На правах рукописи

ПРУДНИКОВ Игорь Михайлович

АППРОКСИМАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Специальность: 01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Смоленск – 2018

Работа выполнялась в Санкт-Петербургском государственном университете и Смоленском государственном медицинском университете

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Демьянов Владимир Федорович
Д-р мед.наук наук (05.13.01 - сист. анализ, управление и обраб. информации)
профессор Глотов Владимир Александрович

Официальные оппоненты: Нурминский Евгений Алексеевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, Дальневосточный федеральный
университет, профессор.

Тимофеева Галина Адольфовна,
доктор физико-математических наук, профессор,
Уральский государственный университет
путей сообщения, зав. кафедрой.

Хамисов Олег Валерьевич,
доктор физико- математических наук, старший
научный сотрудник, Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения
Российской академии наук, зав. отделом.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт проблем
управления РАН им. В.А. Трапезникова.

Защита состоится "____" ____________ в ____ часов на заседании диссертационного совета Д ____________ на базе ____________ по адресу: ____________

С диссертацией можно познакомиться в Научной библиотеке ____________:

Автореферат разослан "____" ____________ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д ____________,
профессор, доктор физ.-мат. наук.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. XX-ый век ознаменовался применением вычислительных методов для решения важнейших экономических задач. Л.В. Канторович впервые изучил задачу планирования и оптимальных перевозок грузов (транспортная задача), и были построены алгоритмы ее решения. Первые задачи такого рода сводились к поиску максимума или минимума линейной функции на множестве, заданном в виде системы неравенств. Позднее стали изучать задачу нахождения минимума (максимума) квадратичной функции на произвольном выпуклом множестве. Далее перешли к оптимизации произвольной выпуклой функции.

Развитие техники, экономики, теории управления привело к необходимости разработки методов оптимизации негладких (недифференцируемых) или недостаточно гладких функций, у которых, например, нет вторых производных по переменным. Первый прогресс в этом направлении был сделан в работах математических школ Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Екатеринбурга, Киева, Минска. Следует упомянуть работы В. В. Гороховика, В. Ф. Демьянова, И. И. Еремина, Ю. М. Ермольева, Я. И. Заботина, А. Д. Иоффе, С. С. Кутателадзе, А. Г. Кусраева, В. Н. Малоземова, Б. Ш. Мордуховича, Е. А. Нурминского, Б. Т. Поляка, Б. Н. Пшеничного, А. М. Рубинова, В. М. Тихомирова, Н.З. Шора и др.

Среди зарубежных ученых, внесших значительный вклад в развитие негладкого анализа и методов недифференцируемой оптимизации, были R. T. Rockafellar, F. Clarke, J.-P. Aubin, J.-P. Penot, E. Polak, J. Hiriart-Urruty, C. Lemarechal, B. Luderer, D. Pallaschke, K. C. Kiwiel, A. Shapiro, F. Giannessi, L. Thibault, J. -J. Moreau, J. Warga, R. Mifflin, J. Gwinner, J. V. Outrata, I. Ekeland.

Задача оптимизации функций тесно примыкает к задачам, связанным с изучением оптимальных процессов в теории управления, разработанной Л. С. Понтрягиным и его учениками. Здесь надо отметить работы В. Г. Болтянского, Ф. П. Васильева, Р. В. Гамкрелидзе, А. Я. Дубовицкого, Ю. Г. Евтушенко, В. И. Зубова, Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, А. М. Летова, А. А. Милютина, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Моисеева, А. И. Пропоя, А. Н. Тихонова, Ф. Л. Черноусько и др. Современные исследователи в этом направлении расширили класс оптимизируемых функций. Рассматриваются функции, представимые разностью выпуклых функций. Здесь уместно упомянуть работы В. Ф. Демьянова, С. И. Дудова, Е. С. Половинкина, Л. Н. Поляковой.

Широкое применение методов негладкой оптимизации началось тогда, когда были разработаны методы оптимизации произвольной выпуклой функции. Были введены обобщенные градиенты (субградиенты), выпуклая оболочка которых в каждой точке образует субдифференциал. Численные методы оптимизации таких функций основывались на поиске направления наискорейшего спуска. Впервые такие методы были предложены Н. З. Шором.

Дальнейшим шагом вперед было введение обобщенных градиентов для липшицевых функций, как элементов из некоторого выпуклого компактного множества, называемого субдифференциалом функции в точке. В отличие от выпуклого случая здесь нет однозначного определения субдифференциала. Разные авторы определяют субдифференциал по-своему. Достаточно обратиться к работам Ф. Кларка, Ж. Пено и Б. Ш. Мордуховича.

Другие авторы (В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов) пошли по пути изучения дифференцируемых по направлению функций и различного вида представления производной по направлению. Был введен класс квазидифференцируемых функций. Производная по направлению таких функций представляется как сумма максимума и минимума скалярных произведений векторов из некоторых выпуклых компактных множеств на вектор направления.

Актуальным на сегодняшний день является введение таких многозначных отображений, которые можно было бы использовать для построения непрерывных расширений субдифференциала Кларка и поиска на их основе стационарных точек, в которых нуль принадлежит субдифференциалу Кларка. Кроме того, важно показать связь различных методов аппроксимаций липшицевых функций, и, возможно, указать новые способы построения субдифференциалов.

При оптимизации функций сложного, например, колебательного вида, полезно упрощать эти функции, строя главные нижние выпуклые аппроксимации в некоторой окрестности точки или даже на некотором множестве.

Для нахождения вида производной по направлению маргинальной функции требуется строить аппроксимацию одного многозначного отображения относительно другого многозначного отображения, находить вид различных конусов, а также вид субдифференциала Кларка для таких функций.

Для построения более ускоренных методов оптимизации негладких или недостаточно гладких функции функций требуется определить такие конструкции, к которым применимы методы оптимизации второго порядка для дважды дифференцируемых функций. Но для выполнения последнего необходимо, чтобы при построении этих конструкций точки экстремума не исчезали и не появлялись новые точки, о которых мы не знаем, как далеко они находятся от точек экстремума исходной функции.

Проблема нахождения условий представимости произвольной липшицевой функции в виде разности выпуклых функций интересна для математиков разных специальностей. Получение условий представимости функции в виде разности выпуклых, а также условий квазидифференцируемости функции в точке важно для специалистов в области оптимизации.

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертации является разработка новых методов аппроксимации широкого класса функций - локально липшицевых функций и построение на их основе новых методов оптимизации негладких или недостаточно гладких функций, к которым неприменимы или для которых не выполняются условия сходимости оптимизационных процессов высокого порядка, и применение аппроксимационных методов к задачам теории управления. Исследуются новые виды многозначных отображений (МО), различные способы аппроксимаций МО и их взаимосвязь, поскольку основными объектами изучения в негладкой оптимизации являются обобщенные градиенты, образующие в совокупности множества, являющиеся образами некоторых МО.

Научная новизна. В диссертации вводится новый способ аппроксимации локально липшицевых функций и показана связь с уже существующими. Доказано, что для функций, локально представимых разностью выпуклых, введенный метод аппроксимации совпадает с аппроксимацией Кларка. Усредненные, интегральные градиенты используются для построения непрерывных равномерных аппроксимаций субдифференциала Кларка, что важно для нахождения стационарных точек.

Вводятся МО, связанные с новым способом аппроксимации. Доказывается их липшицевость и определяется для них субдифференциал Кларка. В работе разрабатываются оптимизационные методы нахождения стационарных точек липшицевых функций, основываясь на разработанных за рубежом оптимизационных методах.

На основе развитой теории строятся нижние выпуклые аппроксимации для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных их комбинаций. Строится исчисление главных нижних выпуклых аппроксимаций, то есть определяются правила их построения для суммы (разности), произведения (частного) и произвольной сложной комбинации функции, главные нижние аппроксимации которых известны. Если главные нижние аппроксимации в окрестностях точек, подозрительных на экстремум, построены, то в дальнейшем оптимизируется не сама функция, а функция, составленная из главных нижних аппроксимаций исходной функции.

Вводится понятие аппроксимации МО относительно некоторого множества, используя которое, в достаточно общем случае для произвольного локально липшицевого МО устанавливается связь различных видов аппроксимаций МО. Доказывается, что такие МО почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств имеют матрицы вторых смешанных производных опорной функции по аргументу и опорному вектору. Эти матрицы используются для построения конуса касательных направлений, конуса Булигана, а также конуса возможных направлений. Вводится субдифференциал Кларка для липшицевых МО.

Важным применением всего этого является нахождение производной по направлению маргинальных функций при более слабых требованиях, чем это делалось ранее, что важно для оптимизации таких функций. Удается найти субдифференциал Кларка маргинальной функции в точке. Строятся главные нижние аппроксимации для маргинальных функций.

Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций строятся ускоренные методы оптимизации, сходящиеся к $\varepsilon(D)$-стационарным точкам.

Рассматривается нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для оптимизации используются уравнения Пуассона и теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру α в окрестности точки глобального минимума по обеим переменным. Предлагается строить главные нижние выпуклые аппроксимации для целевой функции в некоторых достаточно больших окрестностях фиксированных точек, что делает оптимизационный процесс более устойчивым к изменениям аргумента.

Даются необходимые и достаточные условия представления произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых, что важно для задач оптимизации. Переход от одной переменной к двум переменных является качественным шагом вперед.

Приведен алгоритм построения верхних выпуклых аппроксимаций (в.в.а.) липшицевых функций. Строятся верхний и нижний экзостеры с помощью предельных усредненных интегралов от градиентов функции, вычисленных вдоль кривых, введенных в главе 1.

Строится субдифференциал второго порядка, состоящий из обобщенных матриц. Построение осуществляется с помощью интеграла Стеклова, в котором множество, по которому происходит интегрирование, стягивается в точку. Субдифференциалы первого порядка, полученные этим же методом, совпадают с результатами главы 1.

Методы исследования. Общая методика исследования базируется на теории функций, теории меры и интеграла Лебега, выпуклом анализе, теории многозначных отображений и их аппроксимации, теории необходимых условий экстремума, численных методах решения задач нелинейного программирования и задач на минимакс, аналитической геометрии.

Практическая ценность и реализация результатов исследования. Выше была отмечена важность развития методов оптимизации второго порядка для липшицевых функций, чему и посвящена работа. Введены новые способы аппроксимации липшицевых функций, с помощью которых удается построить непрерывные расширения субдифференциала Кларка, что находит применение в оптимизационных методах. В диссертации устанавливается вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциала Кларка, что важно для развития оптимизационных методов таких функций. Впервые предложен метод поиска глобального оптимального управления, использующий идею овыпукления решения уравнения Пуассона и уравнения теплопроводности. Применение нижней выпуклой аппроксимации к целевой функции задачи теории управления существенно упрощает оптимизационную задачу. Целевая функция после применения нижней выпуклой аппроксимации становится полунепрерывной снизу, а сама задача - устойчивой для малых изменений управления u. Разработаны и отлажены программы для нахождения глобальной точки экстремума, использующие эту идею. Предложена интегральная аппроксимация функции, сохраняющая $\varepsilon(D)$-стационарные точки, на основе которой разработан алгоритм ускоренного поиска таких точек. Теорема о необходимых и достаточных условиях представимости липшицевой функции в виде разности выпуклых функций имеет как теоретический, так и практический интерес, так как доказательство носит конструктивный характер. Приводится правило построения верхних выпуклых аппроксимаций (в.в.а.), при помощи которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Строится субдифференциал второго порядка для липшицевой функции, состоящий из обобщенных матриц, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Введен новый субдифференциал для локально липшицевых функций, и показана связь с уже существующими. Формулируется необходимое условие оптимальности в точке. Строится непрерывная равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка, которая используется в оптимизационных процессах поиска стационарных точек. Строятся главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных их комбинаций. Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке через квазидифференциал ГНВА.С помощью интегралов Стеклова вводятся субдифференциалы первого и второго порядков для липшицевой функций, состоящие из обобщенных градиентов и матриц, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Построено исчисление субдифференциалов.Дано правило построения экзостеров для липшицевых функций, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.

2. Вводится понятие аппроксимации МО относительно другого МО. Строится липшицевое МО – аналог ε-субдифференциального отображения для выпуклой функции. Определяется вид конуса Булигана, используя предельные интегральные значения матриц вторых частных производных опорной функции, которые, как доказывается, существуют почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств. С помощью таких матриц определяется субдифференциал Кларка для липшицевых МО и находится вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциал Кларка.

3. Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций строится метод оптимизации, сходящийся со сверхлинейной скоростью к $\varepsilon(D)$-стационарной точке липшицевой функции. Вводится нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для поиска оптимального управления используются уравнения Пуассона или теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих урав-

нений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру α в окрестности точки оптимума. Строится численный метод поиска глобального оптимального управления.

4. Найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий.

Апробация работы. Большая часть результатов была опубликована в статьях центральных издательств, а также за рубежом. Результаты докладывались и обсуждались на международных конференциях:

– Негладкий анализ и оптимизация, ЛОМИ, Ленинград, 1995; – International Conference of Asia-Pacific, APORS 97, Melbourne, Australia, 1997; – Американо - австралийский математический съезд, Мельбурн, 1999; – Международная конференция, посвященная 75-летию член-корреспондента АН СССР Зубова В.И., 2005; – Международная конференция по современным проблемам кибернетики, Казань, 2005; – Конференция, посвященная 90-летию академика Н.Н. Моисеева, 2007; – 2-ая международная конференция по социальной и экономической динамике, Москва, 2007; – Международная конференция "Индентификация систем и задачи управления, SICPRO'08", 2008; – 10-ая математическая школа-семинар по проблемам теории функций, Саратов, 2008; – Международная конференция "Дифференциальные уравнения и топология", посвященная 100-летию академика Л.С. Понтрягина, Москва, 2008; – Международная конференция "Актуальные вопросы теории устойчивости и управления", посвященная 85-летию академика Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2009; – Международная конференция "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы", С.Петербург, 2012; – Международная конференция по исследованию операций ORT 2018, Москва.

На семинарах: – В Московском физико-техническом институте. – В Институте проблем управления РАН. – В Институте системного анализа РАН. – В Санкт Петербургском университете на факультете прикладной математики и процессов управления. – На семинаре кафедры Исследование операций в МГУ. – На семинаре по решению некорректных задач на физическом факультете МГУ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, семи глав, приложения, рисунков и списка литературы. В Приложение включены 24 рисунка и таблицы с результатами численных экспериментов. Список литературы состоит из 98 наименований. Объем диссертации 326 страниц.

Публикация результатов. По материалам диссертации опубликованы 35 работ, из которых 19 входит в перечень ВАК РФ рецензируемых журналов. В перечень статей не вошли работы кандидатской диссертации.

Содержание работы

Во Введении даются основные понятия о градиентных методах первого порядка и методах второго порядка для функций $f \in C^2(D)$, т.е. для дважды непрерывно дифференцируемых на D. Описаны общие проблемы негладкой оптимизации. Первая из которых – это определение и введение градиентов для негладких функций, которая была решена путем введения обобщенных градиентов, образующих в совокупности для липшицевых функций выпуклые компактные множества. С множеством обобщенных градиентов связаны методы оптимизации первого порядка, т.е. градиентные методы, и запись необходимых условий экстремума, а также методы аппроксимаций.

Наиболее трудной является вторая задача – определение и введение обобщенных матриц - аналога матриц вторых смешанных производных, без решения которой невозможно строить аналоги методов второго порядка для негладких функций. Трудность заключается в том, что нет однозначности введения таких матриц. Главным критерием правильности выбранного пути является, конечно, совпадение результатов для гладкого и негладкого случаев. Вначале вводятся α-обобщенные матрицы, а затем их непрерывные аналоги (α, δ)-обобщенные матрицы.

Во втором параграфе главы 1 вводятся основные термины, связанные с многозначными отображениями (МО) и используемые при доказательстве теорем, как, например, полунепрерывность сверху (П.СВ), снизу (П.СН), а также непрерывность МО, теорема Какутани. В процессе изложения материала читателю напоминаются необходимые сведения из теории функций и МО, как, например, теория аппроксимации МО, конус возможных, касательных направлений, конус Булигана.

Основным моментом излагаемой теории является разработка новых аппроксимационных и оптимизационных методов как первого, так и второго порядков.

В третьем параграфе главы 1 для произвольной локально липшицевой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ рассматривается множество $\eta(x)$ кривых $r(x, \alpha, g) = x + \alpha g + o_r(\alpha)$, обладающих следующими свойствами:

1. $o_r(\alpha)/\alpha \to +0$ при $\alpha \to +0$ равномерно для всех кривых $r(\cdot)$,
2. функция o непрерывно дифференцируема и ее производная o' ограничена вблизи начала координат: существуют константы $c > 0$ и $\alpha_0 > 0$ одни и те же для всех кривых, что $\max_{\tau\in[0,\alpha_0]} \|o'(\tau)\| \le c$.
3. производная ∇f существует почти всюду (ПВ) вдоль кривой $r(x, \alpha, g)$.

Вводится следующее множество векторов

$$Ef(x_0) = \Big\{ v \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha_k, \alpha_k \to +0, (\exists\, g \in S_1^{n-1}(0)),$$

$$(\exists r(x_0, \cdot, g) \in \eta(x_0)), v = \lim_{\alpha_k \to +0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x_0, \tau, g)) d\tau \Big\},\ Df(x_0) = \mathrm{co}\ Ef(x_0),$$

где $\nabla f-$ градиент функции f в точках, где он существует, и интеграл понимается в смысле Лебега. Здесь и далее используются обозначения $S_1^{n-1}(0)$ и $B_1^n(0)$ для сферы и шара радиуса 1 в n-мерном пространстве с центром в начале координат. Выпуклость множества $Df(x)$ очевидна. Доказывается замкнутость, а также устанавливается связь множества $Df(x)$ и субдифференциала Кларка $\partial_{CL} f(x)$.

Теорема 1.3.1. *Если функция f представима в виде разности выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в окрестности точки x_0, то $Df(x_0) = \partial_{CL} f(x_0)$.*

Приводится пример, доказывающий важность требования представления функции в виде разности выпуклых функций для выполнения утверждения теоремы.

Для установления более тесной связи множеств $Df(x_0)$ и $\partial_{CL} f(x_0)$ между собой вводится также множество $\hat{D}f(x)$, которое немного отличается от определения множества $Df(x)$:

$$\hat{D}f(x) = co\Big\{v \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to_k +0), (\exists\{h_m\}, h_m \to 0), \exists g \in S_1^{n-1}(0), \exists r(x+h_m, \alpha, g) =$$

$$= x + h_m + \alpha g + o_{r,m}(\alpha) \in \eta(x+h_m), v = \lim_{\alpha_k \to +0, h_m \to 0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x_0 + h_m, \tau, g)) d\tau\Big\},$$

где $o_{r,m}-$ равномерно бесконечно малые по r и m. Доказывается замкнутость множества $\hat{D}f(x)$.

Теорема 1.3.2. *Множество $\hat{D}f(x)$ совпадает с субдифференциалом Кларка $\partial_{CL} f(x)$.*

Чтобы понять связь между собой множеств $\hat{D}f(x)$, $\partial_{MP} f(x)$, $Df(x)$, введем

$$D_{\{h_m\}}f(x) = \mathrm{co}\,\{v \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to_k +0), \exists g \in S_1^{n-1}(0),$$

$$\exists r(x+h_m, ., g) \in \eta(x+h_m), v = \lim_{\alpha_k \to +0, h_m \to 0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x+h_m, \tau, g)) d\tau\},$$

где $\partial_{MP} f(x)-$ субдифференциал Мишеля-Пено функции f в точке x.

Легко можно видеть, что если положить $\{h_m\} = 0$ для всех m, то $D_{\{h_m\}}f(x) = Df(x)$, а если положить $\{h_m\} = \{\alpha_k q\}$ для всех k, то $\cup_{h_m} D_{\{h_m\}} f(x) = \partial_{MP} f(x)$. Интересно, что другие виды аппроксимаций можно получить, меняя соотношение между последовательностями $\{h_m\}$ и $\{\alpha_k\}$.

В Теореме 1.3.3 для случая разности двух выпуклых функций устанавливается связь между разностью В.Ф. Демьянова субдифференциалов этих функций в точке x и множеством $Df(x)$.

Множество $Df(x)$ играет важную роль для аппроксимации функции f в окрестности рассматриваемой точки. На основе приведенных ниже теорем формулируются необходимые и при определенных условия достаточные условия оптимальности в точке $x \in \mathbb{R}^n$ для произвольной локально липшицевой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ как на всем пространстве, так и на выпуклом компактном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 1.3.4. *Для случая равномерной бесконечной малости o_r в определении множества $\eta(x_0)$ по r верно следующее равенство*

$$\lim \sup_{\substack{g' \to g \\ r \in \eta(x_0) \\ \alpha \to +0}} \frac{f(r(x_0, \alpha, g')) - f(x_0)}{\alpha} = \max_{v \in Df(x_0)} (v, g) \ \ \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Также справедливо "двойственное" утверждение, если заменить sup на inf (Теорема 1.3.5.)

Так, необходимое условие оптимальности в $\mathbb{R}^n$ есть включение $0 \in Df(x)$. Необходимым условием точки минимума на выпуклом компактном множестве Ω является следующее условие $Df(x) \cap K^+(x,\Omega) \neq \varnothing$, где $K(x,\Omega)-$ конус касательных направлений к множеству Ω в точке x, $K^+(x,\Omega)-$ сопряженный конус. Важно, что для дифференцируемого случая условия оптимальности превращаются в хорошо известное условие $\nabla f(x) = 0$, так как в этом случае $Df(x) = \{\nabla f(x)\}$.

МО $Df : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$, как и субдифференциал Кларка $\partial_{CL} f$, также не является непрерывным в метрике Хаусдорфа, поэтому важной для оптимизационных задач является проблема непрерывного расширения таких отображений. Для субдифференциала выпуклой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая проблема была решена введением ε-субдифференциального отображения $\partial_\varepsilon f$, которое не только непрерывно, но и липшицево в метрике Хаусдорфа.

Вводится α-субдифференциал для произвольной липшицевой функции f и $\alpha > 0$.

$$D_\alpha f(x_0) = \overline{co}\Big\{v \in \mathbb{R}^n \mid (\exists r(x_0,\cdot,g) \in \eta(x_0)), (\exists g \in S_1^{n-1}(0)),\ \ v = \alpha^{-1}\int_0^\alpha \nabla f(r(x_0,\tau,g))d\tau\Big\},$$

где $\overline{co}-$ замыкание выпуклой оболочки.

Теорема 1.4.3. *МО $D_\alpha f$ непрерывно в метрике Хаусдорфа.*

Кроме того, установлено, что МО $D_\alpha f$ липшицево в метрике Хаусдорфа (Теорема 1.4.5).

С помощью МО $D_\alpha f$, проблема непрерывного расширения МО Df и $\partial_{CL} f$ решается следующим образом. По определению положим $D_0 f \equiv Df$. Рассмотрим МО $\bar{D}_\delta f : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ для любого $\delta > 0 : \bar{D}_\delta f(x) = \overline{co} \cup_{\eta \in [0,\delta]}\ D_\eta f(x)$.

Теорема 1.4.4. *МО $\bar{D}_\delta f$ есть непрерывное расширение субдифференциала Кларка в метрике Хаусдорфа, если f локально может быть представлена как разность выпуклых функций.*

В параграфе 1.4.3 рассматривается применение непрерывного расширения субдифференциала выпуклой функции с помощью МО $D_\alpha f$ для нахождения точки минимума. Развивая эту идею, в параграфе 1.8.5 применяется непрерывное расширение субдифференциала Кларка для нахождения стационарных точек. Автор использовал разработанный ранее пошаговый градиентный метод наискорейшего спуска для равномерных непрерывных расширений субдифференциала Кларка, предварительно показав, что МО $\bar{D}_\delta f$ и есть такой тип отображения.

В параграфе 5 главы 1 рассматривается одно из возможных применений нового метода аппроксимаций, а именно: построение нижних выпуклых аппроксимаций (НВА) для липшицевых функций, которые можно строить в любой, а не только в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки. Построение НВА значительно упрощает вид исходной функции, что позволяет ускорить методы локальной и глобальной оптимизации. Необходимость построения НВА возникает также потому, что даже для простых случаев функция Кларка не очень хорошо описывает поведение функции в малой окрестности рассматриваемой точки. Для того, чтобы получить необходимые условия оптимальности, надо строить главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для функции $\tilde{f}(x) = f(x) + L \parallel x - x_0 \parallel$, где $f-$ липшицева с константой L, x_0- точка, в малой окрестности которой строится аппроксимация. Геометрически график ГНВА подпирает снизу график функции Указанный подход оказывается удобным для неквазидифференцируемых функций или для функций, для которых построить субдифференциал или супердифференциал очень сложно.

