравнение (4.1) и применяя лемму Картана, получим второе равенство из (4.1), причем вектора $\vec{a}_{AB}$, принадлежащие касательному пространству второго порядка T^2, будут симметричны:

$$\vec{a}_{[AB]} = \vec{0}.$$

Дифференцируя уравнения (4.2) внешним образом и применяя обобщенную лемму Картана [133], получим:

$$D\varpi_B^A = \varpi_B^C \wedge \varpi_C^A + \varpi^C \wedge \varpi_{BC}^A \qquad (4.3)$$

Формы ϖ_{BC}^A удовлетворяют условиям:

$$\varpi_{BC}^A \wedge \varpi^B \wedge \varpi^C = 0 \qquad (4.4)$$

Аналогично, продолжая вторые дифференциальные уравнения из (4.1), запишем:

$$d\vec{a}_{AB} = \varpi_{AB}^C \vec{a}_C + \varpi_A^C \vec{a}_{CB} + \varpi_B^C \vec{a}_{AC} + \varpi^C \vec{a}_{ABC}, \qquad (4.5)$$

причем вектора $\vec{a}_{ABC}$, принадлежащие касательному пространству третьего порядка, симметричны по двум последним индексам:

$$\vec{a}_{A[BC]} = \vec{0}.$$

Данную процедуру можно продолжать. В результате будем получать симметричные вектора $\vec{a}_{A_1 \dots A_p}$, принадлежащие касательному пространству порядка p, а также структурные уравнения реперов $p-$го порядка со структурными формами или параметрами ϖ^A, $\varpi_{B_1}^A, \dots, \varpi_{B_1 \dots B_p}^A$. Однако возможны несимметричные по нижним индексам формы ϖ_{BC}^A, которые удовлетворяют условиям (4.4). Аналогичное заключение можно сделать относительно форм $\varpi_{B_1 \dots B_p}^A$. Последнее приводит к несимметричности векторов $\vec{a}_{AB}, \dots, \vec{a}_{A_1 \dots A_p}$ по нижним индексам. Этот случай соответствует неголономным реперам.

В каждой точке x многообразия определим обобщенное соприкасающееся пространство порядка r, которое обозначим O_x^r. Инвариантные формы дифференциальной группы $r-$го порядка D_n^r являются базисными формами пространства O^r. Соответствующий репер состоит из векторов $\vec{e}_A,\ \vec{E}_{BC},...,\ \vec{E}_{B_1B_2...B_r}$ (симметричности по индексам нет).

Далее вводится понятие обобщенной нормали порядка r в точке x, которое определяется как подпространство N^r пространства O_x^r и которое имеет пересечение нулевой размерности с пространством O^{r-1} и его размерность дополняет размерность O^{r-1}.

Поле обобщенных нормалей N^1 на многообразии задает на нем несимметричную связность 1-го порядка с объектом связности $\Gamma(\Gamma_{BC}^A)$. При этом компоненты Γ_{BC}^A представляют собой коэффициенты разложений

$$\vec{E}_{BC}=\overset{N}{\vec{E}}_{BC}+\Gamma_{BC}^A\vec{e}_A,$$

где $\overset{N}{\vec{E}}_{BC}\in N^1$.

Рассмотрим вычисление векторов $\vec{a}_{AB}$ в случае их симметричности по нижним индексам. Для этого в n-мерном евклидовом пространстве E^n рассмотрим (n-1)- мерную поверхность (подмногообразие) V_{n-1}, на которой реализуется риманова геометрия. В точке $y\in V_{n-1}$ рассмотрим репер, векторы $\vec{a}_i$ принадлежат касательной плоскости (базовому пространству), а вектор $\vec{a}_n$ ортогонален ему. Все эти векторы лежат в TE^n. Также рассмотрим область $\Omega\subset E^n$ и диффеоморфное отображение $f:\Omega\to\overline{\Omega}\subset V_{n-1}$ такое, что для любой точки $x\in\Omega$ имеем $y=f(x)\in\overline{\Omega}\subset V_{n-1}$. С точкой x свяжем множество реперов таких, что вектор $\vec{e}_n$ направлен по прямой (xy), а вектора $\vec{e}_i$ ортогональны этой прямой.

Тогда в области Ω будет определено гиперраспределение, $(x,\ \xi)-$ элемент этого гиперраспределения, состоящий из точки $x\in\Omega$ и проходящей через нее гиперплоскости $\xi=\xi(x)$, ортогональной вектору $\vec{e}_n$. Дифференциальные уравнения гиперраспределения Δ^{n-1} имеют вид:

$$\omega_i^n=\Lambda_{ij}\omega^j+\Lambda_i\omega^n \tag{4.6}$$

Положим $\vec{a}_A=f_x^*(\vec{e}_A)$, где f_x^*- касательное линейное отображение к отображению f в точке x. Так как f_x^*- невырожденное отображение, то вектора $\vec{a}_A$ независимы и образуют репер в точке y, причем вектора $\vec{a}_i$ принадлежат касательному пространству к V_{n-1}.

Уравнения перемещения репера $\left\{y,\ \vec{a}_A\right\}$ имеют вид (4.1), а репера $\left\{x,\ \vec{\mathrm{e}}_A\right\}$ следующий вид:

$$d\vec{x}=\omega^A\vec{e}_A,\quad d\vec{e}_A=\omega_A^B\vec{e}_B \tag{4.7}$$

Дифференциальные формы ω^A и ω_A^B, входящие в (4.7), удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства, а формы ϖ^A и ϖ_A^B удовлетворяют уравнениям структуры риманова пространства.

В силу согласованного выбора реперов в областях Ω и $\overline{\Omega}\subset V_{n-1}$ 1-формы ω^A и ϖ^A, определяющие перемещение точек x и y, связаны равенствами:

$$\varpi^A=\omega^A \tag{4.8}$$

Дифференцируя их внешним образом, получим:

$$\varpi_B^A-\omega_B^A=h_{BC}^A\omega^C, \tag{4.9}$$

где $h_{BC}^A=h_{CB}^A$.

