РЕЦЕНЗИЯ

на диссертацию Прудникова Игоря Михайловича, выполненная на тему
«Аппроксимация и оптимизация липшицевых функций»
по специальности 01.01.09 – Математическая кибернетика

Цель работы – исследование локально липшицевых функций и локально липшицевых многозначных отображений. Липшицевые функции – это широкий класс функций, часто встречающихся в практике, а их исследование и реализация для них численных методов имеет важное практическое значение для решения сложных оптимизационных задач. Основная сложность разработки численных методов для такого класса функций заключается в том, что липшицевые функции в общем случае – недифференцируемые функции.

Разработка численных методов связано с подходом к аппроксимации функций в окрестности точки. Соискатель предлагает оригинальный способ аппроксимации, основанный на вычислении усредненных градиентов вдоль кривых из некоторого множества. Этот способ «наследует» способы аппроксимации Кларка и Мишеля–Пенно. С помощью предлагаемого способа аппроксимации И.М. Прудников записывает необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия оптимальности в точке. Также, основываясь на той же идее, вводится новое многозначное отображение, являющееся аналогом ε-субдифференциального отображения для выпуклой функции, α,δ-обобщенные матрицы для липшицевых функций.

Для нахождения α- стационарных точек вводится α-субдифференциал, который имеет те же свойства, что ε-субдифференциал для выпуклых функций, т.е. непрерывность и липшицевость.

Многие процессы в технике и экономике описываются многозначными отображениями. Соискатель исследует способы аппроксимаций липшицевых многозначных отображений с выпуклыми компактными образами. Показано, что для таких отображений опорная функция почти всюду имеет матрицу вторых смешанных производных по аргументу x и опорному вектору q. Соискатель строит аппроксимацию для липшицевых многозначных отображений, используя усредненные матрицы вторых смешанных производных вдоль кривых из определяемого им множества. С помощью усредненных матриц вторых смешанных производных опорной функции удается найти субдифференциал Кларка маргинальной функции и вид ее производной по направлению, что важно для оптимизации такого рода функций.

Матрицы вторых смешанных производных опорной функции вычисляются для многих видов многозначных отображений: для выпуклой оболочки вектор-функций; для многозначного отображения, заданного в виде системы неравенств для сильно выпуклых по связанной переменной функций; для α-субдифференциального отображения. Матрицы вторых смешанных производных для α-субдифференциального отображения используются для нахождения α-стационарных точек.

Через предельные матрицы вторых смешанных производных, а также через предельные усредненные матрицы вторых смешанных производных опорной функции вдоль кривых из определяемого автором множества кривых определяются множества возможных направлений при более слабых ксловиях, чем это делалось ранее другими авторами. Множества возможных направлений используются для получения вида производной по направлениям маргинальной функции. Находится вид субдифференциала Кларка для маргинальной функции.

Аппроксимация негладкой функции полиномами или другими гладкими функциями часто не приводит к цели, так как в итоге определяются дополнительные точки экстремума. Отделение точек экстремума исходной функции от новых точек экстремума, которые обязательно появляются, представляет собой трудную задачу. Интересна предлагаемая идея аппроксимации негладких липшицевых функций с помощью гладких дважды дифференцируемых функций, у которых точки экстремума находятся от точек экстремума исходной функции на расстоянии, оцениваемом сверху и уменьшаемом в процессе оптимизации. Соискатель предлагает такой способ аппоксимации, при котором новые точки экстремума находятся на расстоянии от истинных точек экстремума, зависящем от параметра аппроксимации ε. Разработанная процедура замены исходной функции на дважды дифференцируемую функцию построена таким образом, что для выпуклого случая получается выпуклая дважды дифференциру-емая функция, а для вогнутого случая – вогнутая дважды дифференцируемая функция. К построенной дважды дифференцируемой функции, зависящей от параметра ε, применяется метод второго порядка для поиска точки локадьного экстремума. В итоге, можно строить методы оптимизации липшицевых функций, сходящиеся со сверхлинейной скоростью. Это интересная идея, которая безусловно получит дальнейшее развитие.

Одна из трудных задач прикладной математики – это поиск оптимального управления. Эту задачу диссертант предлагает решить с помощью метода регуляризации и применения разработанного им метода овыпукления решений уравнения теплопроводности и уравнения Пуассона. Метод овыпукления позволяет синхронно изменять параметр регуляризации и точность решения по функционалу, что важно для решения некорректных задач.

Несомненный интерес представляет доказанная и опубликованная им в «Сибирском математическом журнале» теорема, дающая необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции в виде разности выпуклых функций. Это проблема получила свое решение для двухмерного случая. Эта теорема интересна для специалистов разных специальностей, в том числе и для специалистов в оптимизации, поскольку в квазидифференциальном исчислении изучаются функции, у которых производная по направлениям, как функции от направления, есть разность двух сублинейных функций.

В главе 6 решается практическая задача построения экзостеров. Дается алгоритм такого построения. В последней главе строится субдифференциал второго порядка для широкого класса функций – липшицевых функций. С помощью обобщенных матриц записываются достаточные условия оптимальности. Результаты главы опубликованы в международном журнале “Journal of Optimization and Application”.

Замечания по работе.

1. Некоторые доказательства опираются, в основном, на геометрическую интерпретацию, как, например, доказательство теорем 1.3.1 и 1.4.5.
2. Не совсем понятно, как осуществлять переход от градиентного метода к методу второго порядка при поиске оптимального управления в главе 4.
3. Не в достаточной степени приведено численных экспериментов для описанных в диссертации оптимизационных методов.
4. Описанный «алгоритм представления функции в виде разности выпуклых» в обычном смысле нельзя назвать алгоритмом, так как он может получиться с неограниченным числом шагов. Лучше назвать его процедурой.

Выводы.

Указанные замечания не снижают в целом положительное мнение о диссертационной работе, которая выполнена на высоком научном уровне. По объему и содержанию работа Прудникова Игоря Михайловича соответствует требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям.

Рецензент
Профессор кафедры вычислительной техники
филиала ФГБОУ ВО «Национальный
исследовательский университет» МЭИ»
в г. Смоленске
д.т.н., профессор В.В. Борисов

21.06.2018

Личную подпись В.В. Борисова
заверяю
Начальник ОК