Нахождение ГНВА в окрестности точки x_0

1. Построим множество для любого $g \in S_1^{n-1}(0)$

$$E_g\tilde{f}(x_0) = \{v(g) \in \mathbb{R}^n : \exists \{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0, (\exists r(x_0, \cdot, g) \in \eta(x_0)), v(g) = \lim_{\alpha_k \to +0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla \tilde{f}(r(x_0, \tau, g))d\tau\}.$$

2. Находим множество $A = co\{w \in \mathbb{R}^n \mid (w, g) \leq (v(g), g) \ \ \forall v(g) \in E_g\tilde{f}(x_0), \forall g \in S_1^{n-1}(0)\}$.

Множество А не пусто, поскольку $0 \in A$. В окрестности точки x_0 функцию f аппроксимируем разностью двух выпуклых функций $h(x_0, g) = \max_{v \in \partial h(x_0, 0)}(v, g)$ и $L \parallel g \parallel$, где $A = \partial h(x_0, 0)$, $g = x - x_0$. Пару множеств $(\partial h(x_0, 0), LB_1^n(0))$ будем называть квазидифференциалом ГНВА функции f в точке x_0.

Далее определяются правила построения ГНВА для суммы липшицевых функций (Теорема 1.6.1), произведения (Теорема 1.6.2), а также для произвольной гладкой комбинации липшицевых функций.

Теорема 1.6.3. *Пусть $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i \in 1 : n,$ – липшицевы с константой L, дифференцируемые по направлениям функции, а h_i- ГНВА для функции $\tilde{f}_i(x) = f_i(x) + L \parallel x - x_0 \parallel$, $i \in 1 : k$. Пусть также $F(q_1, q_2, ..., q_k) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция от переменных $q_i, i \in 1 : k$. Будем считать, что $\partial F(q_{10}, q_{20}, ..., q_{k0})/\partial q_i \geq 0$, где $q_{i0} = f_i(x_0), i \in 1 : k$. Тогда квазидифференциал ГНВА для функции $f(x) = F(f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x))$ в точке x_0 есть пара множеств (A, B), где $A, B \subset \mathbb{R}^n$:*

$$A = \partial F(q_{10}, q_{20}, ..., q_{k0})/\partial q_1 \partial h_1(0) + \partial F(q_{10}, q_{20}, ..., q_{k0})/\partial q_2 \partial h_2(0) + ...$$

$$... + \partial F(q_{10}, q_{20}, ..., q_{k0})/\partial q_k \partial h_k(0), B = L_2 B_1^k(0), L_2 = (\sum_i \partial F(q_{10}, q_{20}, ..., q_{k0})/\partial q_i)L.$$

В Следствии 1.6.2 отмечается о несущественности предположения насчет положительности производных $F(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{k0})/q_i \geq 0, i \in 1 : k$, и показывается, как получить результат в общем случае.

Теоремы 1.6.4 и 1.6.5 формулируют правила построения ГНВА для негладких операций max и min от произвольного конечного числа липшицевых дифференцируемых по направлениям функций.

Приведено необходимое (а при строгом включении и достаточные) условие оптимальности в точке $x_0 : LB_1^n(0) \subset \partial h(x_0, 0)$.

В параграфе 1.7 вводится субдифференциал Кларка для произвольного локально липшицевого МО $G : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$, т.е. для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \rho_H(G(x_1), G(x_2)) \leq$ $\leq L \parallel x_1 - x_2 \parallel$, для чего первоначально доказывается, что опорная функция почти всюду (ПВ) дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (Теорема 1.7.1).

Рассмотрим множества

$$M(x,q) = \mathrm{co}\Big\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \exists\{(\xi_k, q_k)\} \in \aleph : A = \lim_{k\to\infty} p''_{xq}(\xi_k, q_k), (\xi_k, q_k) \to_k (x,q)\Big\},$$

$$M(x) = \mathrm{co} \cup_{q \in S_1^{m-1}(0)} M(x,q).$$

Аналогично функции Кларка введем функцию

$$\psi(x,g,q) = \lim \sup_{\substack{\alpha\to+0\\ \theta\to q\\ u\to 0}} \mid \frac{p_G(x+u+\alpha g, \theta) - p_G(x+u,\theta)}{\alpha} \mid .$$

Теорема 1.7.2. *Верно равенство*

$$\psi(x,g,q) = \max_{A\in M(x)} (Ag, q).$$

Как показано в Теореме 1.7.3 , МО $\Xi : \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$, ставящее каждой точке x множество матриц $M(x)$, обладает всеми свойствами субдифференциала Кларка. Поэтому $M(x)$ назовем субдифференциалом Кларка МО G в точке x. Отсюда и из Теоремы 1.4.5 следует, что все сказанное выше верно для МО $D_\alpha f$, т.е. функция

$$p_{D_\alpha}(x,q) = \max_{v\in D_\alpha f(x)} (v,q)$$

ПВ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ имеет вторую смешанную производную и $\parallel p''_{xq}(x,q) \parallel \leq L_\alpha$, где $L_\alpha-$ константа Липшица МО $D_\alpha f$.

Для МО $D_\alpha f$ в параграфе 1.8.1 строится субдифференциал Кларка. Определяется МО $D_{2,\alpha} f : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^{n^2}}$ с образами

$$D_{2,\alpha}f(x) = \mathrm{co}\,\{A[n\times n] \mid \exists\{\alpha_m\}, \alpha_m \to +0, \exists g,q \in S_1^{n-1}(0), \exists (r_1(x_m,\cdot,g), r_{2_m}(\cdot,q)) \in \eta_2(x_m),$$

$$x_m \to_m x, A = \lim{}_{m\to\infty}\, \alpha_m^{-1} \int_0^{\alpha_m} p''_{xq}(r_1(x_m,\tau,g), r_{2_m}(\tau,q))d\tau\},$$

где $\eta_2(x_m)-$ множество всех пар кривых $(r_1(x_m,\cdot,g), r_{2_m}(\cdot,q))$ для для всех $g,q \in \mathbb{R}^n$: $r_1(x_m,\alpha,g) = x_m + \alpha g + o_{1_m}(\alpha), r_{2_m}(\alpha,q) = q + O_{2_m}(\alpha)$, удовлетворяющих всем свойствам кривых множества $\eta(x_m)$ (Определение 1.3.1), и вдоль которых матрицы $p''_{xq}(.,.)$ существуют ПВ. Показывается, что множество $D_{2,\alpha}f(x)$ обладает всеми свойствами субдифференциала Кларка, т.е. оно выпукло, замкнуто и полунепрерывно сверху (П.СВ).

Теорема 1.8.1. *Множество $M(x)$, построенное для МО $D_\alpha f$, совпадает с $D_{2,\alpha}f(x)$, или, иначе говоря, $D_{2,\alpha}f(x)$ есть субдифференциал Кларка МО $D_\alpha f$ в точке x.*

Произвольную матрицу из множества $D_\alpha f(x)$ назовем α-обобщенной матрицей функции f, которая в общем случае не есть непрерывная матрица от x. Для построения численных методов надо использовать ее непрерывное расширение.

Для произвольных $\alpha, \delta > 0$ введем следующее множество

$$D_{2,\alpha,\delta} f(x) = \overline{co}\{A[n \times n] \mid \exists g, q \in S_1^{n-1}(0), \exists (r_1(x, \cdot, g), r_2(\tau, q)) \in \eta_2(x),$$

$$A = \delta^{-1} \int_0^\delta p''_{xq}(r_1(x, \tau, g), r_2(\tau, q)) d\tau\},$$

где $p-$ опорная функция для МО $D_\alpha f$. Элементы множества $D_{2,\alpha,\delta} f(x)$ будем называть α, δ - обобщенными матрицами. Показывается, что МО $D_{2,\alpha,\delta} f$ непрерывно в метрике Хаусдорфа и имеет выпуклые, замкнутые, ограниченные образы (Теорема 1.8.2). Также установлено другое важное свойство этого отображения.

Теорема 1.8.3. *$D_{2,\alpha,\delta} f$ есть липшицево МО.*

При некотором допущении МО $\bar{D}_{2,\alpha,\delta} f : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^{n^2}}$, определяемое по правилу

$$\bar{D}_{2,\alpha,\delta} f(x) = \overline{\text{co}} \cup_{\mu \in [0,\delta]} D_{2,\alpha,\mu} f(x),$$

есть непрерывное расширение МО $D_{2,\alpha} f$.

Теорема 1.8.4. *МО $\bar{D}_{2,\alpha,\delta} f$ есть непрерывное МО в точке x, если $D_{2,\alpha,0} f(x) = D_{2,\alpha} f(x)$.*

В параграфе 1.8.3 построена равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка и применен метод, разработанный Полаком, Майне и Варди для нахождения стационарной точки для субдифференциального отображения Кларка, использующий равномерную аппроксимацию.

Глава 2 посвящена аппроксимации липшицевых выпуклозначных многозначных отображений (МО) и нахождению производных по направлению маргинальных функций. Введенные понятия являются обобщением соответствующих понятий для функций. Рассматриваются:

1. Конус возможных направлений, введенный В. Ф. Демьяновым и А. Б. Певным

$$\gamma(x, g, v) = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists \alpha_0 > 0 : v + \alpha w \in G(x + \alpha g) \ \forall \alpha \in [0, \alpha_0]\}, \Gamma(x, g, v) = \bar{\gamma}(x, g, v),$$

где черта есть замыкание множества.

2. Конус касательных направлений:

$$\Gamma'(x, g, v) = \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists \alpha_0 > 0, v + \alpha w + o_1(\alpha) \in G(x + \alpha g + o_2(\alpha)) \, \forall \alpha \in [0, \alpha_0]\}$$

для некоторых бесконечно малых функций o_1, o_2. Заметим, что для липшицевых МО, т.е. для которых $\rho_H(G(x_1), G(x_2)) \le L \parallel x_1 - x_2 \parallel \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, где ρ_H- метрика Хаусдорфа, можно ограничиться только одной функцией $o_i, i = 1, 2$.

3. Конус допустимых направлений (конус Булигана)

$$\tilde{\Gamma}(x, g, v) = \text{co}\, \{w \in \mathbb{R}^m \mid \exists \{\alpha_k\}, \alpha_k \to_k +0, v + \alpha_k w + o_1(\alpha_k) \in G(x + \alpha_k g + o_2(\alpha_k)) \, \forall k\}.$$

Ясно, что всегда $\Gamma(x, g, v) \subset \Gamma'(x, g, v) \subset \tilde{\Gamma}(x, g, v)$.

Многозначными отображениями стали описывать многие технические и экономические модели. Это объясняется тем, что часто неизвестно точное решение системы или значение функции. В оптимизации потребность изучения МО объясняется тем, что для негладких функций не существует градиента в какой-то точке, а существует целое множество обобщенных градиентов.

Вводится понятие аппроксимации МО относительно произвольного множества B. (Определение 2.2.1). Если два МО допускают аппроксимацию относительно некоторого множества B, то их сумма и разность также допускает аппроксимацию относительно того же множества B. В параграфе 2.3 выводится формула для конусов возможных направлений для суммы и пересечения МО. Пусть заданы МО с выпуклыми компактными образами: $G_i : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}, i \in 1:3,$

$$G_3(x) = G_1(x) + G_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{v_3 \in \mathbb{R}^m \mid v_3 = v_1 + v_2 \, \forall v_1 \in G_1(x),\ \forall v_2 \in G_2(x)\}.$$

Зафиксируем произвольные $x, g \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\Gamma_i(x, g, v_i)$ множества возможных направлений МО G_i в точках $v_i, v_i \in G_i(x)$, по направлению g соответственно. Предположим, что отображения $G_i, i = 1, 2$, допускают аппроксимацию первого порядка в точках v_i по направлению g относительно множеств $\Gamma_i(x, g, v_i)$ соответственно. Пусть

$$V(x, v_3) = \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in G_1(x), v_2 \in G_2(x), v_1 + v_2 = v_3\}.$$

Верна теорема.