Как и ранее, примем:

$$\vec{y}=\vec{x}+\rho\vec{e}_n \tag{4.10}$$

Дифференцируя равенство (4.10), получим выражение векторов репера $\left\{y,\ \vec{a}_A\right\}$ через векторы репера $\left\{x,\ \vec{e}_A\right\}$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= (\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n, \\ \vec{a}_n &= -\rho\Lambda^i\vec{e}_i + (1+\rho_n)\vec{e}_n, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где $\Lambda_i^j = g^{jk}\Lambda_{ki}$, $\Lambda^i = g^{ij}\Lambda_j$ и $d\rho = \rho_i\omega^i + \rho_n\omega^n$. Также имеем:

$$\begin{aligned} d\Lambda_i^j &= \Lambda_k^j\omega_i^k - \Lambda_i^k\omega_k^j + \Lambda^j\omega_i^n + g^{jk}\Lambda_{kiA}\omega^A \\ d\Lambda^i &= -\Lambda^j\omega_j^i + \Lambda_j^i\omega_n^j + g^{ij}\Lambda_{jnA}\omega^A \\ d\rho_i &= \rho_j\omega_i^j + \rho_n\omega_i^n + \rho_{ij}\omega^j + \rho_{in}\omega^n \\ d\rho_n &= \rho_i\omega_n^i + \rho_{in}\omega^i + \rho_{nn}\omega^n, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где Λ_{kiA}, Λ_{jnA}, ρ_{ij}, ρ_{in} симметричны по двум последним индексам.

Запишем первые равенства системы (4.11) в виде: $\vec{a}_i = c_i^j\vec{e}_j + \rho_i\vec{e}_n$, где $c_i^j = \delta_i^j - \rho\Lambda_i^j$ и продифференцировав это равенство, получим:

$$d\vec{a}_i = dc_i^j\vec{e}_j + c_i^j d\vec{e}_j + d\rho_i\vec{e}_n + \rho_i d\vec{e}_n.$$

С учетом второго равенства из (4.1), имеем:

$$\begin{aligned} &\varpi_i^j\vec{a}_j + \varpi_i^n\vec{a}_n + \omega^j\vec{a}_{ij} + \omega^n\vec{a}_{in} = dc_i^j\vec{e}_j + c_i^j\omega_j^k\vec{e}_k + c_i^j\omega_j^n\vec{e}_n + \\ &+ d\rho_i\vec{e}_n + \rho_i\omega_n^j\vec{e}_j. \end{aligned}$$

С учетом (4.11), запишем:

$$\begin{aligned} &\varpi_i^j c_j^k\vec{e}_k + \varpi_i^j\rho_j\vec{e}_n - \varpi_i^n\rho\Lambda^j\vec{e}_j + \varpi_i^n(1+\rho_n)\vec{e}_n + \omega^j\vec{a}_{ij} + \omega^n\vec{a}_{in} = dc_i^j\vec{e}_j + \\ &+ c_i^j\omega_j^k\vec{e}_k + c_i^j\omega_j^n\vec{e}_n + d\rho_i\vec{e}_n + \rho_i\omega_n^j\vec{e}_j. \end{aligned}$$

Также будем получать:

$$\begin{aligned} &dc_i^j = d(\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j) = -d\rho\Lambda_i^j - \rho d\Lambda_i^j = -d\rho\Lambda_i^j - \rho\Lambda_k^j\omega_i^k + \rho\Lambda_i^k\omega_k^j - \\ &- \rho\Lambda^j\omega_i^n - \rho g^{jk}\Lambda_{kiA}\omega^A. \end{aligned}$$

Подставляя последние равенства в предыдущие, получим:

$$\varpi_i^j c_j^k \vec{e}_k + \varpi_i^j \rho_j \vec{e}_n - \varpi_i^n \rho \Lambda^j \vec{e}_j + \varpi_i^n (1+\rho_n) \vec{e}_n + \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} = -d\rho \Lambda_i^j \vec{e}_j -$$
$$-\rho \Lambda_k^j \omega_i^k \vec{e}_j + \rho \Lambda_i^k \omega_k^j \vec{e}_j - \rho \Lambda^j \omega_i^n \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kiA} \omega^A \vec{e}_j + c_i^j \omega_j^k \vec{e}_k + c_i^j \omega_j^n \vec{e}_n +$$
$$+ d\rho_i \vec{e}_n + \rho_i \omega_n^j \vec{e}_j - \delta_k^j \omega_i^k \vec{e}_j.$$

С учетом равенств (4.12), последнее равенство примет вид:

$$(\varpi_i^j - \omega_i^j) c_j^k \vec{e}_k + \varpi_i^j \rho_j \vec{e}_n - \varpi_i^n \rho \Lambda^j \vec{e}_j + \varpi_i^n (1+\rho_n) \vec{e}_n + \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} =$$
$$= -\rho_k \omega^k \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho_n \omega^n \Lambda_i^j \vec{e}_j + \rho \Lambda_i^k \omega_k^j \vec{e}_j - \rho \Lambda^j \omega_i^n \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kiA} \omega^A \vec{e}_j +$$
$$+ c_i^j \omega_j^k \vec{e}_k + c_i^j \omega_j^n \vec{e}_n + \rho_j \omega_i^j \vec{e}_n + \rho_n \omega_i^n \vec{e}_n + \rho_{iA} \omega^A \vec{e}_n + \rho_i \omega_n^j \vec{e}_j - \omega_i^j \vec{e}_j.$$

