научный сотрудник НИЦ СГМУ
кандидат физ-мат наук Прудников Игорь Михайлович

Аппроксимация и оптимизация липшицевых функций

Диссертация на соискание доктора физ-мат наук
по специальности
01.01.09   Дискретная математика и математическая кибернетика
консультанты: доктор физ. – мат. проф. Демьянов В.Ф.,
доктор мед. наук (спец 05.13.01 - сист. анализ и обраб информ), проф. Глотов В.А.

Сотрудничество с кафедрой анатомии человека

Сотрудничество началось с 2004 года. Участвовал в обработке научных экпериментов аспирантов СмородиноваА.В., Ленова С.Д., старшего преподавателя кафедры анатомии человека Тейкиной О.Ю. Участвую в проекте Сколково «Универсальная платформа «Франкенштейн» для биофабрикации искусственных тканей и и органов», являюсь членом редколлегии Электронного математического и медико-биологического журнала Математическая морфология.

Актуальность

1. Разработка методов оптимизации для негладких или недостаточно гладких функций – бурно развивающаяся область в Росиии и за рубежом, поскольку такие функции часто встречаются в прикладных задачах различных областей знаний: экономика, физика, техника, теория управления. Это подтверждают многочисленные публикации в международных журналах. Также проводятся ежегодние международные конференции на эту тему.

2. Прикладная математика занимается моделированием процессов в медицине, биологии, экономике, физике. И везде требуется оптимизировать различные функции, описывающие процессы, происходящие в природе.

Цель и задачи работы

В настоящее время хорошо разработаны методы оптимизации функций, имеющих непрерывные первые и вторые производные, так называемые гладкие функции. В случае, когда функция не имеет первую производную во некоторых точках, то мы говорим, что она недифференцируема или негладкая. Примером может служить $f(x)=|x|$, x – действительное число, у которой в нуле нет производной. Методы оптимизации негладких функций отличаются от таковых для гладких функций, так как вместо производных функции в точке используются обобщенные производные. Все обобщенные производные функции в точке образуют множество, называемое субдифференциалом функции в точке. Разные авторы по-разному дают определения субдифференциалов. Только для выпуклых функций они совпадают друг с другом. Эйлер называл негладкие функции «гадкими утятами».

Целью работы является разработка новых методов аппроксимаций функций и построение на их основе методов оптимизации негладких или недостаточно гладких липшицевых функций.

Липшицевые функции

Липшицевая функция f(·) –это функция, удовлетворяющая условию $|f(x)-f(y)| \leq L\|x-y\|$ для всех x,y из области определения. Липшицевые функции дифференцируемы почти всюду в области определения, но не обязательно дважды дифференцируемы. Есть примеры липшицевой функции нигде дважды дифференцируемой.

Положения, выносимые на защиту

1. Введен новый субдиференциал для локально липшицевых функций, показана связь с уже существующими. Формулируютсянеобходимые условия оптимальности в точке. Строится непрерывная равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка, которая используется в оптимизации. Строятся главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных комбинаций функций. Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке через квазидифференциал ГНВА. С помощью интеграла Стеклова вводятся субдифференциалы первого и второго порядков, состоящие из обощенных градиентов и матриц, с помощью которых формулируются небходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Дано правило построения экзостеров, что важно для оптимизации.

Положения, выносимые на защиту

2. Вводится понятие аппроксимации МО относительно множества. Строится липшицевое МО – аналог є-субдифференциального отображения отображения для выпуклых функций. Определяется вид конуса Булегана, используя предельные усредненные интегралы от матриц вторых частных производных опорной функции, которые, как доказывается, существуют почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств. С помощью таких матриц определяется субдифференциал Кларка для липшицевых МО и находится вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциал Кларка.

Положения, выносимые на защиту

3. Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций строится метод оптимизации, сходящийся со сверхлинейной скоростью к $\varepsilon(D)$-стационарной точке липшицевой функции. Вводится нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для поиска оптимального управления используются уравнения Пуассона или теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру α

Положения, выносимые на защиту

в окрестности точки оптимума. Строится численный метод поиска глобального оптимального управления.

4. Найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий.

Выводы

в диссертации развиты новые способы аппроксимации негладких липшицевых функций и на основе их построены новые методы оптимизации:

1. Введен новый субдифференциал для локально липшицевых функций, и показана связь с уже существующими. Формулируется необходимое условие оптимальности в точке.

2. Строится непрерывная равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка, которая используется в оптимизационных процессах поиска стационарных точек. Строится липшицевое МО – аналог ε-субдифференциального отображения для выпуклой функции.

3. Строятся главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных их комбинаций. Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке через квазидифференциал ГНВА.

Выводы

4. Вводится понятие аппроксимации МО относительно другого МО. Определяется вид конуса Булигана, используя предельные интегральные значения матриц вторых частных производных опорной функции, которые, как доказывается, существуют почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств. С помощью таких матриц определяется субдифференциал Кларка для липшицевых МО и находится вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциал Кларка.

5. Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций строится метод оптимизации, сходящийся со сверхлинейной скоростью к $\varepsilon(D)$-стационарной точке липшицевой функции.

Выводы

6. Вводится нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для поиска оптимального управления используются уравнения Пуассона или теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру α в окрестности точки оптимума. Строится численный метод поиска глобального оптимального управления.

Выводы

7. Найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий.

8. Дано правило построения экзостеров для липшицевых функций, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.

9. С помощью интегралов Стеклова вводятся субдифференциалы первого и второго порядков для липшицевой функций, состоящие из обобщенных градиентов и матриц, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Построено исчисление субдифференциалов.

Практические рекомендации

Практические рекомендации. Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке программного обеспечения для микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей in vitro в пространстве организованных микропотоков питательной среды и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами, которые создаются в рамках проекта Фонда "Сколково" "Универсальная платформа "Франкенштейн"для биофабрикации искусственных тканей и органов"(Начало проекта – апрель 2015 гола, научный руководитель проекта – д.м.н., проф. Глотов В.А. Автор настоящего диссертационного исследования является участником этого проекта).

Основные понятия и методы исследования

Объектом исследования являются функционалы и методы их оптимизации, то есть нахождение точки минимума или максимума во всем пространстве или на некотором его подмножестве. В качестве пространства может быть конечномерное или бесконечно мерное пространство.

В зависимости от способа аппроксимации методы оптимизации подразделяются на градиентные, если используется линейная аппроксимация, и квадратичные, если используется аппроксимация более высокого порядка.

Градиентные методы используют в процессе оптимизации производные по направлениям. Если функция дифференцируемая, то производная по направлению вычисляется как скалярное произведение градиента функции в точке на направление.

Для негладких функций вводят понятие обобщенного градиента, объединение которых образует субдифференциал функции в точке.

Субдифференциалы

В случае недифференцируемой функции, у которой производные существуют не во всех точках, вводят обобщенные градиенты. С помощью обобщенных градиентов строят градиентные методы. Множество обобщенных градиентов образуют субдифференциал. Необходимые условия экстремума записываются как принадлежность нуля субдифференциалу.

Автор вводит свое множество обобщенных градиентов как предельные усредненные интегралы от градиентов функции, вдоль кривых из некоторого класса. Множество всех обобщенных градиентов образуют субдифференциал в точке. Интересно, что в зависимости от взаимосвязи изменяемых параметров в более общей конструкции, использующей ту же идею, можно получить все известные субдифференциалы. Это субдифференциалы Кларка и Мишеля-Пено. Доказывается, что для функции, представимой в виде разности выпуклых функций, субдифференциал автора совпадает с субдифференциалом Кларка.

Важно, что с помощью введенных конструкций удается построить непрерывное расширение субдифференциала Кларка для функций, представимых разностью выпуклых, что позволяет применить разработанные ранее оптимизационные процессы Полаком, Майне и Варди для случая, когда такое расширение существует.