Теорема 2.3.1. *Справедливо равенство*

$$\Gamma_3(x, g, v_3) = \overline{\cup_{(v_1,v_2)\in V(x,v_3)} (\Gamma_1(x, g, v_1) + \Gamma_2(x, g, v_2))}.$$

Показано, что для МО, заданных в виде системы неравенств вида

$$G_i(x) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \ h_{ij}(x, v) \leq 0 \ \forall j \in 1 : N_i\},\ i = 1, 2,$$

где функции h_{ij} непрерывны по совокупности аргументов x и v, выпуклы по v, производные $\partial h_{ij}(x, v)/\partial g$, $\partial h_{ij}(x, v)/\partial v$ непрерывны по x и v и $intG_i(x) \neq \emptyset$ (условие Слейтера), замыкание в Теореме 2.3.1 можно убрать (Теорема 2.3.2). Для МО G_3 с образами $G_3(x) = G_1(x) \cap G_2(x)$ верно утверждение.

Теорема 2.3.3. *Для любого* $v \in G_3(x)$ *верно равенство* $\Gamma_3(x, g, v) = \Gamma_3(x, g, v) \cap \Gamma_2(x, g, v)$.

В Замечании 2.3.1 отмечается, что Теоремы 2.3.1-2.3.3 верны для конусов касательных направлений, если МО $G_i, i = 1, 2$, допускают аппроксимацию первого порядка относительно $\Gamma'(x, g, v)$ в точке v по направлению g.

В параграфе 7 главы 1 было доказано, что для липшицевого МО опорная функция $p(x, q)$ имеет ПВ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ вторую смешанную производную p''_{xq}. В параграфе 2.4. находится вид матрицы p''_{xq} для двух часто встречающихся видов МО: выпуклой оболочки конечного числа вектор-функций и МО, заданного в виде системы неравенств

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \ \ \forall i \in 1 : I\},$$

где $h_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, i \in 1 : I,-$ непрерывно дифференцируемые, сильно выпуклые по y функции с непрерывными по x и y производными второго порядка:

$$\frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial y^2}.$$

Нахождение вида $p''_{xq}(x,q)$ важно для доказательства кодифференцируемости функции экстремума по МО и нахождения вида ее кодифференциала. Так для указанного МО G матрица p''_{xq} имеет вид

$$p''_{xq}(x,y) = -(\frac{\partial^2 h_{i(q)}(x,y(x))}{\partial y^2})^{-1} \frac{\partial^2 h_{i(q)}(x,y(x))}{\partial x \partial y},$$

где $y(x) = y(x,q)$ - граничный вектор множества $G(x)$ с нормалью $q \in S_1^{m-1}(0)$, если индекс $i(q)$, для которого $h_{i(q)}(x,y(x)) = 0$, единственный. Если существуют m индексов, для которых $h_i(x,y(x)) = 0, i \in 1 : m$, то

$$\frac{dy(x,q)}{dx} = \Big(\frac{\partial h_i(x,y)}{dy}\Big)^{-1}_{i \in 1:m} \Big(\frac{\partial h_i(x,y)}{dx}\Big)_{i \in 1:m},$$

при условии, что векторы $\dfrac{\partial h_i(x,y)}{dy}$ для $i \in 1 : m$ линейно независимы.

Доказана кодифференцируемость некоторых видов маргинальных функций и найден вид их кодифференциала. Так, например, для функции $\psi(x) = \max_{y \in G(x)} \varphi(x,y)$ доказывается, что она гиподифференцируема и ее кодифференциал есть $D\psi(x) = [\underline{d}\psi(x), 0_{n+1}]$, где

$$\underline{d}\psi(x) = \{(a,v) \mid a \in A(x),\, v \in V(x)\},$$

$$A(x) = \operatorname{co}\{\varphi(x, \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i y(x,q_i)) - \psi(x) \mid \alpha_i \in B_1^{m+1}, q_i \in S_1^{m-1}(0)\},$$

$$V(x) = \overline{\operatorname{co}}\{\varphi'_x(x, \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i y(x,q_i)) - ((\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i (\frac{\partial^2 h_{j_i}(x,y(x,q_i))}{\partial y^2})^{-1} \frac{\partial^2 h_{j_i}(x,y(x,q_i))}{\partial x \partial y})^*,$$

$$\varphi'_y(x, \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i y(x,q_i))) \mid \alpha_i \in B_1^{m+1},\, q_i \in S_1^{m-1}(0),\, j_i \in 1 : I, i \in 1 : (m+1)\},$$

$$h_{j_i}(x,y(x,q_i)) = 0,\, B_1^{m+1} = \{\alpha_i \mid 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{1}^{m+1} \alpha_i = 1\}.$$

В этом случае функция ψ может быть представлена в виде

$$\psi(x + \triangle x) = \psi(x) + \max_{(a,v) \in \underline{d}\psi(x)} [a + (v, \triangle)] + o(\| \triangle \|).$$

Аналогичное справедливо для функции min по МО G. Доказывается, что она гипердифференцируема и представима в виде

$$\psi(x + \triangle x) = \psi(x) + \min_{(b,w) \in \overline{d}\psi(x)} [b + (w, \triangle)] + o(\| \triangle \|).$$

В параграфе 2.5 введено определение аппроксимации липшицевого выпуклозначного МО $G : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ относительно другого МО, например, относительно конуса допустимых направлений $\tilde{\Gamma}$, который был введен в параграфе 1 главы 2. Приведен вид $\tilde{\Gamma}$.

Для произвольных $v \in G(x), x, g \in \mathbb{R}^n$, введем множество

$$B(x, g, v) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^m \mid (w, q) \le \max_{A \in \mathcal{B}(x,v)} (Ag, q) \ \ \forall q \in P(x, v)\}, & \text{если } P(x, v) \ne \emptyset, \\ \mathbb{R}^m, & \text{если } P(x, v) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\mathcal{B}(x, v) = \operatorname{co} \{A[m \times n] \mid A = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i A(v_i, q), v = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i v_i, \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i = 1, \beta_i \ge 0, A(v_i, q) =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} \int_0^\alpha p''_{xq}(x_i(\tau), q_i(\tau)) d\tau \}, (x_i(\tau), q_i(\tau)) \in \aleph(G)\}, \ R(x_i(\tau), q_i(\tau)) = \{v_i(\tau)\},$$

$q_i(\tau) \in P(x_i(\tau), v_i(\tau)), x_i(\alpha) = x + \alpha g + o_i(\alpha), v_i(\alpha) \to v_i, o_i(\alpha)/\alpha \to 0, \ q_i(\alpha) \to q, \parallel q_i(\alpha) - q \parallel /\alpha \le c,$

а также

$$R(x_i(\alpha), q_i(\alpha)) = \{y \in G(x_i(\alpha)) \mid (y, q_i(\alpha)) = \max_{u \in G(x_i(\alpha))} (u, q_i(\alpha))\},$$

$$P(x, v) = \{q \in S_1^{m-1}(0) \mid (v, q) = \max_{y \in G(x)} (y, q)\},$$

$\aleph(G)-$ всюду плотное множество в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, где существуют p''_{xq}. Здесь $r_i(\alpha) = (x_i(\alpha), q_i(\alpha))-$ непрерывно дифференцируемые по α кривые, вдоль которых ПВ существуют p''_{xq} с предельными значениями при $\alpha \to +0, c-$ некоторая константа. Далее будем считать, что $B(x, g, v) \ne \emptyset$.

Показывается, что для липшицевого МО множество $\tilde{\Gamma}$ всегда не пусто (Теорема 2.5.1) и $\tilde{\Gamma}(x, g, v) \subset B(x, g, v)$(Лемма 2.5.1), а если $B(x, g, v) \ne \varnothing$, то $\Gamma'(x, g, v)$ не пусто и $\Gamma'(x, g, v) = \tilde{\Gamma}(x, g, v) = B(x, g, v)$ (Теорема 2.5.3). При условии непустоты множеств $\Gamma(x, g, v)$ и $B(x, g, v)$ для $v \in G(x)$ и $g \in \mathbb{R}^n$ верно равенство $\Gamma(x, g, v) = B(x, g, v)$(Теорема 2.5.4). Также доказывается, что МО G допускает аппроксимацию первого порядка в точке $v \in G(x)$ по направлению $g \in \mathbb{R}^n$ относительно множества $\tilde{\Gamma}(x, g, v)$, если $B(x, g, v) \ne \varnothing$ (Теорема 2.5.5).

Для часто встречаемого случая задания МО в виде $G(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid h_i(x, y) \le 0 \ \ i \in 1 : I\}$, при условиях, наложенных выше на функции h_i, $i \in 1 : I$, и $B(x, g, v) \ne \varnothing, \Gamma(x, g, v) \ne \varnothing$, имеем

$$\Gamma(x, g, y) = \Gamma'(x, g, y) = \tilde{\Gamma}(x, g, y) =$$

$$= \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^m \mid (w, q) \le \max_{i \in \hat{R}(x,y)} (-(\dfrac{\partial^2 h_i(x, y)}{\partial y^2})^{-1} \dfrac{\partial^2 h_i(x, y)}{\partial x \partial y} g, q)\} \ \ \forall q \in P(x, y), \\ \mathbb{R}^m, \text{если } P(x, y) = \emptyset, \end{cases}$$

где $\hat{R}(x, y) = \{i \in 1 : I \mid h_i(x, y) = 0\}$.

В параграфе 2.6 изучаются маргинальные функции и осуществляется вывод производной по направлению маргинальной функции. Идею перехода от предельных значений градиентов к усредненным значениям интегралов вдоль кривых из $\eta(x)$ можно развить дальше. Для этого перейдем к рассмотрению аппроксимации функции $f(x) = \max_{y \in G(x)} \varphi(x, y)$, где $x \to G(x) : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}-$ выпуклозначное МО с выпуклыми компактными образами и с константой Липшица L. Функция φ непрерывна вместе с производными φ'_x, φ'_y по совокупности переменных. Условия дифференцируемости функции f по направлениям подробно изучались В.Ф. Демьяновым, А.Б. Певным, Б.Н. Пшеничным, Л.И. Минченко, О.Ф. Борисенко и др. Эти условия можно ослабить, что и сделано далее.

Обозначим $R(x) = \{y \in G(x) \mid f(x) = \varphi(x.y)\}$. Для произвольных $v \in G(x), x, g \in \mathbb{R}^n$, введем множество $B(x, g, v)$, как это делали выше.

Далее будем считать, что $B(x, g, v) \neq \emptyset$ для любого $v \in G(x)$.

Теорема 2.6.1. *При сделанном предположении относительно $B(x, g, v)$ множество $\Gamma'(x, g, v) \neq \varnothing$ и $\Gamma'(x, g, v) = \tilde{\Gamma}(x, g, v) = B(x, g, v)$, а если $\Gamma(x, g, v) \neq \emptyset$, то $\Gamma(x, g, v) = B(x, g, v)$.*

Остальная часть параграфа посвящена нахождению производной функции f.

Теорема 2.6.2. *Если $B(x, g, v) \neq \emptyset$ для всех $v \in R(x)$, а также существуют непрерывные производные φ'_x, φ'_y по совокупности переменных, то функция f дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$ по направлению $g \in \mathbb{R}^n$ и верно равенство*

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \max_{y \in R(x)} \max_{w \in \tilde{\Gamma}(x,g,v)} [(\varphi'_x(x, y), g) + (\varphi'_y(x, g), w)] =$$

$$= \max_{y \in R(x)} \max_{A(x,y) \in B(x,y)} [(\varphi'_x(x, y), g) + (\varphi'_y(x, y), A(x, y)g)].$$

Для МО G , заданного в виде системы неравенств (см. выше), производную по направлению функции f можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \max_{y \in R(x)} \max_{i \in \hat{R}(x,y)} [(\varphi'_x(x, y), g) + (A_i^*(x, y)\varphi'_y(x, y), g)],$$

где

$$A_i(x, y) = -(\frac{\partial^2 h_i(x, y)}{\partial y^2})^{-1} \ \frac{\partial^2 h_i(x, y)}{\partial x \partial y} \quad \forall i \in \hat{R}(x, y),$$

В параграфе 2.7 речь идет о нижних выпуклых аппроксимациях маргинальных функций вида

$$f(x) = \max_{y \in G(x)} \varphi(x, y),$$

где $\varphi-$ липшицева с константой L_1 по совокупности переменных, $G-$ выпуклозначное липшицевое МО с константой Липшица L. В Лемме 2.7.1 доказывается липшицевость функции f с константой $L_1(1 + L)$. Для построения главной нижней выпуклой аппроксимации (ГНВА) функции f в окрестности точки x_0 рассматривается функция

$$\hat{f}(x) = f(x) + L_1(1 + L) \parallel x - x_0 \parallel .$$

Образуем множество для любого $g \in S_1^{n-1}(0)$

$$\tilde{D}_g \hat{f}(x_0) = \{z(g) \in \mathbb{R}^n \mid \exists \{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0, A(g) = \lim_{\alpha_k \to +0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} p''_{xq}(r(x(\tau), q(\tau)))d\tau, \text{если}$$

$$\varphi'_y(x_0, y) \neq 0;\ A(g) = 0_{m \times n}, \text{если } \varphi'_y(x_0, y) = 0; z(g) = \varphi'_x(x_0, y) + A^*(g)\varphi'_y(x_0, y)+$$

$$+L_1(1 + L)\nabla\theta(g), \theta(x - x_0) = \parallel x - x_0 \parallel,\ y \in R(x_0),\ r(x(\tau), q(\tau)) \in \aleph(G) \ \text{п.в. для } \tau \in [0, \alpha_0],$$

$$x(\tau) = x_0 + \tau g + o_1(\tau),\ q(\tau) = \varphi'_y(x_0 + \tau g + o_1(\tau), y + o_2(\tau)),\ o_i(\tau)/\tau \to_{\tau\to+0} 0\},$$

где $\aleph(G)-$ множество, всюду плотное в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, где существуют матрицы p''_{xq}, $*-$ знак транспонирования (глава 1, параграф 1.7). Здесь кривая $r(\alpha) = (x(\alpha), q(\alpha))$, $x(\alpha) = x_0 + \alpha g + o_1(\alpha)$, $q(\alpha) = \varphi'_y(x_0 + \alpha g + o_1(\alpha), y + o_2(\alpha))$, $y \in R(x_0)$, удовлетворяет следующим условиям:

1. Вдоль r ПВ существуют производные p''_{xq}.
2. Интегральное выражение в определении $\tilde{D}_g \hat{f}(x_0)$ существует.
3. $o_i, i = 1, 2-$ непрерывно дифференцируемые бесконечно малые функции.