Далее будем получать:

$$(\varpi_i^j - \omega_i^j) c_j^k \vec{e}_k - (\varpi_i^n - \omega_i^n) \rho \Lambda^j \vec{e}_j + (\varpi_i^n - \omega_i^n)(1+\rho_n) \vec{e}_n + \varpi_i^j \rho_j \vec{e}_n +$$
$$+ \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} = -\rho_k \omega^k \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho_n \omega^n \Lambda_i^j \vec{e}_j + \rho \Lambda_i^k \omega_k^j \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kiA} \omega^A \vec{e}_j +$$
$$+ c_i^j \omega_j^k \vec{e}_k - \rho \Lambda_i^j \omega_j^n \vec{e}_n + \rho_j \omega_i^j \vec{e}_n + \rho_{iA} \omega^A \vec{e}_n + \rho_i \omega_n^j \vec{e}_j - \omega_i^j \vec{e}_j.$$

С учетом дальнейших преобразований, запишем:

$$(\varpi_i^j - \omega_i^j) c_j^k \vec{e}_k - (\varpi_i^n - \omega_i^n) \rho \Lambda^j \vec{e}_j + (\varpi_i^n - \omega_i^n)(1+\rho_n) \vec{e}_n + (\varpi_i^j - \omega_i^j) \rho_j \vec{e}_n +$$
$$+ \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} = -\rho_k \omega^k \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho_n \omega^n \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kiA} \omega^A \vec{e}_j -$$
$$-\rho \Lambda_i^j \omega_j^n \vec{e}_n + \rho_{iA} \omega^A \vec{e}_n + \rho_i \omega_n^j \vec{e}_j.$$

С учетом (5.11) запишем последние равенства:

$$(\varpi_i^j - \omega_i^j) \vec{a}_j + (\varpi_i^n - \omega_i^n) \vec{a}_n + \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} = -\rho_k \omega^k \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho_n \omega^n \Lambda_i^j \vec{e}_j -$$
$$-\rho g^{jk} \Lambda_{kil} \omega^l \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kin} \omega^n \vec{e}_j - \rho \Lambda_i^j \Lambda_{jk} \omega^k \vec{e}_n - \rho \Lambda_i^j \Lambda_j \omega^n \vec{e}_n +$$
$$+ \rho_{ij} \omega^j \vec{e}_n + \rho_{in} \omega^n \vec{e}_n - \rho_i \Lambda_k^j \vec{e}_j \omega^k - \rho_i \Lambda^j \vec{e}_j \omega^n.$$

С учетом равенств (5.9), последние равенства можно представить в виде:

$$h_{ik}^j \omega^k \vec{a}_j + h_{in}^j \omega^n \vec{a}_j + h_{ik}^n \omega^k \vec{a}_n + h_{in}^n \omega^n \vec{a}_n + \omega^j \vec{a}_{ij} + \omega^n \vec{a}_{in} = -\rho_k \omega^k \Lambda_i^j \vec{e}_j -$$
$$-\rho_n \omega^n \Lambda_i^j \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kil} \omega^l \vec{e}_j - \rho g^{jk} \Lambda_{kin} \omega^n \vec{e}_j - \rho \Lambda_i^j \Lambda_{jk} \omega^k \vec{e}_n - \rho \Lambda_i^j \Lambda_j \omega^n \vec{e}_n +$$
$$+ \rho_{ij} \omega^j \vec{e}_n + \rho_{in} \omega^n \vec{e}_n - \rho_i \Lambda_k^j \vec{e}_j \omega^k - \rho_i \Lambda^j \vec{e}_j \omega^n.$$

Ввиду линейной независимости форм ω^A, из последних равенств получим:

$$h_{ik}^j\vec{a}_j + h_{ik}^n\vec{a}_n + \vec{a}_{ik} = -\rho_k\Lambda_i^j\vec{e}_j - \rho g^{jl}\Lambda_{lik}\vec{e}_j - \rho\Lambda_i^j\Lambda_{jk}\vec{e}_n + \rho_{ik}\vec{e}_n - \rho_i\Lambda_k^j\vec{e}_j$$

$$h_{in}^j\vec{a}_j + h_{in}^n\vec{a}_n + \vec{a}_{in} = -\rho_n\Lambda_i^j\vec{e}_j - \rho g^{jk}\Lambda_{kin}\vec{e}_j - \rho\Lambda_i^j\Lambda_j\vec{e}_n + \rho_{in}\vec{e}_n - \rho_i\Lambda^j\vec{e}_j.$$

Из последних равенств окончательно запишем:

$$\begin{aligned}\vec{a}_{ik} &= -h_{ik}^j\vec{a}_j - h_{ik}^n\vec{a}_n - (\rho_k\Lambda_i^j + \rho g^{jl}\Lambda_{lik} + \rho_i\Lambda_k^j)\vec{e}_j - (\rho\Lambda_i^j\Lambda_{jk} - \rho_{ik})\vec{e}_n \\ \vec{a}_{in} &= -h_{in}^j\vec{a}_j - h_{in}^n\vec{a}_n - (\rho_n\Lambda_i^j + \rho g^{jk}\Lambda_{kin} + \rho_i\Lambda^j)\vec{e}_j - (\rho\Lambda_i^j\Lambda_j - \rho_{in})\vec{e}_n\end{aligned} \tag{4.13}$$

Из первого соотношения системы (4.13) легко показать, что $\vec{a}_{ik} = \vec{a}_{ki}$, то есть вектора $\vec{a}_{ij}$ симметричны по нижним индексам.