Что удается построить с помощью усредненных градиентов

С помощью усредненных интегралов от градиентов, вычисленных вдоль кривых из введенного класса, строятся нижние выпуклые аппроксимации, экзостеры – исчерпывающий класс верхних выпуклых аппроксимаций. Этот способ построения, как показывается, тесно связан с усредненными интегралами Стеклова, с помощью которых исходная функция заменяется на гладкую дважды дифференцируемую. Строятся оптимизационные процессы нахождения точек экстремума, сходящиеся со сверх линейной скоростью. Важно, что при такой замене точки экстремума функций не отстоят друг от друга далеко.

Рассматриваются также маргинальные функции, представляющие собой максимум или минимум от гладкой функции по липшицевому многозначному отображению. Маргинальные функции находят применение в экономике и теории управления. Показывается, что опорные функции липшицевых многозначных отображений имеют почти всюду вторую смешанную производную по опорному направлению и переменной x. С помощью усредненных интегралов от матриц вторых смешанных производных опорной функции удается получить вид конусов, описывающих многозначные отображения в окрестности точки. Используя более ранние результаты других авторов, получен вид производной маргинальной функции. Важно, что по этим формулам можно считать производную по направлениям маргинальной функции, что необходимо для оптимизации таких функций.

Усредненные интегралы Стеклова

С усредненными интегралами от градиентов тесно связаны, как показывается, усредненные интегралы от функции по множеству, зависящему от переменной x, называемые интегралами Стеклова. С помощью интегралов Стеклова удается построить субдифференциал второго порядка для липшицевой функции. Известно, что липшицевая функция почти всюду дифференцируема, но она может не иметь ни в одной точке вторую производную. В этом заключается одна из сложностей введения второго субдифференциала для липшицевых функций. Субдифференциал второго порядка состоит из обобщенных матриц, с помощью которых записываются достаточные условия оптимальности, сходные с обычными условиями для гладких функций.

Проблемные задачи из смежных областей

Развитие оптимизации и геометрии шло по похожим путям. В начале геометром, академиком А.Д. Александровым развивалась внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. Затем он начал развивать внутреннюю геометрию поверхностей, являющихся графиками функций, представимых в виде разности выпуклых функций. В конце 40-ых годов он публикует статью, где ставит проблему о нахождении условий представимости функции в виде разности выпуклых.

Оптимизация тоже началась с оптимизации выпуклых функций. Для них были определены субдифференциалы и развиты градиентные методы оптимизации. Далее перешли к оптимизации функций, представимых в виде разности выпуклых функций. Более общий класс – это квазидифференцируемые функции, введенный профессорами В.Ф. Демьяновым и А.М. Рубиновым.

Автор пришел к проблеме о представимости функции в виде разности выпуклых через решение проблемы о нахождении условия квазидифференцируемости функции в точке. В работе даны необходимые и достаточные условия представимости липшицевой функции в виде разности выпуклых для функции от двух переменных. К настоящему времени проблема решена для функций от произвольного количества аргументов.

Выводы

1. Введен новый субдифференциал для локально липшицевых функций, и показана связь с уже существующими. Формулируется необходимое условие оптимальности в точке.

2. Строится непрерывная равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка, которая используется в оптимизационных процессах поиска стационарных точек. Строится липшицевое МО аналог эпсилон-субдифференциального отображения для выпуклой функции.

3. Строятся главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных их комбинаций. Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке через квазидифференциал ГНВА.

Выводы

4. Вводится понятие аппроксимации МО относительно другого МО. Определяется вид конуса Булигана, используя предельные интегральные значения матриц вторых частных производных опорной функции, которые, как доказывается, существуют почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств. С помощью таких матриц определяется субдифференциал Кларка для липшицевых МО и находится вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциал Кларка.

5. Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие эпсилон-стационарные точки. С помощью таких функций строится метод оптимизации, сходящийся со сверхлинейной скоростью к эпсилон- стационарной точке липшицевой функции.