Построим множество B, аналитически задаваемое следующим образом:

$$B = \mathrm{co}\,\{w \in \mathbb{R}^n \mid (w, g) \le (z(g), g)\ \ \forall z(g) \in \tilde{D}_g \hat{f}(x_0),\ \forall g \in S_1^{n-1}(0)\}.$$

Очевидно, что множество B всегда не пусто, так как $0 \in B$. Определим функцию $g \to \hat{h}(x_0, g) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \hat{h}(x_0, g) = \max_{v \in B}(v, g)$. Функция $\hat{h}(x_0, \cdot)-$ выпуклая ПО степени 1 и $\partial\hat{h}(x_0, 0) = B$.

Теорема 2.7.1. *Функция $\hat{h}(x_0, \cdot)$ является ГНВА функции $\hat{f}$ в окрестности точки x_0.*

Условие минимума функции f на $\mathbb{R}^n$ задается следующей теоремой.

Теорема 2.7.2. *Для того чтобы точка x_0 была точкой минимума функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$, необходимо выполнение включения $L_1(1 + L)B_1^n(0) \subset \partial\hat{h}(x_0, 0)$, а при строгом включении оно является и достаточным условием минимума.*

Далее в том же параграфе изучается задача минимизации функции f на множестве

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \mid h_i(z) \le 0\ \ \forall i \in 1 : I\},$$

где функции $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}-$ липшицевы с константой L, дифференцируемы по направлениям. Будем считать, что выполнено условие невырожденности для всех $x_0 \in \Omega$. В этом случае вместо функции f рассматривается функция

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) + L \parallel x - x_0 \parallel, \text{если } x \in \Omega, \\ f(x_0) + \bar{L} \parallel x - x_0 \parallel, \text{если } x \notin \Omega, \end{cases}$$

где $\hat{L} > L$. Определяется ГНВА для функции $\bar{f}$ в виде функции $\bar{h}(x_0, g) = \max_{v \in C}(v, g)$, где множество C строится аналогично описанному выше алгоритму. Следующая теорема задает условия минимума функции f на множестве Ω.

Теорема 2.7.3. *Для того чтобы точка x_0 была точкой минимума функции f на Ω, необходимо, чтобы $LB_1^n(0) \subset \partial\bar{h}(x_0, 0)$. Если выполняется строгое включение, то это условие является и достаточным условием минимума.*

В параграфе 2.8 обсуждаются дифференциальные свойства маргинальной функции вида $f(x) = \max_{y \in G(x)} \varphi(x, y)$, где φ, φ'_x, φ'_y- непрерывные функции по совокупности переменных, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m-$ липшицево МО. Через $N(G)$ обозначим множество точек в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, где существуют p''_{xq}. Известно (Теорема 1.7.1), что $N(G)$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Определим множества

$$R(x, q) = \{y \in G(x) \mid p(x, q) = (y, q)\},\ \ R(x) = \{y \in G(x) \mid f(x) = \varphi(x, y)\}, \mathcal{A}(x, y, q) =$$

$$= \mathrm{co}\Big\{A[m\times n] \mid A(x,y,q) = \lim_{\substack{x_i\to x\\ \tilde q_i\to q}} p''_{xq}(x_i,\tilde q_i), \tilde q_i = q_i + o(\|x_i - x\|), q_i = \varphi'_y(x_i,y_i)/\parallel \varphi'_y(x_i,y_i)\parallel,$$

$$(x_i,\tilde q_i)\in N(G), y_i\in R(x_i,q_i), y_i\to y, y\in R(x)\Big\},\ \text{если}\ \varphi'_y(x,y)\neq 0,$$

$$\mathcal{A}(x,y,q) = \{0_{m\times n}\},\ \text{если}\ \varphi'_y(x,y)=0.$$

Теорема 2.8.1. *Субдифференциал Кларка функции f в точке $x\in\mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению*

$$\partial_{CL} f(x) = \mathrm{co}\,\{\varphi'_x(x,y) + A^*(x,y,q)\varphi'_y(x,y) \mid A(x,y,q)\in\mathcal{A}(x,y,q),$$

$$y\in R(x),\ q=\varphi'_y(x,y)/\parallel\varphi'_y(x,y)\parallel\ \ (\varphi'_y(x,y)\neq 0)\},$$

В Следствии 2.8.1 задано более простое правило получения предельных матриц, участвующих в формулировке Теоремы 2.8.1, используя которое, получаем включение для субдифференциала Кларка. Введем множество

$$\mathcal{B}(x,q) = \mathrm{co}\,\{B[m\times n] \mid B(x,q) = \lim_{\substack{x_i\to x\\ q_i\to q}} p''_{xq}(x_i,q_i), (x_i,q_i)\in N(G)\},\ \text{если}\ \varphi'_y(x,y)\neq 0,$$

$$\mathcal{B}(x,q) = \{0_{[m\times n]}\},\ \text{если}\ \varphi'_y(x,y)=0,\ y\in R(x).$$

Следствие 2.8.1. *Верно включение*

$$\partial_{CL} f(x)\subset \mathrm{co}\,\{\varphi'_x(x,y) + B^*(x,q)\varphi'_y(x,y) \mid B(x,q)\in\mathcal{B}(x,q),\ y\in R(x),\ q=\varphi'_y(x,y)/\parallel\varphi'_y(x,y)\parallel\}.$$

Результаты параграфа 2.8 важны для нахождения стационарных точек субдифференциарла Кларка маргинальных функций указанного типа. Можно развивать теорию в указанном направлении для более сложных видов маргинальных функций.

В параграфе 2.9 рассматриваются выпуклые коэрцитивные функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, для которых выполняется предельное соотношение $\dfrac{f(x)}{\parallel x\parallel}\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}\infty$, и находится вид конуса возможных направлений $\Gamma(x,g,v)$ для $\varepsilon-$ субдифференциала

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{v\in\mathbb{R}^n \mid f(z)-f(x)\geq (v,z-x)-\varepsilon\ \forall z\in\mathbb{R}^n\}$$

таких функций. Пусть $h(x,z,v) = f(x)-f(z)+(v,z-x)-\varepsilon$. Введем множества $Q(x,v) = \{z\in S_R(x_0)\mid h(x,z,v)=0\}$,

$$B(x,g,v) =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R}^n,\ \text{если}\ Q(x,v)=\emptyset,\\ \{w\in\mathbb{R}^n \mid (w,z-x)-(v,g)+\partial f(x)/\partial g\leq 0\ \ \forall z\in Q(x,v)\}, \text{если}\ Q(x,v)\neq\emptyset.\end{cases}$$

Лемма 2.9.3. *Если $x\in int\,B^n_\delta(x_0)$, то* $\Gamma(x,g,v) = B(x,g,v)$.

Можно переписать в ином виде множество $\Gamma(x,g,v)$, а именно: для граничной точки $v\in\partial_\varepsilon f(x)$ имеем

$$\Gamma(x,g,v) = \Big\{w\in\mathbb{R}^n \mid (w,q)\leq \frac{1}{\alpha(q)}[(v,q)-\frac{\partial f(x)}{\partial g}]\ \forall q\in P(x,v),\ \forall\alpha(q)\in\Theta(x,v,q)\Big\},$$

где

$$\Theta(x,v,q)=\{\alpha>0 \mid \frac{f(x+\alpha q)-f(x)+\varepsilon}{\alpha}=\min_{\beta>0}\frac{f(x+\beta q)-f(x)+\varepsilon}{\beta}\}$$

и

$$P(x,v)=\{q\in\mathbb{R}^n \mid \| q \|=1, \frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial q}=(v,q)\}.$$

Если $v\in \operatorname{int}\,\partial_\varepsilon f(x)$, то $Q(x,v)=\emptyset$ и $\Gamma(x,g,v)=\mathbb{R}^n$.

Воспользовавшись предыдущими результатами, можно получить формулу для производной по направлению g функции $\varphi(x)=\max_{v\in\partial_\varepsilon f(x)}[-\parallel v \parallel^2]$. Пусть $0\notin\partial_\varepsilon f(x)$, т.е. $\varphi(x)<0$. Множество $R(x)=\{v_0 \mid \parallel v_0 \parallel=\min_{v\in\partial_\varepsilon f(x)}\parallel v \parallel\}$ состоит из единственной точки v_0. Из полученных результатов окончательно имеем следующую формулу $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial g}=\sup\limits_{w\in\Gamma(x,g,v_0)}[-2(v_0,w)]$, откуда после некоторых преобразований можно получить направление $g_0=\dfrac{v_0-\bar v}{\parallel v_0-\bar v\parallel}$ наискорейшего спуска функции $\Phi_\varepsilon(x)=-\varphi(x)$, где

$$\parallel v_0-\bar v\parallel=\min_{v\in\partial f(x)}\parallel v_0-v\parallel,\ \bar v\in\partial f(x).$$

Направление g_0 имеет ясный геометрический смысл, и его можно использовать для нахождения точки минимума функции f.

Далее исследуется функция $\varphi_r(x)=\dfrac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial r}=\max\limits_{v\in\partial_\varepsilon f(x)}(v,r)$, где $r\in\mathbb{R}^n$. Если f не имеет линейных участков, то

$$\frac{\partial\varphi_r(x)}{\partial g}=\sup_{v\in R(x,r)}\ \sup_{w\in\Gamma_r(x,g,v)}(r,w)=\sup_{v\in R(x,r)}\frac{1}{\bar\alpha(r)}\Big[(v,g)-\frac{\partial f(x)}{\partial g}\Big],$$

где $R(x,r)=R_r(x)=\{v\in\partial_\varepsilon f(x) \mid (v,r)=\dfrac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial r}\}$. Для $r=g$ получим

$$\frac{\partial_\varepsilon^2 f(x)}{\partial g^2}=\frac{\partial\varphi_g(x)}{\partial g}=\frac{1}{\alpha(g)}\Big[\frac{\partial_\varepsilon f(x)}{\partial g}-\frac{\partial f(x)}{\partial g}\Big].$$

Так как $\alpha(g)\to 0$ при $\varepsilon\to+0$, то при условии, что функция f дифференцируема в точке $x+\alpha(g)g$, справедливо предельное соотношение $\partial_\varepsilon^2 f(x)/\partial g^2 \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \partial^2 f(x)/\partial g^2$, если функция f имеет вторую производную по направлению g в точке x.

В главе 3 развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$ - стационарные точки. Описан алгоритм оптимизации, сходящийся к $\varepsilon(D)$ - стационарной точке липшицевой функции f со сверхлинейной скоростью.

Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}-$ липшицева с константой L функция, и x_*- ее точка локального минимума(максимума) в $\mathbb{R}^n$. Возьмем произвольное выпуклое компактное множество $D\subset\mathbb{R}^n$. Введем определение стационарной точки.