Для нахождения векторов $\vec{a}_{ni}$ и $\vec{a}_{nn}$ продифференцируем второе равенство из (4.11):

$$d\vec{a}_n = -d\rho\Lambda^i\vec{e}_i - \rho d\Lambda^i\vec{e}_i - \rho\Lambda^i d\vec{e}_i + d\rho_n\vec{e}_n + (1+\rho_n)d\vec{e}_n.$$

С учетом (4.1) и (4.12) последнее равенство примет вид:

$$\varpi_n^i\vec{a}_i + \varpi_n^n\vec{a}_n + \omega^A\vec{a}_{nA} = -\Lambda^i\vec{e}_i\rho_j\omega^j - \Lambda^i\vec{e}_i\rho_n\omega^n - \rho(-\Lambda^j\omega_j^i + \Lambda_j^i\omega_n^j +$$

$$+g^{ij}\Lambda_{jnA}\omega^A)\vec{e}_i - \rho\Lambda^i\omega_i^j\vec{e}_j - \rho\Lambda^i\omega_i^n\vec{e}_n + (\rho_j\omega_n^j + \rho_{in}\omega^i + \rho_{nn}\omega^n)\vec{e}_n +$$

$$+(1+\rho_n)\omega_n^j\vec{e}_j.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}&\varpi_n^i(\delta_i^j - \rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j + \varpi_n^i\rho_i\vec{e}_n - \varpi_n^n\rho\Lambda^i\vec{e}_i + \varpi_n^n(1+\rho_n)\vec{e}_n + \omega^j\vec{a}_{nj} + \\ &+\omega^n\vec{a}_{nn} = -\Lambda^i\vec{e}_i\rho_j\omega^j - \Lambda^i\vec{e}_i\rho_n\omega^n - \rho(\Lambda_j^i\omega_n^j + g^{ij}\Lambda_{jnA}\omega^A)\vec{e}_i - \\ &-\rho\Lambda^i\omega_i^n\vec{e}_n + (\rho_j\omega_n^j + \rho_{in}\omega^i + \rho_{nn}\omega^n)\vec{e}_n + (1+\rho_n)\omega_n^j\vec{e}_j.\end{aligned}$$

Группируя члены в последнем равенстве, запишем:

$$\begin{aligned}&(\varpi_n^i - \omega_n^i)\vec{e}_i - (\varpi_n^i - \omega_n^i)\rho\Lambda_i^j\vec{e}_j + (\varpi_n^i - \omega_n^i)\rho_i\vec{e}_n - (\varpi_n^n - \omega_n^n)\rho\Lambda^i\vec{e}_i + \\ &+(\varpi_n^n - \omega_n^n)(1+\rho_n)\vec{e}_n + \omega^j\vec{a}_{nj} + \omega^n\vec{a}_{nn} = -\Lambda^i\vec{e}_i\rho_j\omega^j - \Lambda^i\vec{e}_i\rho_n\omega^n - \\ &-\rho g^{ij}\Lambda_{jnk}\omega^k\vec{e}_i - \rho g^{ij}\Lambda_{jnn}\omega^n\vec{e}_i - \rho\Lambda^i\Lambda_{ij}\omega^j\vec{e}_n - \rho\Lambda^i\Lambda_i\omega^n\vec{e}_n + \\ &+\rho_{in}\omega^i\vec{e}_n + \rho_{nn}\omega^n\vec{e}_n - \rho_n\Lambda_k^j\omega^k\vec{e}_j - \rho_n\Lambda^j\omega^n\vec{e}_j.\end{aligned}$$

Вынося за скобки подобные члены, получим:

$$(\varpi_n^i-\omega_n^i)((\delta_i^j-\rho\Lambda_i^j)\vec{e}_j+\rho_i\vec{e}_n)+(\varpi_n^n-\omega_n^n)(-\rho\Lambda^i\vec{e}_i+(1+\rho_n)\vec{e}_n)+$$
$$+\omega^j\vec{a}_{nj}+\omega^n\vec{a}_{nn}=-\Lambda^i\vec{e}_i\rho_j\omega^j-2\Lambda^i\vec{e}_i\rho_n\omega^n-\rho g^{ij}\Lambda_{jnk}\omega^k\vec{e}_i-$$
$$-\rho g^{ij}\Lambda_{jnn}\omega^n\vec{e}_i-\rho\Lambda^i\Lambda_{ij}\vec{e}_n\omega^j-\rho\Lambda^i\Lambda_i\vec{e}_n\omega^n+\rho_{in}\vec{e}_n\omega^i+$$
$$+\rho_{nn}\vec{e}_n\omega^n-\rho_n\Lambda_k^j\vec{e}_j\omega^k.$$

С учетом (4.11) будем иметь:

$$(\varpi_n^i-\omega_n^i)\vec{a}_i+(\varpi_n^n-\omega_n^n)\vec{a}_n+\omega^j\vec{a}_{nj}+\omega^n\vec{a}_{nn}=(-\Lambda^i\vec{e}_i\rho_j-\rho g^{ik}\Lambda_{knj}\vec{e}_i-$$
$$-\rho\Lambda^i\Lambda_{ij}\vec{e}_n+\rho_{jn}\vec{e}_n-\rho_n\Lambda_j^k\vec{e}_k)\omega^j+(-2\Lambda^i\vec{e}_i\rho_n-\rho g^{ij}\Lambda_{jnn}\vec{e}_i-\rho\Lambda^i\Lambda_i\vec{e}_n+$$
$$+\rho_{nn}\vec{e}_n)\omega^n.$$

Учитывая (4.9), получим:

$$h_{nj}^i\omega^j\vec{a}_i+h_{nn}^i\omega^n\vec{a}_i+h_{nj}^n\omega^j\vec{a}_n+h_{nn}^n\omega^n\vec{a}_n+\omega^j\vec{a}_{nj}+\omega^n\vec{a}_{nn}=((-\Lambda^i\rho_j-$$
$$-\rho g^{ik}\Lambda_{knj}-\rho_n\Lambda_j^i)\vec{e}_i+(\rho_{jn}-\rho\Lambda^i\Lambda_{ij})\vec{e}_n)\omega^j+((-2\Lambda^i\rho_n-\rho g^{ij}\Lambda_{jnn})\vec{e}_i+$$
$$+(\rho_{nn}-\rho\Lambda^i\Lambda_i)\vec{e}_n)\omega^n.$$

Так как формы ω^A линейно независимы, то из последнего равенства будем иметь:

$$h_{nj}^i\vec{a}_i+h_{nj}^n\vec{a}_n+\vec{a}_{nj}=(-\Lambda^i\rho_j-\rho g^{ik}\Lambda_{knj}-\rho_n\Lambda_j^i)\vec{e}_i+(\rho_{jn}-\rho\Lambda^i\Lambda_{ij})\vec{e}_n$$
$$h_{nn}^i\vec{a}_i+h_{nn}^n\vec{a}_n+\vec{a}_{nn}=(-2\Lambda^i\rho_n-\rho g^{ij}\Lambda_{jnn})\vec{e}_i+(\rho_{nn}-\rho\Lambda^i\Lambda_i)\vec{e}_n.$$