Выводы

6. Вводится нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для поиска оптимального управления используются уравнения Пуассона или теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру в окрестности точки оптимума. Строится численный метод поиска глобального оптимального управления.

7. Найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий.

Выводы

8. Дано правило построения экзостеров для липшицевых функций, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.

9. С помощью интегралов Стеклова вводятся субдифференциалы первого и второго порядков для липшицевой функций, состоящие из обобщенных градиентов и матриц, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Построено исчисление субдифференциалов.

Публикации

По материалам диссертации опубликованы 36 работ, из которых 21 входит в перечень ВАК РФ рецензируемых журналов.

Большая часть результатов была опубликована в статьях центральных издательств, а также за рубежом. Результаты докладывались и обсуждались на международных конференциях:

Публикации:

1. Функции экстремума по є -субдифференциальному отображению. Вестн. ЛГУ, №1, 1983
2. К условию дифференцируемости многозначного отображения с многогранными образами . Вестн. ЛГУ, №15, 1985. С. 95-98.

Публикации

3. Субдифференциал Кларка для липшицевых многозначных отображений. Кибернетика, Институт Кибернетики Укр. АН, №1, 1992. С.21-28.

4. Метод глобальной оптимизации и оценка скорости его сходимости. Автоматика и Телемеханика, № 12, 1993. С.72-81.

5. Дифференциальные свойства функции экстремума по липшицевому многозначному отображению Ж. вычисл. мат. и матем. физики, Т.34, № 10, 1994. С.1169-1174.

6. Применение метода потенциалов для оптимизации функции на множестве, заданном в виде системы линейных неравенств. Автоматика и Телемеханика, № 1, 1996. С.66-82

7. Применение некоторых уравнений математической физики для глобальной оптимизации функции на множестве. I. Автоматика и Телемеханика, №11, 2000. С.76-87.

Публикации

8. Применение некоторых уравнений математической физики для глобальной оптимизации функции на множестве. II. Автоматика и Телемеханика, №12, 2000. С. 80-91

9. Об аппроксимации многозначных отображений. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, Т.37, № 11, 1997. С.1319-1326.

10. Нижние выпуклые аппроксимации липшицевых функций. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, Т.40, № 3, 2000. С.378-386.

11. Правила построения нижних выпуклых аппроксимаций. Ж. вычисл. мат. и матем. физики, Т.43, № 7, 2003. С.939-950.

12. New constructions for local approximation of Lipschitz functions. I. New constructions for local approximation of Lipschitz functions. I. Nonlinear Analysis, Volume 54, Issue 3, August 2003, P. 373-390.

Публикации

13. New constructions for local approximation of Lipschitz functions. II . Nonlinear Analysis, Volume 66, Issue 7, August 2007, P. 1443-1453.

14. Stochastic model of money flow in economics. Cubo, A Mathematical Journal. Vol. 9, №3, 29-38. – 2007.

15. Subdifferentials of the First and Second Orders for Lipschitz Functions. J. of Optimization Theory and Application. 2016. V. 171. No.3. P. 906-930.

16. Интегральная аппроксимация липшицевых функций. Вестник С.Петербургского университета, сер. 10, вып. 2. 2010. С. 70-83.

17. Метод построения исчерпывающего множества верхних выпуклых аппроксиамций. Вестник С.-Петербургского университета. сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 37-51.

Публикации

18. К вопросу о представимости функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Сибирский математический журнал РАН, 55(6), 2014.С.1368-1380

19. $C^2(D)$ интегральные аппроксимации негладких функций, сохраняющие ε(D) точки локальных экстремумов. Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, N 5. Доп. номер. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С.159-169.

20. Условия представимости функции в виде разности выпуклых. Изд. LAMBERT Acad. Publ, Germany, 2017.

21 Generalized matrices for Lipschitz functions. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. V.4. №2(2010). P. 227-244.

22. Construction of a stabilizing control and solution to a problem about the center and focus for differential systems with a polynomial part on the right side. Nonlinear Analysis, v. 69,№12, 4694-4705P. 2008

Конец выступления

Благодарю за внимание!