Определение 3.1. *Точку x_ε назовем $\varepsilon(D)$ стационарной точкой функции f, если множеству $x_\varepsilon+D$ принадлежит стационарная точка функции f.*

Если функция $f-$ сильно выпуклая, то данное определение хорошо согласуется с определением $\varepsilon(D)$ - стационарной точкой для выпуклой функции. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Для произвольной липшицевой функции $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f(x+y)dy, \tag{1}$$

где $0 \in intD, \mu(D)-$ мера области D, $\mu(D) > 0$, есть непрерывно дифференцируемая функция с производной

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D f'(z+x)dz.$$

Замечание 3.1. Интеграл здесь понимается в лебеговом смысле. Производная берется в точках, где она существует. Общеизвестные правила дифференцирования под знаком интеграла в данном случае не выполняются (подинтегральная функция недифференцируема). Поэтому применить дифференцирование под знаком интеграла без дополнительного обоснования нельзя.

Функция φ наряду с новыми свойствами также сохраняют некоторые важные свойства функции f.

Теорема 3.2. *Если $f-$ конечная выпуклая функция в $\mathbb{R}^n$, то $\varphi-$ также конечная выпуклая в $\mathbb{R}^n$.*

Также верна теорема.

Теорема 3.3. *Если f липшицевая функция в $\mathbb{R}^n$, то $\varphi'-$ липшицевая с константой Липшица $\tilde{L}$, зависяшей от D.*

Поскольку функция $\varphi'-$ липшицевая, то φ' ПВ дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.4. *Для функции φ, определенной выше, функция $\Phi(\cdot)$ имеет липшицевую с константой L' вторую производную.*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi(x+y)dy, \quad \Phi''(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D \varphi''(x+y)dy.$$

Замечание 3.2. Интегрирование функции φ'' понимается в лебеговом смысле. В случае шара и куба коэффициент Липшица $\tilde{L}$ зависит от области D как $1/d$, а $L'-$ как $1/d^2$, где $d-$ диаметр множества D.

Доказана важная теорема для построения ускоренных методов минимизации.

Теорема 3.5. *Все стационарные точки функции φ являются $\varepsilon(D)$ - стационарными точками функции f.*

Для нахождения $\varepsilon(2D)$ стационарных точек функции f следует применять методы второго порядка к функции Φ.

Замечание 3.4. Для поиска стационарных точек функции f мы должны в процессе поиска $\varepsilon(2D)$ - стационарных точек уменьшать диаметр множества D. Для обеспечения высокой скорости сходимости надо уменьшать диаметр множества D согласованно с уменьшением шага оптимизационного процесса.

Метод поиска $\varepsilon(2D)$ - стационарной точки функции

Рассмотрим функцию $\tilde{\Phi} : y \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{\Phi}(y, x) = \Phi(y) + 2\tilde{L}\|y - x\|^2$, для $y \in \mathbb{R}^n$. Для функции $\tilde{\Phi}$ верно неравенство

$$\tilde{L}\|z\|^2 \le (\nabla^2\tilde{\Phi}(x, x)z, z) \le 3\tilde{L}\|z\|^2 \ \forall z \in \mathbb{R}^n,$$

где $\nabla^2\tilde{\Phi}(\cdot, x) = \tilde{\Phi}''(\cdot, x)-$матрица вторых производных функции $\tilde{\Phi}(\cdot, x)$ по переменной y. Ясно, что $\nabla\tilde{\Phi}(x, x) = \nabla\Phi(x)$. Пусть точка x_k на k - ом шаге уже построена. Построим точку x_{k+1}. Положим по определению $\tilde{\Phi}_k = \tilde{\Phi}(\cdot, x_k)$, т.е. функция $\tilde{\Phi}_k$ равняется функции $\tilde{\Phi}$ при фиксированном x_k.

1. Вычисляем $\triangle_k = -(\nabla^2\tilde{\Phi}_k(x_k))^{-1}\nabla\tilde{\Phi}_k(x_k)$.

2. Находим такое целое неотрицательное число l_k, для которого $\tilde{\Phi}_k(x_k + 2^{-l_k}\triangle_k) \le \tilde{\Phi}_k(x_k) - 2^{-2l_k}\|\triangle_k\|^2$.

3.Полагаем $x_{k+1} = x_k + 2^{-l_k}\triangle_k$, $k = k + 1$ и переходим к операции 1.

Теорема 3.6. *Последовательность* $\{x_k\}$, *построенная согласно алгоритму* $1 - 3$, *сходится к единственной стационарной точке* x_* *функции* Φ. *Для больших* k *верна следующая оценка для скорости сходимости метода:* $\|x_k - x_*\| \le \nu^k(\triangle_k)\|x_1 - x_*\|$, *где* $\nu(\triangle_k) \to_k 0$, *когда* $\|\triangle_k\| \to_k 0$.

В четвертой главе рассматривается нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для оптимизации в $\mathbb{R}^n$ используются уравнения Пуассона и уравнение теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми или вогнутыми по управлению u и регуляризационному параметру α в окрестности точки глобального минимума по обеим переменным. Высказанная идея упрощает проблему регуляризации по параметру и позволяет строить устойчивые оптимизационные методы. Также предлагается строить нижние выпуклые аппроксимации для целевой функции в достаточно больших окрестностях фиксированных точек, что делает оптимизационный процесс более устойчивым к изменениям аргумента, а сам функционал – полунепрерывным снизу, что важно для оптимизации в бесконечномерных пространствах.

Одним из эффективных методов решения некорректных задач типа

$$J(u) = J(x(T, u), u(T)) \longrightarrow \inf_{u \in U}$$

где $J-$ полунепрерывный снизу функционал на множестве U в банаховом пространстве, является метод регуляризации, разработанный А.Н. Тихоновым и его учениками. При пользовании этим методом нужно найти стабилизатор, выбор которого зависит от пространства, в котором ищется глобальный минимум или максимум. Пусть таким стабилизатором является функция Ω, определенная на множестве U_Ω. Определяется функция

$$\Phi(u) = J(u) + \alpha\Omega(u) \ \forall u \in U_\Omega,$$

которую принято называть функцией Тихонова. Добавление к исходной функции J слагаемого $\alpha\Omega$ делает задачу минимизации функции Φ более "устойчивой" по аргументу. Поэтому часто метод Тихонова называют методом стабилизации.

Так в качестве $\Phi(u)$ для $u \in U \subset L_2[0, 1]$ на множестве кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций может быть взята тихоновская функция

$$\Phi(u) = J(u) + \alpha \vee_0^1 u(t).$$

Задача минимизации Φ решается в конечномерном пространстве по переменным α и u для кусочно непрерывно-дифференцируемой вектор-функции u с конечным числом точек переключения с использованием методов глобальной оптимизации, основанных на применении решения уравнения теплопроводности либо уравнения Пуассона с одновременным их овыпуклением (метод овыпукления) по $z = (u, \alpha)$. Метод овыпукления позволяет построить регулярные, т.е. устойчивые методы оптимизации. В диссертации приведены оптимизационные методы и результаты численных экспериментов.

Регуляризация функционала $J(u)$ по Тихонову обеспечивает регулярность по аргументу. Поскольку процесс оптимизации построен таким образом, что оптимизируется не сам функционал, а решение уравнения в частных производных (уравнение Пуассона либо уравнение теплопроводности), которое является липшицевым по совокупности аргументов с одной и той же константой Липшица независимо от номера итерационного шага, то метод регуляризации по Тихонову совместно с методом овыпукления обеспечивает регулярность по функционалу также.

Предлагается использовать нижнюю выпуклую аппроксимацию функции J, что обеспечивает его полунепрерывность снизу и улучшение сходимости процесса к множеству оптимальных решений U_*.

Задача поиска глобального минимума (максимума) функционала на заданном компакте сводится к задаче нахождения глобального минимума (максимума) решения уравнения теплопроводности или уравнения Пуассона. Причем можно так изменить оптимизируемый функционал, не изменив точку глобального минимума (максимума), чтобы решение уравнения теплопроводности или уравнения Пуассона было выпуклым (вогнутым) по пространственному аргументу (*метод овыпукления*). Для уравнения теплопроводности определяется правило изменения времени $t \to +0$, чтобы решение оставалось выпуклым (вогнутым) по аргументу в малой окрестности точки оптимума. Используя оптимизационные методы второго порядка, можно строить оптимизационный процесс со сверхлинейной скоростью сходимости.

Для поиска глобального минимума непрерывного по u функционала J на множестве кусочно-непрерывно-дифференцируемых функций u с конечным числом точек переключения применяется видоизмененное уравнение Пуассона

$$\triangle\varphi(z) = \bar{\Phi}^{\beta}(z), \quad \bar{\Phi}(z) = \begin{cases} \max\left(0, c - \Phi(z)\right) + 1, \text{ если } z \in \Theta, \\ 0, \text{ если } z \notin \Theta, \end{cases}$$

где $c = \int_\Theta \Phi(z)p(z)dz$, β – малый положительный параметр. $p-$плотность распределения случайного вектора $Z \in \Theta$, $\Theta-$ область, в которой производится поиск. Функция φ является гладкой дважды дифференцируемой функцией с матрицей вторых смешанных производных $\bigtriangledown^2\varphi(z)$, вид которой в удобной для анализа форме получили А. И. Пропой и А. И. Каплинский. Воспользовавшись их результатами, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.3.1. *Для малых* $\beta > 0$ *и области поиска* $\Theta = B^n_\rho(z) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \parallel \xi - z \parallel \leq \rho\}$ *существуют такие* $L_1(\beta, \rho, \bar{\Phi})$, $L_2(\beta, \rho, \bar{\Phi}) > 0$, *что для функции* φ, *являющейся решением написанного выше уравнения Пуассона, верно неравенство*

$$L_1(\beta, \rho, \bar{\Phi})\|g\|^2 \leq (\nabla^2_{zz}\varphi(z)g, g) \leq L_2(\beta, \rho, \bar{\Phi})\|g\|^2 \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Также используется уравнение теплопроводности для задач глобальной оптимизации. Решение на k - ом шаге получается из решения уравнения следующего вида

$$\frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t} = a^2 \triangle \varphi(z,t), \;\; \varphi(z,0) = m_k \hat{\Phi}_k(z), \; z = (u,\alpha) \in U_k \times [-\alpha_0, \alpha_0]$$

где

$$\hat{\Phi}_k(z) = \max\left(0, -c_k + \hat{\Phi}_{k-1}(z)\right), \;\; \text{для } k > 1, \hat{\Phi}_0(z) = \Phi(z), \; \hat{\Phi}_1(z) = \max\left(0, c_1 - \Phi_0(z)\right),$$

$c_k = \int_{U_k \times [-\alpha_0, \alpha_0]} \hat{\Phi}_{k-1}(\xi) p_{k-1}(\xi) d\xi$, p_k- плотность распределения случайного вектора $Z \in U_k \times [-\alpha_0, \alpha_0]$, $U_k \subset U-$ область поиска на k- ом шаге, $z \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 4.3.2. *Для любого $z \in U \times (-\alpha_0, \alpha_0)$ и достаточно малых t существуют большие $m_k > 0$, а также положительные числа $M_1(U \times (-\alpha_0, \alpha_0), t, m_k)$ и $M_2(U \times (-\alpha_0, \alpha_0), t, m_k)$ такие, что верно неравенство*

$$M_1 \|g\|^2 \leq \mid (\varphi''_{zz}(z,t) g, g) \mid \leq M_2 \|g\|^2 \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Если

$$\frac{\|z - \xi\|}{(2a^2)t} \ll 1 \;\; \forall \xi \in U \times (-\alpha_0, \alpha_0),$$

то матрица $\varphi''_{zz}(z,t)$ отрицательно определена.

Теоремы 4.3.1 и 4.3.2 дают правило овыпукления решения уравнений Пуассона и теплопроводности, которое надо применять вблизи точки оптимума, что позволяет строить методы оптимизации со сверхлинейной скоростью сходимости вблизи точки оптимума. Когда находимся вдали от оптимальной точки, о чем можно судить по величине градиента и шага, то применяем градиентный метод, используя только информацию о первой производной функции, являющейся решением уравнения в частных производных.

В пятой главе даны необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий. Функции, представимые в виде разности выпуклых функций (ПРВ функции), находят широкое применение в оптимизации.