Из последних равенств окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned}&\vec{a}_{ni}=-h_{ni}^j\vec{a}_j-h_{ni}^n\vec{a}_n-(\rho_i\Lambda^j+\rho g^{jk}\Lambda_{kni}+\rho_n\Lambda_i^j)\vec{e}_j+(\rho_{in}-\rho\Lambda^j\Lambda_{ji})\vec{e}_n\\&\vec{a}_{nn}=-h_{nn}^i\vec{a}_i-h_{nn}^n\vec{a}_n-(2\Lambda^i\rho_n+\rho g^{ij}\Lambda_{jnn})\vec{e}_i+(\rho_{nn}-\rho\Lambda^i\Lambda_i)\vec{e}_n\end{aligned}\tag{4.14}$$

Из второго равенства (5.13) вычитая первое равенство (5.14), получим:

$$\vec{a}_{in}-\vec{a}_{ni}=(-\rho\Lambda_i^j\Lambda_j+\rho\Lambda^j\Lambda_{ji})\vec{e}_n=(-\rho g^{jk}\Lambda_{ki}\Lambda_j+\rho\Lambda^j\Lambda_{ji})\vec{e}_n=$$
$$=(-\rho\Lambda^k\Lambda_{ki}+\rho\Lambda^j\Lambda_{ji})\vec{e}_n=\vec{0},$$

где учтена симметричность Λ_{kin} по двум последним индексам. Тем самым, вектора $\vec{a}_{in}$ симметричны по нижним индексам.

Из равенств (4.3) и (4.4) видно, что голономные реперы, в данном случае, связаны с гиперраспределением и их голономность не как не отражается на голономности гиперраспределения.

Найдем выражения для векторов $\vec{a}_{AB}$ в случаях, когда рассматриваемое дифференцируемое отображение является: 1) конформным и 2) геодезическим.

1) Отображение f − конформное отображение. Тогда, согласно формулам (1.7) будем иметь:

$$\begin{aligned} &h^j_{ik} = \delta^j_i \alpha_k + \delta^j_k \alpha_i - g_{ik}\alpha^j, \quad h^n_{ik} = -g_{ik}\alpha^n, \\ &h^j_{in} = \delta^j_i \alpha_n, \quad h^n_{in} = \alpha_i, \quad h^i_{nn} = -\alpha^i, \quad h^n_{nn} = \alpha_n \end{aligned} \tag{4.15}$$

Учитывая равенства (4.15), запишем выражения для векторов $\vec{a}_{AB}$ в случае конформного отображения:

$$\begin{aligned} &\vec{a}_{ik} = -(\delta^j_i \alpha_k + \delta^j_k \alpha_i - g_{ik}\alpha^j)\vec{a}_j + g_{ik}\alpha^n \vec{a}_n - (\rho_k \Lambda^j_i + \rho g^{jl}\Lambda_{lik} + \rho_i \Lambda^j_k)\vec{e}_j - \\ &-(\rho \Lambda^j_i \Lambda_{jk} - \rho_{ik})\vec{e}_n \\ &\vec{a}_{in} = -\alpha_n \vec{a}_i - \alpha_i \vec{a}_n - (\rho_n \Lambda^j_i + \rho g^{jk}\Lambda_{kin} + \rho_i \Lambda^j)\vec{e}_j - (\rho \Lambda^j_i \Lambda_j - \rho_{in})\vec{e}_n \\ &\vec{a}_{ni} = -\alpha_n \vec{a}_i - \alpha_i \vec{a}_n - (\rho_i \Lambda^j + \rho g^{jk}\Lambda_{kni} + \rho_n \Lambda^j_i)\vec{e}_j + (\rho_{in} - \rho \Lambda^j \Lambda_{ji})\vec{e}_n \\ &\vec{a}_{nn} = \alpha^i \vec{a}_i - \alpha_n \vec{a}_n - (2\Lambda^i \rho_n + \rho g^{ij}\Lambda_{jnn})\vec{e}_i + (\rho_{nn} - \rho \Lambda^i \Lambda_i)\vec{e}_n \end{aligned} \tag{5.16}$$

2) Отображение f − геодезическое отображение. Используя равенства (2.2), будем иметь:

$$\begin{aligned} &h^j_{ik} = \delta^j_i \lambda_k + \delta^j_k \lambda_i, \quad h^n_{ik} = 0, \quad h^j_{in} = \delta^j_i \lambda_n, \\ &h^n_{in} = \lambda_i, \quad h^i_{nn} = 0, \quad h^n_{nn} = 2\lambda_n \end{aligned} \tag{4.17}$$

Согласно равенствам (4.17), выражения для векторов $\vec{a}_{AB}$ при геодезическом отображении, будут иметь вид:

$$\vec{a}_{ik} = -(\delta_i^j \lambda_k + \delta_k^j \lambda_i)\vec{a}_j - (\rho_k \Lambda_i^j + \rho g^{jl} \Lambda_{lik} + \rho_i \Lambda_k^j)\vec{e}_j - (\rho \Lambda_i^j \Lambda_{jk} - \rho_{ik})\vec{e}_n$$

$$\vec{a}_{in} = -\lambda_n \vec{a}_i - \lambda_i \vec{a}_n - (\rho_n \Lambda_i^j + \rho g^{jk} \Lambda_{kin} + \rho_i \Lambda^j)\vec{e}_j - (\rho \Lambda_i^j \Lambda_j - \rho_{in})\vec{e}_n \quad (4.18)$$

$$\vec{a}_{ni} = -\lambda_n \vec{a}_i - \lambda_i \vec{a}_n - (\rho_i \Lambda^j + \rho g^{jk} \Lambda_{kni} + \rho_n \Lambda_i^j)\vec{e}_j + (\rho_{in} - \rho \Lambda^j \Lambda_{ji})\vec{e}_n$$

$$\vec{a}_{nn} = -2\lambda_n \vec{a}_n - (2\Lambda^i \rho_n + \rho g^{ij} \Lambda_{jnn})\vec{e}_i + (\rho_{nn} - \rho \Lambda^i \Lambda_i)\vec{e}_n$$

Для описания движения крови по всей ССС используется геометрия субпроективного пространства. Полученные в этой главе результаты необходимы для исследований в последующих главах. В третьей главе решаются задачи по разработке специального математического аппарата для структурных параметров и связанных с ними соотношений в математической модели движении крови во всей системе, а также выбору структуры для анализа состояния при формализованном описании ССС.

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ ПО УЧАСТКУ СОСУДА

4.1. Структурная основа моделирования системы кровообращения

Роль современной геометрии в математике обуславливается наглядностью многих образов, с которыми она оперирует. В настоящее время геометрическая наглядность подвергается формализации и абстрагированию, а это позволило достигнуть тех успехов, которые были получены не только в современной геометрии, но и в ее многочисленных приложениях. Главная задача данной работы – применить современные достижения дифференциальной геометрии к исследованию движения крови, а именно для описания геометрии пространства, в котором происходит движение крови, и геометрии траекторий движения частиц крови.

При таком подходе, когда рассматривается геометрия линий тока скорости крови, огромная роль принадлежит развитой теории дифференциальной геометрии, основанной на использовании аппарата внешних дифференциальных форм.

Рассмотрение геометрии линий тока вектора скорости крови представляет интерес не только с точки зрения геометрии, но и в исследованиях, которые проводятся по моделированию деятельности как всей ССС человека, так и ее отдельных частей. Описание движения частицы крови, а также описание траектории, по которой она движется, позволит оценить состояние как всей системы кровообращения в целом, так и движение крови по отдельному сосуду. При этом можно, в некоторой степени, по изменению траектории движения, а также вида движения (турбулентное или ламинарное) рассматривать и состояние сосуда на наличие у него патологических изменений, к которым относится, прежде всего, образование атероматозных бляшек и других патологических изменений.

При описании геометрии линий тока скорости крови важное значение имеет вид пространства, которое соотносится с пространством кровеносной системы. Здесь следует отметить, что кровеносная система человека представляет собой определенное пространство, геометрия которого соотносится с геометрией пространства, которое будем называть пространственной моделью кровеносной системы и геометрия которого рассматривается в качестве геометрии ССС и в котором описывается геометрия линий тока скорости крови. Следует также отметить, что модельное пространство предлагается исследователем, опираясь на современные знания кровеносной системы и на знания геометрии данной системы, а также основывается на определенном математическом аппарате, который используется для решения поставленных задач.

Рассматривая небольшой участок сосуда, можно вести исследования в евклидовом пространстве, так как достаточно малый участок сосуда по своим свойствам близок к данному пространству (нет кривизны, и геодезические линии представляют собой прямые линии). Однако уже при рассмотрении довольно большого участка сосуда, а также всей ССС человека, уже не обойтись евклидовым пространством и надо использовать пространство, геометрия которого была бы близка к геометрии кровеносной системы.

В отличие от ранее предлагаемых подходов моделирования ССС человека, которые были рассмотрены в главе 1, в данной работе рассматривается геометрия системы кровообращения, которая основывается на основополагающих трудах по геометрии потока идеальной несжимаемой жидкости с использованием аппарата дифференциальных форм (внешней алгебры). Аппарат внешних дифференциальных форм показал свою высокую эффективность в кристаллооптике, механике твердого тела, теории калибровочных полей в квантовой механике и, наконец, в электродинамике поперечных и продольных волн. Первые работы автора по исследованию геометрии кровеносной системы человека с использованием пространственной модели системы кровообращения позволили оценить эффективность метода внешних дифференциальных форм при проведении данного исследования.

Моделирование работы ССС человека требует определенных аппроксимаций. Адекватность модели при ее использовании в теоретических или практических исследованиях влечет за собой систему допущений. Но последние не должны сводить на нет моделируемые отношения. Для этого существенные свойства и отношения выделяются и при моделировании того или иного процесса или системы человека должны быть учтены. Не последняя роль при изучении систем человека должна отводиться и их геометрическим характеристикам. Геометрия изучаемой системы позволит описать не только определенные связи между составляющими частями системы, но и отразить строение и принципы деятельности данной системы.

Подтверждением последних слов, при рассмотрении геометрии кровеносной системы человека, является то, что при описании геометрии в достаточно-малой части сосуда, исследования ведутся в евклидовом пространстве. Уже при рассмотрении геометрии всей ССС используем одну из разновидностей римановой геометрии – геометрию субпроективного пространства.

При моделировании ССС человека следует исходить из определенных физиологических предпосылок. Для этого представляем ССС как анатомофизиологическую подсистему организма, выполняющую в совокупности с другими системами следующие основные функции: перенос кислорода, информации, питательных веществ, тепла, углекислого газа, гормонов, передачу колебательных движений и пр. Из существенных функций кровообращения выделяем следующие: транспортные, распределение крови и поддержания определенного уровня кровяного давления. В последнее время, к транспортным функциям крови относят и передачу информации непосредственно частицами крови. Поэтому, одной из посылок, которая подвела к исследованию геометрии кровеносной системы человека и отдельных сосудов, послужила важность при исследовании движения крови знание того пути, по которому движутся частицы, переносящие информацию, а также знание свойств того пространства, в котором происходит перенос информации, которая осуществляется кровеносной системой. Перенос информации в организме человека осуществляется тремя основными путями: электромагнитным, с помощью биохимических реакций и, наконец, самый надежный путь – непосредственно передача информации при взаимодействии веществ. Роль каждого из этих трех путей важна по-своему, но наиболее надежный путь – это третий, когда происходит не только передача информации при взаимодействии веществ, но и подтверждение ранее полученной информации, осуществленной первыми двумя, более быстрыми, путями. Роль кровеносной системы в осуществлении передачи информации третьим путем, безусловно, одна из важнейших. Сущность такой передачи информации состоит в следующем. Частица крови, на какой-либо стадии своего движения, получает информацию, которая может носить самый различный характер. Продвигаясь по кровеносной системе, она взаимодействует с другими частицами, со стенками сосуда и им передает либо часть имеющейся у нее информации, либо может отдать всю информацию. Информация может переноситься частицей крови в виде вещества, энергии, типа движения самой частицы. При этом, различные частицы могут нести одну и ту же информацию, что позволяет ее дублировать и организм имеет возможность реагировать на нее также определенное время и в нужном направлении. Следует также отметить, что информация, передаваемая первыми двумя способами, как правило, подтверждается третьим способом.