Переход от одномерного случая к двумерному представляет собой качественный шаг вперед по трудности. Возможны дальнейшие обобщения для функций от большего числа переменных. Необходимые и достаточные условия представимости функции одной переменной хорошо известны. Эти условия могут быть записаны в следующем виде.

Пусть $x \to f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ – произвольная липшицевая функция. Известно, что множество N_f, где функция дифференцируема, есть множество полной меры на $[a,b]$. Для того, чтобы функция f была представима в виде разности выпуклых функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\vee(f'; a, b) \leq c$, где c - некоторая константа и производные вычисляются там, где они существуют. Символ $\vee$ означает вариацию функции f' на отрезке $[a,b]$.

Автором были найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой положительно однородной (ПО) степени 1 функции трех переменных в виде разности выпуклых функций. Результат может быть распространен на ПО функции m-ой степени.

Теперь откажемся от условия положительной однородности и будем рассматривать произвольную липшицевую функцию f с константой Липшица L от двух переменных $(x, y) \to f(x, y) : D \to \mathbb{R}$, где D есть выпуклое открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^2$, так что $\bar{D}$ – компакт.

Пусть $\wp(D)$ – класс кривых на плоскости XOY в области D, ограничивающих выпуклые компактные множества. Параметризуем кривые $r \in \wp(D)$ естественным образом, т.е. параметр t точки M на кривой r равен длине кривой между M и начальной точкой. Обозначим такую кривую как $r(t), t \in [0, T_r]$, где T_r– наибольшее значение параметра t, соответствующее начальной точке. С помощью кривых $r \in \wp(D)$ необходимые и достаточные условия представимости функции f в виде разности выпуклых функций могут быть записаны в следующем виде.

Теорема 5.1. *Для того, чтобы липшицевая функция $z \to f(z) : D \to \mathbb{R}$ была представима в виде разности выпуклых функций, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $c(D, f) > 0$, что для всех $r \in \wp(D)$ справедливо неравенство*

$$\vee(\Phi'; 0, T_r) < c(D, f),$$

где $\Phi(t) = f(r(t)) \quad \forall t \in [0, T_r]$.

Доказательство основано на специальном алгоритме представления функции f в виде разности выпуклых функций.

Следствие 5.1.*Положительно однородная функция степени 1 двух переменных $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ представима в виде разности выпуклых функций тогда и только тогда, когда справедливо неравенство*

$$\vee(\Phi'; 0, 2\pi) < \infty,$$

где $\Phi(t) = f(r(t))$ для $t \in [0, 2\pi]$, $r(t)$– единичная окружность на плоскости с центром в начале координат.

Также дана геометрическая трактовка Теоремы 5.2. Рассмотрим на графике Γ_f функции f кривую $R(t) = (r(t), f(r(t)))$, где $r \in \wp(D)$. Так как функция f есть липшицевая, то п.в. на $[0, T_r]$ существует производная R', которую обозначим через $\tau = R'$, а множество точек, где она существует, – через N_r.

Определение 5.2. *Поворотом кривой R на многообразии Γ_f назовем величину*

$$sup_{\{t_i\} \subset N_r} \sum_i \| \ \tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\| \ \| = O_r.$$

Теорема 5.2. *Для того, чтобы произвольная липшицевая функция $z \to f(z) : D \to \mathbb{R}$ была ПРВ функцией на множестве $D \in \mathbb{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $r \in \wp(D)$ существовала константа $c_2(D, f) > 0$ такая, что поворот кривой R на Γ_f ограничен сверху константой $c_2(D, f) > 0$, т.е. $O_r \le c_2(D, f) \; \forall r \in \wp(D)$.*

В шестой главе дается правило построения исчерпывающего множества верхних выпуклых аппроксимаций (в.в.а.) для произвольной липшицевой дифференцируемой по направлениям функции f, которые в совокупности образуют экзостер. В терминах экзостеров формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.Введем обозначение $h(g) = F(x_0, g) = \limsup_{\alpha \to +0}(f(x_0 + \alpha g) - f(x_0))/\alpha$.

Определение 5.2. *Функция $h_\lambda(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ называется в. в. а. функции $f(\cdot)$ в точке x_0, если*

1) $h_\lambda(g)\geq F(x_0,g)\quad \forall g\in\mathbb{R}^n$,

2) $h_\lambda(\cdot)-$ выпуклая замкнутая положительно однородная (п. о.) функция от g.

Очевидно, что в. в. а. существует бесконечно много. Воспользовавшись в. в. а., Б. Н. Пшеничный сформулировал необходимые условия оптимальности. Но оказывается, если рассматривать достаточно много таких функций, то можно сформулировать и достаточные условия оптимальности.

А. М. Рубинов ввел исчерпывающее множество в. в. а. По определению исчерпывающим множеством функции $f(\cdot)$ в точке x_0 называется такое множество в.в.а. $h_\lambda(\cdot),\lambda\in\Lambda^*$, для которого $\inf_{\lambda\in\Lambda^*} h_\lambda(g)=F(x_0,g)\ \forall g\in\mathbb{R}^n$. Для построения исчерпывающего множества в. в. а. функции f в точке x_0 достаточно определить множество $E^*=\{C\subset\mathbb{R}^n\mid C=C(h_\lambda)=\partial h_\lambda(0)\ \lambda\in\Lambda^*\}$. Множество $E^*=E^*(f)$ называется верхним экзостером функции f в точке x_0. Если существует множество Λ_*, для которого выполнено равенство $h(g)=\sup_{\lambda\in\Lambda_*}\ h_\lambda(g)\ \forall g\in\mathbb{R}^n$, то множество $E_*=E_*(f)=\{D\subset\mathbb{R}^n\mid D=D(h_\lambda)=\underline{\partial} h_\lambda(0)\ \lambda\in\Lambda_*\}$ называется нижним экзостером функции f в точке x_0. Пара $E=[E^*;E_*]$ семейств выпуклых компактных множеств, где E^*- верхний и E_*- нижний экзостеры, называется *биэкзостером*. Модифицируем исходную функцию и рассмотрим новую функцию $\tilde f(x)=f(x)+L\,\|x-x_0\|$,

Метод построения верхнего экзостера для функции $\tilde f(.)$

Для измененной функции $\tilde f(\cdot)$ построим множество усредненных градиентов $D\tilde f(x_0)$. Возьмем любой вектор $g\in S_1^{n-1}(0)$. Пусть $P_g(v)=\{w\in\mathbb{R}^n\mid (w,g)\leq(v,g)\}$. Для любого вектора $v\in E_g(\tilde f)$ определим $C_g(\tilde f)=D\tilde f(x_0)\cap P_g(v)$, где $E_g\tilde f(x_0)=\operatorname{co}\{v\in\mathbb{R}^n:\exists\alpha_k,\alpha_k\to+0,\ (\exists r(x_0,\cdot,g)\in\eta(x_0)),v=\lim_{\alpha_k\to+0}\alpha_k^{-1}\int_0^{\alpha_k}\nabla\tilde f(r(x_0,\tau,g))d\tau\ \}$. По определению положим $\frac{\partial\tilde f(x_0)}{\partial g}=\tilde f'(x_0,g)=\tilde h(g)$. Верна следующая лемма.

Лемма 6.1. *Для любого вектора $v\in E_g(\tilde f)$ верно равенство* $(v,g)=\frac{\partial\tilde f(x_0)}{\partial g}=\tilde h(g)$. Доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Ограниченное в совокупности семейство выпуклых компактных множеств C, включающих множества $C_g(\tilde f)$ для всех $g\in S_1^{n-1}(0)$, образует верхний экзостер $E^*(\tilde f)$, т.е. верно равенство*

$$\tilde h(g)=\inf_{C\in E^*(\tilde f)}\ \tilde h_C(g),$$

где $\tilde h_C(g)=\max_{v\in C}(v,g)$.

Замечание . Теорема дает правило построения верхнего экзостера $E^*(\tilde f)$. Ясно, что верхний экзостер $E^*(\tilde f)$ функции $\tilde f$ в точке x_0 совпадает с верхним экзостером функции $\tilde h$ в нуле, т. е. $E^*(\tilde f)=E^*(\tilde h)$.

Следующий шаг – построение исчерпывающего множества в. в. а. для функции $f(\cdot)$.

Теорема 6.2. *Верхний экзостер $E^*(f)$ функции $f(\cdot)$ определяется равенством $E^*(f)=\{w+C\mid w\in LB_1^n(0),C\in E^*(\tilde f)\}$, где $E^*(\tilde f)-$ верхний экзостер функции $\tilde f(\cdot)$ в точке x_0, который можно построить согласно теореме 6.1.*

Построим нижний экзостер функции $f(\cdot)$. Определим функцию $\bar h(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$: $\bar h(g)=h(g)-L\|g\|$.

Теорема 6.3. *Нижний экзостер* $E_*(f)$ *функции* $f(\cdot)$ *в точке* x_0 *есть множество* $E_*(f) = \{w + C \mid w \in LB_1^n(0), C \in -E^*(-\bar{h})\}$, *где* $E^*(-\bar{h})-$ *верхний экзостер функции* $-\bar{h}(\cdot)$ *в нуле, который можно построить согласно теореме 6.2.*

Следствие 6.1. *Биэкзостер функции* $f(\cdot)$ *в точке* x_0 *есть пара* $[A, B]$ *множеств* A, B, *где* $A = \{w + C \mid w \in LB_1^n(0), C \in E^*(\tilde{h})\}$, $B = \{w + C \mid w \in LB_1^n(0), C \in -E^*(-\bar{h})\}$.

Если функция f достигает минимума на R^n в точке x_* и известен верхний экзостер E^* функции f в точке x_*, то выполнено необходимое условие безусловного минимума: $0_n \in C\ \forall C \in E^*(f)$. Если найдется такое $\delta > 0$, что $B_\delta \subset C$, $\forall C \in E^*(f)$, где $B_\delta = \{x \in R^n \mid \|x\| < \delta\}$, то x_*- точка строгого локального минимума функции f. Приведенное условие является достаточным условием строгого локального минимума функции f. Аналогичные условия можно записать для точки максимума при известном нижнем экзостере E_*.

В главе 7 дается правило построения для липшицевой функции с помощью интеграла Стеклова субдифференциалов первого и второго порядков, состоящих соответственно из обобщенных градиентов и обобщенных матриц. При этом, как доказывается, субдифференциал первого порядка, построенный с помощью этого метода, совпадает с субдифференциалом $Df(x_0)$, введенным автором в главе 1. Для случая, когда функция дифференцируема или дважды дифференцируема в точке, субдифференциалы первого и второго порядков состоят соответственно из градиента и матрицы вторых частных производных в этой точке. Обобщенные градиенты и матрицы вторых частных производных используются для формулировки необходимых и достаточных условий оптимальности первого и второго порядков, а также построения оптимизационных методов.

Рассмотрим непрерывное в метрике Хаусдорфа МО $D(\cdot)$ с выпуклыми компактными образами, $0 \in \operatorname{int} D(x)$, $\mu(D(x)) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq x_0$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $x_0 \in \operatorname{int}(x + D(x))$ для всех $x \in S, S \in \mathbb{R}^n-$ окрестность точки x_0;
2. диаметр множества $D(x)$, который обозначим через $diam\, D(x) = d(D(x))$, стремится к нулю при $x \to x_0$, и удовлетворяет неравенству $d(D(x)) \leq k\|x - x_0\|$ для некоторой константы k;
3. для некоторой последовательности $\{\varepsilon_i\}, \varepsilon_i \to +0$, при $i \to \infty$ МО $D(\cdot)$ постоянно для x из множества $\varepsilon_{2i+1} <\| x - x_0 \|< \varepsilon_{2i}$;
4. граница множества $D(x)$ для всех $x \in S$, $x \neq x_0$, задается дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от x, $0 \in \operatorname{int} D(x)$, $\mu(D(x)) > 0$.

Мы будем рассматривать МО $D(\cdot)$, удовлетворяющие написанным выше условиям, для произвольных последовательностей $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \to +0$, и константы k. Определенное семейство МО обозначим через Ξ.

Для произвольного x из множества $\varepsilon_{2i+1} <\| x - x_0 \|< \varepsilon_{2i}$, где МО $D(\cdot)$ постоянно, $D(x) \equiv D_{2i}$, производная $\varphi'(\cdot)$ удовлетворяет неравенству Липшица с константой $L_{2i}(D_{2i})$ (см. Главу 3).

Для МО $D(\cdot)$ и функции (1) определим множество

$$\partial\varphi_D(x_0) = \operatorname{co}\{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \lim_{x_i \to x_0} \varphi'(x_i)\},$$

где точки x_i берутся из областей постоянства МО $D(\cdot)$. Множество $\partial\varphi_D(x_0)-$ выпуклое компактное в $\mathbb{R}^n$ (Лемма 7.1.).

Определим МО $\Phi f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ с образами

$$\Phi f(x_0) = \mathrm{co} \bigcup_{D(\cdot)} \partial\varphi_D(x_0),$$

где объединение берется по всем МО $D(\cdot) \in \Xi$. Множество $\Phi f(x_0)$ назовем *субдифференциалом первого порядка* функции $f(\cdot)$ в точке x_0.

Теорема 7.2.1. *Если $f(\cdot)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Phi f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

В Лемме 7.2.2 доказывается, что $\Phi f(x_0)-$ выпуклое компактное множество.

Теорема 7.2.2. *Верно равенство $\Phi f(x_0) = Df(x_0)$.*

Для построения субдифференциала второго порядка используем функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{\mu(D(x))} \int_{D(x)} \varphi(x + y)dy.$$

Определим множество

$$\partial\psi_D(x_0) = \mathrm{co}\, \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \lim_{x_i \to x_0} \psi'(x_i)\},$$

где точки x_i берутся из областей постоянства МО $D(\cdot)$.

Введем МО $\Psi f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ с образами

$$\Psi f(x_0) = \mathrm{co} \bigcup_{D(\cdot)} \partial\psi_D(x_0),$$

где объединение берется по всем МО $D(\cdot) \in \Xi$.

Теорема 7.3.1.*Верно равенство $\Psi f(x_0) = Df(x_0)$.*

Введем множество матриц

$$\partial^2\psi_D(x_0) = \mathrm{co}\, \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = \lim_{x_i \to x_0} \psi''(x_i)\},$$

где точки x_i принадлежат областям постоянства МО $D(\cdot) \in \Xi$. Доказывается (Лемма 7.3.1.), что $\partial^2\psi_D(x_0)-$ выпуклое замкнутое множество. Определим МО $\Psi^2 f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^{n\times n}}$ с образами

$$\Psi^2 f(x_0) = \mathrm{co} \bigcup_{D(\cdot)} \partial^2\psi_D(x_0),$$

где объединение берется по всем МО $D(\cdot) \in \Xi$. Множество $\Psi^2 f(x_0)$ назовем *субдифференциалом второго порядка* функции $f(\cdot)$ в точке x_0. Доказывается (Лемма 7.3.2), что множество $\Psi^2 f(x_0)-$ выпуклое замкнутое множество.

Теорема 7.3.3. *Если $f(\cdot)-$ дважды дифференцируемая в точке x_0, то $\Psi^2 f(x_0) = \{f''(x_0)\}$.*

Достаточное условие оптимальности может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 7.4.1. *Если в точке x_0 выполняются необходимые условия минимума и для всех подозрительных на экстремум направлений g существует $\beta(g) > 0$, что верно неравенство*

$$(Ag, g) \geq \beta(g)\|g\|^2 \quad \forall A \in \Psi^2 f(x_0),$$

то x_0- точка минимума функции $f(\cdot)$.

Приведено также достаточное условие оптимальности с менее обременительным для проверки условием (теорема 7.4.2) и даны примеры построения и применения субдифференциала второго порядка.

В параграфе 7.5 строится исчисление субдифференциалов первого и второго порядков (теоремы 7.5.1 - 7.5.4).

Выводы:

в диссертации развиты новые способы аппроксимации негладких липшицевых функций и на основе их построены новые методы оптимизации:

1. Введен новый субдифференциал для локально липшицевых функций, и показана связь с уже существующими. Формулируется необходимое условие оптимальности в точке.

2. Строится непрерывная равномерная аппроксимация субдифференциала Кларка, которая используется в оптимизационных процессах поиска стационарных точек. Строится липшицевое МО $-$ аналог ε-субдифференциального отображения для выпуклой функции.

3. Строятся главные нижние выпуклые аппроксимации (ГНВА) для липшицевых функций и определяются правила их построения для различных их комбинаций. Формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке через квазидифференциал ГНВА.

4. Вводится понятие аппроксимации МО относительно другого МО. Определяется вид конуса Булигана, используя предельные интегральные значения матриц вторых частных производных опорной функции, которые, как доказывается, существуют почти всюду в декартовом произведении соответствующих пространств. С помощью таких матриц определяется субдифференциал Кларка для липшицевых МО и находится вид производной по направлению маргинальной функции и ее субдифференциал Кларка.

5. Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладких и недостаточно гладких функций, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие $\varepsilon(D)$-стационарные точки. С помощью таких функций строится метод оптимизации, сходящийся со сверхлинейной скоростью к $\varepsilon(D)$-стационарной точке липшицевой функции.

6. Вводится нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для поиска оптимального управления используются уравнения Пуассона или теплопроводности, для решений которых применяется метод овыпукления, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми (вогнутыми) по управлению и регуляризационному параметру α в окрестности точки оптимума. Строится численный метод поиска глобального оптимального управления.

7. Найдены необходимые и достаточные условия представимости произвольной липшицевой функции двух переменных в виде разности выпуклых функций. Дана также геометрическая интерпретация этих условий.

8. Дано правило построения экзостеров для липшицевых функций, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке.

9. С помощью интегралов Стеклова вводятся субдифференциалы первого и второго порядков для липшицевой функций, состоящие из обобщенных градиентов и матриц, с помощью которых формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Построено исчисление субдифференциалов.

Практические рекомендации. Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке программного обеспечения для микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей in vitro в пространстве организованных микропотоков питательной среды и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами, которые создаются в рамках проекта Фонда "Сколково" "Универсальная платформа "Франкенштейн"для биофабрикации искусственных тканей и органов"(Начало проекта – апрель 2015 гола, научный руководитель проекта – д.м.н., проф. Глотов В.А. Автор настоящего диссертационного исследования является участником этого проекта).

Результаты работы опубликованы в следующих работах:

Статьи в журналах, входящих в Перечень ВАК РФ:

1. *Лупиков И.М.* Метод сканирования длиной волны полупроводникового лазера в оптической головке лазерного проигрывателя // Оптико-механическая промышленность. №5. 1990. С. 71-89.

2. *Прудников И.М.* Субдифференциал Кларка для липшицевых многозначных отображений // Кибернетика. 1992. № 1. С. 21-28.

3. *Прудников И.М.* Необходимые и достаточные условия представимости положительно-однородной функции трех переменных в виде разности двух выпуклых функций // Известия РАН. 1992. Т. 56. № 5. С. 1114-1126.

4. *Прудников И.М.* Метод глобальной оптимизации и оценка скорости его сходимости // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 12. С. 72-81.

5. *Прудников И.М.* Дифференциальные свойства функции экстремума по липшицевому многозначному отображению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1347-1357.

6. *Прудников И.М.* Применение метода потенциалов для оптимизации функции на множестве, заданном в виде системы линейных неравенств // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 1. С. 66-82.

7. *Прудников И.М.* Об аппроксимации многозначных отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 11. С. 1319-1326.

8. *Прудников И.М.* Нижние выпуклые аппроксимации для липшицевых функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 3. С. 378 - 386.

9. *Прудников И.М.* Применение некоторых уравнений математической физики для глобальной оптимизации функции на множестве. I. // Автоматика и Телемеханика. 2000. № 11. С. 76-87.

10. *Прудников И.М.* Применение некоторых уравнений математической физики для глобальной оптимизации функции на множестве. II. // Автоматика и Телемеханика. 2002. №12. С. 80-91.

11. *Прудников И.М.* Правила построения нижних выпуклых аппроксимаций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т.43. № 7. С. 939-950.

12. *Proudnikov I.M.* New constructions for local approximation of Lipschitz functions. I. // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2003. V. 54. P. 373-390.

13. *Proudnikov I.M.* New constructions for local approximation of Lipschitz functions. II // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2007. V. 66. P. 1443-1453.

14. *Proudnikov I.M.* Construction of a stabilizing control and a solution to a problem about center and focus for differential systems with a polynomial part on the right side // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2008. v.69. № 12. P.4694 - 4705.

15. *Прудников И.М.* $C^2(D)$ интегральные аппроксимации негладких функций, сохраняющие $\varepsilon(D)$ точки локальных экстремумов // Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, N 5. Доп. номер. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2010. С. 159 - 169.

16. *Прудников И.М.* Интегральная аппроксимация липшицевых функций // Вестн. С. - Петерб. ун-та. сер. 10. 2010. Вып. 2. С. 70-83.

17. *Прудников И.М.* Метод построения исчерпывающего множества верхних выпуклых аппроксимаций // Вестн. С. - Петерб. ун-та. сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 37 - 51.

18. *Прудников И.М.* К вопросу о представимости функции двух переменных в виде разности выпуклых функций // Сибирский математический журнал РАН. 2014. Т.55. № 6. С.1368-1380.

19. *Proudnikov I.M.* The Subdifferentials of the First and Second Orders for Lipschitz Functions // J. of Optimization Theory and Application. 2016. V. 171. N 3. P 906 - 930.

Другие публикации по теме диссертации:

20. *Прудников И.М.* Необходимые и достаточные условия квазидифференцируемости функции двух переменных // Конференция молодых ученых Кавказских республик. Груз. АН. Тбилиси. 1986.

21. *Прудников И.М.* Алгебра множеств возможных направлений многозначных отображений // Сборник работ Саранского университета. 1990. С. 13-21.

22. *Прудников И.М.* Новый аппроксимационный метод для липшицевых функций // Доклады конференции APORS 97. Мельбурн, Австралия. 1997. С. 79-82.

23. *Прудников И.М.* К вопросу о представимости функции двух переменных в виде разности выпуклых функций // Сборник трудов Смоленского гуманитарного университета. 2003. № 3. С. 23-32.

24. *Прудников И.М.* Модель обращения денежных средств в экономике. Международная конференция "Устойчивость и процессы управления"посв. 75-тию Зубова В.И. SP2005. с. 1681-1687. С.Петербург. 2005.

25. *Proudnikov I.M.* Stochastic model of money flow in economics // Cubo. A Mathematical Journal. Vol. 9, № 3, 29-38. 2007.

26 *Прудников И.М.* Необходимые и достаточные условия представимости функции двух переменных в виде разности выпуклых функций // Тезисы школы семинара, Саратов. 2008. С. 97-99.

27. *Прудников И.М.* Некорректные задачи и метод овыпукления // Моск. Межд. Конф. Посв. 90-тию Моисеева Н.Н. 2008. С. 200-202.

28. *Прудников И.М.* Применение метода овыпукления для решения задач теории управления // Международная конференция по теории управления,SICPRO'08, Москва, Институт проблем управления РАН им. В. А. Трапезникова. 2008. С. 526-535.

29. *Proudnikov I.M.* Mean value of the infinite coalition game // The second international conference "Game theory and management". GMT 2008, С. 120-122.

30. *Proudnikov I. M.* Generalized matrices for Lipschitz functions // Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2010. V.4. № 2. P. 227-244.

31. *Прудников И.М.* Аппроксимация и оптимизация липшицевых функций. Построение, анализ, методы. LAMBERT Acad. Publ. Germany. 2011. 369 с.

32. *Proudnikov I. M.* Equivalent substitution in the control theory // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - Т. 14. -Вып. 4. - 2015. - URL: $http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-48-html/prudnikov_i/prudnikov_i.htm$

33.*Прудников И.М.* Принцип оптимального функционирования организма // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - том 5. - выпуск 2. - 2004. - url: $http://www.smolensk.ru/user/sgma/mmorph/n-10-html/prudnikov/prudnikov.htm$

34. *Бачерикова А. Г., Прудников И. М., Смородинов А.В.* Проверка закона Маррея для микрососудистых сетей // - Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - том 5.- выпуск 4. 2006. - url: $http://www.smolensk.ru/user/sgma/MMORPH/N-12-html/smorodinov/smorodinov.htm$

35. *Тейкина О. Ю., Меренков В. Г., Прудников И. М.* Метрологическая характеристика упрощенного способа измерения угла скрученности бедренной кости человека: оптимизация и планирование измерительного эксперимента // Математическая морфология. Электронный математический и медико-биологический журнал. - Т. 17. - Вып. 2. - 2018. - URL: http://www.sci.rostelecom67.ru/user/sgma/MMORPH/N-58-html/teykina/teykina.htm

В **Приложении** приведены результаты численных экспериментов.