В такой сложной системе, как ССС человека, имеющей сложно организованную внутреннюю структуру, возможно расщепление системы на две связанные друг с другом подсистемы. Одну из таких подсистем принято называть динамической или силовой, а вторую называют информационной или управляющей подсистемой. Под динамикой понимается обмен импульсом и энергией, а под информатикой подразумевается обмен символами между партнерами, участвующих в процессе информационного взаимодействия. При этом структурные элементы, которые довольно-таки малыми возмущениями (сигналами) значительно влияют на динамику системы, выделяются в структуру уравнениями. Тем самым, такие сложные динамические системы, к которым относится и система кровообращения человека, самостоятельно могут выделять в себе две подсистемы. Описание каждой из подсистем будет более полным, если изучено пространство, в котором происходит взаимодействие между подсистемами, а также рассмотрена геометрия линий, по которым осуществляется это взаимодействие.

Таким образом, все вышесказанное говорит о том, что в системе кровообращения происходит не только внутренняя регулировка ее деятельности, но, в виду того, что эта система связана со всеми частями и системами организма происходит регулировка деятельности всего организма. При этом возникают вопросы, связанные с описанием геометрии тех линий, по которым происходит движение частиц крови, переносящих не только энергию и кислород, а также являющихся носителями информации в организме. Таким образом, встает задача о рассмотрении или моделировании геометрии кровеносной системы человека. Следует также иметь в виду, что в зависимости от решаемой задачи, будем пользоваться либо евклидовым, либо одним из видов риманова пространства – субпроективным.

Деятельность ССС обуславливается деятельностью организма в целом, но в то же время ССС может быть представлена как независимая, функционально целостная подсистема. Будем также придерживаться следующих допущений: плотность крови постоянна ($\rho = const$), что адекватно утверждению: кровь несжимаема; вязкость крови линейно зависит от скорости, а толщина стенки сосуда мала по сравнению с его внутренним радиусом; стенка сосуда предполагается закрепленной в продольном направлении; толщина и радиус сосуда в нерастянутом состоянии постоянны по длине рассматриваемого участка. Там, где потребуются дополнительные требования или будет нужно более свободное рассмотрение (с меньшими требованиями) будет оговариваться особо.

4.2. Основные понятия модели участка сосуда

Для рассмотрения геометрии кровеносной системы человека будем пользоваться нетрадиционными для биологии и медицины математическим аппаратом, основанном на методе подвижного репера и внешних дифференциальных форм. Продуктивность данного математического аппарата в других областях естествознания не раз подтверждалось и с большим успехом используется.

Для исследования закономерностей работы ССС первостепенное значение имеет адекватная формулировка уравнений гемодинамики, решения которых показывают сложную зависимость кровотока, представляющего собой стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости, от различных физиологических параметров.

При всей кажущейся простоте и относительной точности метода аналогий, исследователи стремятся получить аналитическое решение в терминах исходной системы. Для биосистем, к которым относится и ССС, это тем более очевидно, учитывая их сложные, топологические – динамические в своей основе, характеристики сред. Поэтому для преодоления перечисленных выше трудностей, можно рассмотреть геометрию ССС и ее отдельных участков, что позволит по-новому взглянуть на многие трудности, возникающие при описании деятельности ССС человека и найти им объяснение.

Начнем с рассмотрения геометрии отдельного участка кровеносного сосуда, основываясь на использовании геометрии трехмерного евклидова пространства [155] с привлечением аппарата внешних дифференциальных форм. Однако дифференциальные формы сравнительно поздно стали использоваться в физических исследованиях (после работ Э. Картана), до этого оставаясь лишь аппаратом дифференциальной геометрии. Здесь является существенным то, что дифференциальные формы обладают естественной алгебраической структурой, которая более известна как внешняя алгебра.

Инфинитезимальные перемещения репера запишем в виде:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A; \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B \tag{2.1}$$

Формы Пфаффа удовлетворяют уравнениям структуры евклидова пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A; \quad D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A \tag{2.2}$$

Формы $\acute{\omega}^{A}$ являются базисными, то есть являются основными структурными параметрами, посредством которых можно представить все остальные величины, характеризующие ССС. При условии ортогональности рассматриваемого репера $(\omega_A^A = 0,\ \omega_B^A + \omega_A^B = 0)$ введем следующие обозначения:

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p_A\omega^A = p,\ \omega_3^1 = -\omega_1^3 = q_A\omega^A = q,\ \omega_1^2 = -\omega_2^1 = r_A\omega^A = r\,.$$

Вектор $\vec{\Omega} = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2 + r\vec{e}_3$ является вектором мгновенного вращения репера для выбранного перемещения $d\vec{x}$ его вершины. Для ортонормированного репера, с учетом введенных обозначений, уравнения (2.1) и (2.2) будут иметь вид:

$$d\vec{e}_1 = r\vec{e}_2 - q\vec{e}_3;\ d\vec{e}_2 = p\vec{e}_3 - r\vec{e}_1;\ d\vec{e}_3 = q\vec{e}_1 - p\vec{e}_2$$

$$D\omega^1 = r\wedge\omega^2 - q\wedge\omega^3;\ D\omega^2 = p\wedge\omega^3 - r\wedge\omega^1;\ D\omega^3 = q\wedge\omega^1 - p\wedge\omega^2$$

$$Dp = r\wedge q;\ Dq = p\wedge r;\ Dr = q\wedge p.$$

Если градиент функции φ представить по взаимным векторам $\vec{e}^{\,A}$ выбранной основной тройки в виде:

$$grad\varphi = A_A\vec{e}^{\,A},$$

тогда будут верны следующие равенства:

$$A_A \vec{e}^A d\vec{x} \equiv d\varphi; \; A_A \omega^A \equiv d\varphi \qquad (2.3)$$

Умножая соотношение (2.3) внешним образом поочередно на $\omega^2 \wedge \omega^3,\ \omega^3 \wedge \omega^1,\ \omega^1 \wedge \omega^2,$ определим коэффициенты A_A :

$$A_1 = \frac{d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}; \; A_2 = \frac{d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}; \; A_3 = \frac{d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}.$$

С учетом последних равенств, выражение для градиента функции через $d\varphi$ и базисные формы Пфаффа:

$$grad\varphi = \frac{\vec{e}^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + \vec{e}^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + \vec{e}^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3} \qquad (2.4)$$

Обозначим через $d\tau$ элемент объема, а через $d\vec{\sigma}$ - вектор элемента поверхности. Дивергенцию некоторого вектора $\vec{\mathrm{v}}$ определим по теореме Гаусса-Остроградского:

$$\iiint div\vec{\mathrm{v}}\, d\tau = \oiint \vec{\mathrm{v}}\, d\vec{\sigma}, \qquad (2.5)$$

применив ее к объему параллелепипеда, образованного в некоторой точке пространства векторами трех произвольных перемещений $d_1\vec{x},\ d_2\vec{x},\ d_3\vec{x}.$ В этом случае элемент объема можно записать в виде:

$$d\tau = d_1\vec{x} \wedge d_2\vec{x} \wedge d_3\vec{x} = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3, \qquad (2.6)$$

а элемент поверхности в точке x, образованный векторами $d_2\vec{x}$ и $d_3\vec{x}$, будет равен:

$$d\vec{\sigma}_{23} = [d_2\vec{x}, d_3\vec{x}],$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение. Тогда элемент поверхности в точке $\vec{x} + d_1\vec{x}$ будет равен

$$d\vec{\sigma}_{23} + d_1(d\vec{\sigma}_{23}).$$

Для замкнутой поверхности, ограничивающей элемент объема, имеем:

$$d\vec{\sigma}_{23}+d_1(d\vec{\sigma}_{23})+d\vec{\sigma}_{32}+d\vec{\sigma}_{31}+d_2(d\vec{\sigma}_{31})+d\vec{\sigma}_{13}+d\vec{\sigma}_{12}+d_3(d\vec{\sigma}_{12})+$$
$$+d\vec{\sigma}_{21}=\vec{0},$$

откуда следует, что

$$d_1(d\vec{\sigma}_{23})+d_2(d\vec{\sigma}_{31})+d_3(d\vec{\sigma}_{12})=\vec{0} \qquad (2.7)$$

Развертывая соотношение (2.5) для объема $d\tau$, после упрощения получим:

$$div\vec{\mathrm{v}}d\tau=d_1\vec{\mathrm{v}}\wedge d_2\vec{x}\wedge d_3\vec{x}+d_2\vec{\mathrm{v}}\wedge d_3\vec{x}\wedge d_1\vec{x}+d_3\vec{\mathrm{v}}\wedge d_1\vec{x}\wedge d_2\vec{x} \qquad (2.8)$$

Раскладывая вектор $\vec{\mathrm{v}}$ по векторам базиса, получим:

$$\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}^A\vec{e}_A, \qquad (2.9)$$

а также дифференцируя (2.9) и используя второе уравнение (2.1), будем иметь:

$$d\vec{\mathrm{v}}=(d\mathrm{v}^A+\mathrm{v}^B\omega_B^A)\vec{e}_A,$$

с учетом этого формула (2.8) примет вид матричного уравнения. Сделав в нем перегруппировку членов, получим соотношение:

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 div\vec{\mathrm{v}}=(d\mathrm{v}^1+\mathrm{v}^B\omega_B^1)\wedge\omega^2\wedge\omega^3+(d\mathrm{v}^2+\mathrm{v}^B\omega_B^2)\wedge\omega^3\wedge\omega^1+$$
$$+(d\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^B\omega_B^3)\wedge\omega^1\wedge\omega^2 \qquad (2.10)$$

Для ортогонального репера формула (2.10) примет вид:

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 div\vec{\mathrm{v}}=(d\mathrm{v}^1-\mathrm{v}^2r+\mathrm{v}^3q)\wedge\omega^2\wedge\omega^3+(d\mathrm{v}^2-\mathrm{v}^3p+\mathrm{v}^1r)\wedge$$
$$\wedge\omega^3\wedge\omega^1+(d\mathrm{v}^3-\mathrm{v}^1q+\mathrm{v}^2p)\wedge\omega^1\wedge\omega^2.$$

Рассуждая по аналогии, можно найти выражение для ротора некоторого вектора $\vec{\mathrm{v}}$, исходя из соотношения:

$$\iiint rot\vec{\mathrm{v}}\,d\tau=-\oiint[\vec{\mathrm{v}},d\vec{\sigma}] \qquad (2.11)$$

Применяя формулу (2.11) к объему из соотношения (2.6), учитывая равенство (2.7), а также произведя понятные преобразования, получим выражение для ротора:

$$rot\vec{\mathrm{v}}\,d\tau=-\vec{e}_A\omega^A\wedge\omega^B\wedge(d\mathrm{v}^C+\mathrm{v}^L\omega_L^C)(\vec{e}_B\vec{e}_C) \qquad (2.12)$$

Из равенства (2.12) получим соотношение для ортогонального репера: