Прудников И.М.

Аппроксимация и оптимизация липшицевых функций

В докладе будет рассказано об основных результатах автора касательно аппроксимации липшицевых функций и липшицевых многозначных отображений и их применения в оптимизации, а также смежные вопросы в геометрии и теории управления.

Субдифференциалы для липшицевых функций

Решается оптимизационная задача

$$f(x) \to \inf \qquad (1)$$

где f(·) –локально липшицевая функция. Для формулировки необходимых и достаточных условий опт*и*мальности в точке определяются субдифференциалы Кларка $\partial_{\mathrm{CL}} f(x) = \mathrm{co}\{\mathrm{v} | \exists \{\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\}, x_i \to x, f'(x_i) \to v\}$ и Мишеля-Пено $\partial_{\mathrm{MP}} f(\cdot)$, как такое выпуклое компактное множество, для которого $\mathrm{f}^{\uparrow}_{MP}(\mathrm{x},\mathrm{g}) =$ $= \sup_{q \in R^n}\{\lim_{\alpha \to +0} \sup [f(x+\alpha(g+q)) - f(x+\alpha q)]/\alpha\} = \max_{v \in \partial_{MP} f(x)} (v,g)$.Необходимые условия оптимальности в R^n записываются в виде $0 \in \partial_{\mathrm{CL}} f(x)$ или $0 \in \partial_{\mathrm{MP}} f(x)$.

Целью диссертационной работы является разработка новых методов аппроксимации липшицевых функций и многозначных отображений, формулировка на их основе необходимых и достаточных условий оптимума, а также разработка новых оптимизационных методов. Предложенный аппарат находит применение в разных областях математики.

Множество кривых в R^n

Рассматривается множество *η(x)* кривых *r(x,a,g)=x+ag+o_r(a)* , обладающих следующими свойствами

1) $o_r(\alpha)/\alpha \to +0$ при $\alpha \to +0$ равномерно по r;

2) функция o(.) непрерывно дифференцируема и ее производная o'_r (.) ограничена вблизи начала координат: существует константа c>0 такая, что для некоторого α_0: $\sup\limits_{\tau \in (0,\alpha_0)} \|o'(\tau)\| \le c$;

3) производная $\nabla f(r(.))$ существует почти всюду (ПВ) вдоль кривой *r(x,a,g)*.

Вводится следующее множество векторов

$$Ef(x) = \{v \in R^n \,|\, \exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0, \exists g \in S_1^{n-1}(0), \exists r(x,.,g) \in \eta(x), v = \lim_{\alpha_k \to +0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x,\tau,g))d\tau\}$$

Новый субдифференциал

Определим множество $Df(x) = coEf(x)$. **Доказывается замкнутость** Df(x) и устанавливается связь с субдифференциалом Кларка, а именно: **для функций локально представимых в виде разности выпуклых** *Df(x)=∂$_{CL}$f(x).* Приводится **пример**, доказывающий важность требования представления функции в виде разности выпуклых функций для выполнения данного утверждения. Для установления более тесной связи множеств *Df(x)* и *∂$_{CL}$f(x)* между собой **вводится также множество**

$$\hat{D}f(x) = co\{v \in \mathrm{R}^n \big| (\exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0), (\exists\{h_m\}, h_m \to 0), \exists g \in S^{n-1}{}_1(0),$$

$$\exists r(x+h_m,., g) \in \eta(x+h_m), v = \lim_{\substack{\alpha_k \to +0 \\ h_m \to 0}} \alpha^{-1}{}_k \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x+h_m, \tau, g))d\tau\},$$

Связь с субдифференциалом Кларка и Мишеля-Пено и условие оптимальности

Доказывается, что $\hat{D}f(x) = \partial_{\mathrm{CL}} f(x)$. Чтобы понять связь между собой рассмотренных множеств, введем

$$D_{\{h_m\}} f(x) = co\{v \in \mathrm{R}^n \left| (\exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0), \exists g \in S^{n-1}{}_1(0), \right.$$

$$\exists r(x+h_m,.., g) \in \eta(x+h_m), v = \lim_{\substack{\alpha_k \to +0 \\ h_m \to 0}} \alpha^{-1}{}_k \int_0^{\alpha_k} \nabla f(r(x+h_m, \tau, g)) d\tau\},$$

Легко видно, что если положить h_m=0, то $D_{\{h_m\}} f(x) = Df(x)$, а если **положить** $\{h_m\}=\{\alpha_k q\}$, то $\bigcup_{\{\mathrm{h_m}\}} D_{\{h_m\}} f(x) = \partial_{\mathrm{MP}} f(x)$. В то же время $\bigcup_{\{\mathrm{h_m}\}} D_{\{h_m\}} f(x) = \hat{D}f(x)$. Приводятся **примеры** несовпадения рассматриваемых субдифференциалов.

Необходимое условие оптимальности в R^n есть включение $0 \in \mathrm{Df(x)}$. **Необходимым условием минимума на выпуклом компактном множестве Ω является следующее условие** $\mathrm{Df(x)} \cap K^+(x) \neq \varnothing$, *K(x,Ω)* – конус касательных направлений к множеству W в точке x, *K^+(x,Ω)*-сопряженный конус к конусу *K(x,Ω).*

α-субдифференциал липшицевой функции

Вводится α-субдифференциал для произвольной липшицевой функции f и α>0:

$$D_\alpha f(x) = \overline{co}\{v \in R^n \mid \exists r(x,.,g) \in \eta(x), \exists g \in S^{n-1}{}_1(0), v = \alpha^{-1}\int_0^\alpha \nabla f(r(x,\tau,g))\mathrm{d}\tau\}$$

$\mathrm{D}_\alpha f$, как непрерывное расширение субдифференциала выпуклой функции, **используется** для нахождения точки минимума. **Доказывается, что** $\mathrm{D}_\alpha f$ **есть липшицевое МО**.

Рассмотрим многозначное отображение (МО) $\overline{D}_\delta f(\cdot)$ с образами $\overline{D}_\delta f(x) = \overline{co}\bigcup_{\mu\in[0,\delta]} D_\mu f(x)$. **Был применен** разработанный ранее Полаком, Майне и Варди градиентный метод нахождения стационарной точки субдифференциального отображения Кларка, использующий равномерное непрерывное расширение субдифференциала Кларка, **показав, что** МО

Непрерывное расширение субдифференциала Кларка

$\overline{D}_{\delta} f(\cdot)$ и есть такой тип отображения для функций локально представимых в виде разности выпуклых функций.

Рассматривается одно из возможных применений нового метода аппроксимаций, а именно: **построение главных нижних выпуклых аппроксимаций** (ГНВА) для липшицевых функций, которые можно строить в любой, а не только в достаточно малой окрестности рассматриваемой точки. Построение ГНВА значительно упрощает вид исходной функции, что позволяет ускорить методы локальной и глобальной оптимизации.

Приведем метод построения ГНВА в окрестности точки x_0. Обозначим $\widetilde{f}(x) = f(x) + L\|x - x_0\|$, где L - константа Липшица.

1. Строим для любого $g \in S_1^{n-1}(0)$ множество

$$D_g \widetilde{f}(x_0) = \{v(g) \in \mathrm{R}^n \Big| (\exists\{\alpha_k\}, \alpha_k \to +0), \exists r(x_0,., g) \in \eta(x_0),$$

Главные нижние выпуклые аппроксимации

$$v(g) = \lim_{\alpha_k \to +0} \alpha_k^{-1} \int_0^{\alpha_k} \nabla \widetilde{f}(r(x_0, \tau, g))d\tau \}.$$

2. Определяем множество

$$A = \{w \in R^n \Big| (w, g) \le (v(g), g) \forall v(g) \in D_g \widetilde{f}(x_0), \forall g \in S_1^{n-1}(0)\}.$$

Множество А не пусто, поскольку $0 \in \mathrm{A}$. В окрестности точки x_0 функцию f аппроксимируем разностью двух выпуклых функций $\widetilde{h}(x_0, g) = \max_{v \in A}(v, g)$ и $L\|\mathrm{x} - \mathrm{x}_0\|$, $g = \|x - x_0\|$. Пару множеств $\left(\partial\widetilde{h}(x_0, 0), LB_1^n(0)\right)$ будем называть **квази-дифференциалом ГНВА**. **Необходимые (а при строгом включении и достаточные)** условия оптимальности в точке x_0 : $\mathrm{LB}_1^n(0) \subset \partial\widetilde{h}(x_0, 0)$. Также **формулируются** необходимые условия оптимальности функции f в точке на множестве, заданном в виде системы неравенств . Далее **определяются правила построения ГНВА** для суммы (разности), произведения, а также произвольной гладкой комбинации липшицевых функций.

Субдифференциал Кларка для МО

Вводится субдифференциал Кларка для произвольного локально липшицевого МО: $\rho_H(G(x_1),G(x_2)) \le L\|x_1 - x_2\|$ любых x_1, $x_2 \in R^n$, для чего первоначально **доказыва – ется,** что опорная функция $p_G(x,q)$ почти всюду (ПВ) имеет вторую частную производную p''_{xq}, и $\left\|p''_{xq}\right\| \le L$,на множестве $R^n \times B^m_1(0)$. **Рассмотрим множества**

$$\mathrm{M(x,q)} = \mathrm{co}\{\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n\times m}} \,|\, \exists(\xi_k, q_k) : A = \lim_k p''_{xq}(\xi_k, q_k), (\xi_k, q_k) \xrightarrow[k]{} (x,q)\}$$

и $M(x) = co \bigcup_{q\in S_1^{m-1}(0)} M(x,q).$ Аналогично функции Кларка вводится $\psi(x,g,q) = \overline{\lim\limits_{\alpha\to+0,u\to0,\Delta q\to0}} \dfrac{p_G(x+u+\alpha g, q+\Delta q) - p_G(x+u, q+\Delta q)}{\alpha}.$

Доказывается, что $\psi(x,g,q) = \max\limits_{A\in M(x)} (Ag,q).$ М(х) назовем **субдифференциалом Кларка** МО G в точке x, который обладает всеми свойствами последнего. **Находится субдифференциал Кларка** для МО $D_\alpha f(.)$. Для некоторых липшицевых МО матрицы p''_G можно **вычислить**, что и **делается для МО заданного в виде выпуклой оболочки конечного множества дифференцируемых**

Аппроксимация МО относительно другого МО

вектор- функций, **а также в виде системы неравенств**
$G(x)=\{y\in \mathrm{R}^m \mid h_i(x,y)\le 0 \forall i\in 1:I\}$, где *$h_i$(.,.)*- сильно выпуклая по у функция с непрерывными по х,у производными второго порядка $\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}$. Так для данного **МО *G(.)*** $p''_{xq}(x,q)=-\left(\frac{\partial^2 h_{i(q)}(x,y(x))}{\partial y^2}\right)^{-1}\frac{\partial^2 h_{i(q)}(x,y(x))}{\partial x \partial y}$, если индекс i(q), для которого $h_{i(q)}(x,y(x))=0$, единственный. Далее изучается аппроксимация липшицевого выпуклозначного (ВЗ) МО G(·) с помощью конуса возможных направлений

$$\gamma(x,g,v)=\{w\in \mathrm{R}^n \mid \exists \varepsilon_0>0: y+\alpha w\in G(x+\alpha g)\forall \alpha\in[0,\alpha_0]\}, \Gamma(x,g,v)=\bar{\gamma}(x,g,v),$$

конуса касательных направлений

$$\Gamma'(x,g,v)=\{w\in \mathrm{R}^n \mid \exists \alpha_0>0: y+\alpha w+o_1(\alpha)\in G(x+\alpha g+o_2(\alpha))\forall \alpha\in[0,\alpha_0]\},$$

а также конуса допустимых направлений (конус Булегана)

$$\widetilde{\Gamma}(x,g,v)=co\{w\in R^n \mid \exists\{\alpha_k\},\alpha_k\to_k +0, \frac{o_i(\alpha_k)}{\alpha_k}\to_k 0, i=1,2: \quad y+\alpha_k w+o_1(\alpha_k)\in$$
$$G(x+\alpha_k g+o_2(\alpha))\forall k$$

находится производная по направлению маргинальной функции. **Определяются правила построения конусов для суммы, объединения и пересечения МО**.

Вид конуса Булегана

Введено определение аппроксимации МО G относительно другого МО, например, относительно конуса допустимых направлений $\widetilde{\Gamma}(\cdot)$. **Показано, что если введенное ниже множество B(x,g,v) не пусто**, то МО G(·) **допускает аппроксимацию относительно** $\widetilde{\Gamma}(\cdot)$ в точке v϶G(x) по направлению g. В этом случае $\Gamma'(x,g,v) = \widetilde{\Gamma}(x,g,v) = B(x,g,v).$ Для произвольных v϶G(x), x,g ϵ R^n, **введем множество**

$$B(x,g,v) = \begin{cases} \{w \in \mathrm{R}^m \mid (w,q) \le \max_{A \in M(x,v)} (Ag,q) \forall q \in P(x,v)\}, \textit{если} \quad P(x,v) \ne \varnothing, \\ R^m, \textit{если} \quad P(x,v) = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{M}(x,v) = co\{A[m \times n] \,\Big|\, A = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i A(v_i), v = \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i v_i, \sum_{i=1}^{m+1} \beta_i = 1, \beta_i \ge 0, A(v_i) = \lim_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} \int_0^\alpha p''_{xq}(x_i(\tau), q_i(\tau)) \mathrm{d}\tau\},$$

$$\{v_i(\alpha)\} = R(x_{\mathrm{i}}(\alpha), q_i(\alpha)), (x_i(\alpha), q_i(\alpha)) \in \aleph(G)\},$$

$$x_i(\alpha) = x + \alpha g + o_i(\alpha), q_i(\alpha) \underset{\alpha \to +0}{\to} q, v_i(\alpha) \underset{\alpha \to +0}{\to} v_i, q \in P(x,v), o_i(\alpha)/\alpha \underset{\alpha \to +0}{\to} 0, \|q_i(\alpha) - q\|/\alpha \le c,$$

а также

$$R(x_i(\alpha), q_i(\alpha)) = \{y \in G(x_i(\alpha)) \,\Big|\, (y, q_i(\alpha)) = \max_{u \in G(x_i(\alpha))} (u, q_i(\alpha))\}, P(x,v) = \{q \in S_1^{m-1}(0) \,\Big|\, (v,q) = \max_{y \in G(x)} (y,q)\},$$

$\aleph(G)$ - всюду плотное множество в $R^n \times R^m$, где существуют $p''_{xq}(.,.)$. Здесь $r_i(a)=(x_i(a),q_i(a))$- кривые, вдоль которых

Вид конуса для частного случая задания МО

ПВ существуют матрицы $p''_{xq}(.,.)$ с предельными усредненными интегральными значениями при $\alpha \to +0$, c-некоторая константа. Для часто встречаемого случая задания МО G в виде системы неравенств при условиях, наложенных выше на функции $h_i(x,y)$ $i \in 1:I$, и $B(x,g,v) \neq \varnothing$ **имеем**

$$\widetilde{\Gamma}(x,g,y) = \begin{cases} \{w \in R^m \left| \begin{array}{l} (w,q) \leq \max_{i \in \hat{R}(x,y)} (-(\frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial y^2})^{-1} \frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial x \partial y} g, q) \\ \forall q \in P(x,y), \text{если} \quad P(x,y) \neq \varnothing\}, \end{array} \right. \\ R^m, \text{если} \quad P(x,y) = \varnothing, \end{cases}$$

где $\hat{R}(x,y) = \{i \in 1:I \,|\, h_i(x,y) = 0\}$. **Находится вид** производной по направлению маргинальной функции вида $f(x) = \max_{y \in G(x)} \varphi(x,y)$, где функция $\varphi(\cdot,\cdot)$ непрерывна вместе с производными $\varphi'_x(\cdot,\cdot), \varphi'_y(\cdot,\cdot)$ по совокупности переменных. Приведенная ниже формула для производной по направлению функции f получена *при более слабых условиях*, чем это делалось ранее.

Обозначим $R(x) = \{y \in G(x) \,|\, f(x) = \varphi(x,y)\}$. Если $B(x,g,v) \neq \varnothing$ для всех $v \in R(x)$, то функция f дифференцируема в точке x по направлению g и **верно равенство**

Производная по направлению маргинальной функции

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \max_{y\in R(x)} \max_{w\in\widetilde{\Gamma}(x,g,v)} [(\varphi'_x(x,y),g) + (\varphi'_y(x,y),w) =$$

$$= \max_{y\in R(x)} \max_{A(x,y)\in M(x,y)} [(\varphi'_x(x,y),g) + (\varphi'_y(x,y),A(x,y)g)]$$

Для МО G(.), заданного в виде системы неравенств, производную по направлению функции f(·) **можно записать в явном виде**: $\frac{\partial f(x)}{\partial g} = \max_{y\in R(x)} \max_{i\in\hat{R}(x,y)} [(\varphi'_x(x,y),g) + (A_i^*(x,y)\varphi'_y(x,y),g)],$ где $A_i(x,y) = -(\frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial y^2})^{-1} \frac{\partial^2 h_i(x,y)}{\partial x \partial y} \forall i \in \hat{R}(x,y)$.**Приводится метод** построения ГНВА маргинальной функции и вид ее субдифференциала Кларка через предельные значения матриц p''_{xq}(.,.). Определим множества

$$R(x,q) = \{y \in G(x) \big| p(x,q) = (y,q) = \max_{v\in G(x)}(v,q)\}, R(x) = \{y \in G(x) \big| f(x) = \varphi(x,y)\},$$

$$\mathrm{M}(x,y) = co\{A[m\times n] \Big| A(x,y,q) = \lim_{\substack{x_i\to x \\ \widetilde{q}_i\to q}} p''_{xq}(x_i,\widetilde{q}_i), \widetilde{q}_i = \varphi'_y(x_i,y_i)/\|\varphi'_y(x_i,y_i)\| + \mathrm{o}(\|\mathrm{x} - \mathrm{x_i}\|),$$

$$(x_i,\widetilde{q}_i) \in \aleph(G), y_i \in R(x_i,q_i), y_i \to y, y \in R(x)\}, \qquad M(x,y) = \{0_{m\times n}\}, если\, \varphi'_y(x,y) = 0.$$

Субдифференциал Кларка маргинальной функции

Субдифференциал Кларка маргинальной функции равен

$$\partial_{CL} f(x) = co\{\varphi'_x(x,y) + A^*(x,y,q)\varphi'_y(x,y) \big| A(x,y,q) \in \mathrm{M}(x,y), y \in R(x), q = \varphi'_y(x,y) / \|\varphi'_y(x,y)\| \; (\varphi'_y(x,y) \neq 0)\}, * - \textit{знак} \quad \textit{транспонирования}$$

В качестве применения **получен вид** второй ε-производной выпуклой коэрцитивной функции f по направлению g, и обсуждается, когда выполняется равенство $\frac{\partial^2{}_\varepsilon f(x)}{\partial g^2} \underset{\varepsilon \to +0}{\to} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial g^2}$. **Ищется направление наискорейшего спуска** функции $\Phi_\varepsilon(x) = \min\limits_{v \in \partial_\varepsilon f(x)} \|v\|^2$, которое может быть использовано в оптимизации.

Интегральные аппроксимации

Развивается новый нелокальный способ аппроксимации негладкой липшицевой функций f, в результате которого получаем дважды дифференцируемые функции, сохраняющие ε(D)- стационарные точки.

Возьмем произвольное выпуклое компактное множество $D \subset R^{n}$.Введем определение ε(D)-стационарной точки. Точку x_{ε} назовем ε(D)- стационарной точкой функции f, если множеству x_{ε} + D принадлежит стационарная точка функции f.

Если функция f - сильно выпуклая, то данное определение хорошо согласуется с определением ε-стационарной точкой.

Пусть $\varphi(x) = \dfrac{1}{\mu(D)} \int\limits_{D} f(x+z)dz$, где 0єint D, μ(D)-мера D. **Доказано**, что функция $\varphi(\cdot)$ имеет производную с константой Липшица L', зависящей от D. Если f- выпуклая, то и $\varphi(\cdot)$ - **выпуклая**. Все стационарные точки функции $\varphi(\cdot)$ **являются ε(D)-стационарными точками функции f**. Также определяется функция

$$\phi(x) = \frac{1}{\mu(D)} \int\limits_{D} \varphi(x+z)dz$$

Дифференциальные свойства интеграла Стеклова

Доказано, что функция ф имеет липшицевую матрицу вторых частных производных с константой Липшица, зависящей от диаметра d для шара и куба, как $1/d^2$. **Описан алгоритм оптимизации**, сходящийся к ε(2D)-стационарной точке выпуклой функции f со сверхлинейной скоростью.

Некорректные задачи теории управления

Рассматривается нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для оптимизации в R^n используются уравнения Пуассона и уравнение теплопроводности, для решений которых **применяется метод овыпукления**, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми или вогнутыми по управлению u и регуляризационному параметру α в окрестности точки глобального минимума по обоим переменным. Высказанная идея **упрощает проблему** регуляризации по параметру.

Некорректные задачи теории управления

Рассматривается нелокальный поисковый алгоритм нахождения глобального оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для оптимизации в R^n используются уравнения Пуассона и уравнение теплопроводности, для решений которых применяется **метод овыпукления**, позволяющий сделать решения этих уравнений выпуклыми или вогнутыми по управлению u и регуляризационному параметру α в окрестности точки глобального минимума по обоим переменным. Высказанная идея **упрощает проблему регуляризации по параметру** и позволяет строить устойчивые оптимизационные методы. Также предлагается **строить нижние выпуклые аппроксимации** для целевой функции в достаточно больших окрестностях фиксированных точек, что делает оптимизационный процесс более устойчивым к изменениям аргумента, а сам функционал -

Применение идеи овыпукления к решению некорректных задач теории управления

- **полунепрерывным снизу**, что важно для оптимизации в бесконечномерных пространствах. Одним из эффективных методов решения некорректных задач типа $J(u) \to \inf_{u \in U}$ является метод регуляризации. Так в качестве функции Тихонова для $u \in U \subset L_2[0, \mathrm{T}]$ из компактного множества U берется $\Phi(u) = J(u) + \alpha \vee_0^T u(t)$, где J(·) –оптимизируемый функционал. Задача минимизации Φ решается в конечномерном пространстве по переменным α, кусочно-постоянной вектор-функции u с использованием **методов глобальной оптимизации**, основанных на применении решения уравнения теплопроводности либо уравнения Пуассона с одновременным их *овыпуклением (метод овыпукления)* по z=(u, α). Метод овыпукления позволяет **строить регулярные, т.е. устойчивые методы оптимизации**.

Применение уравнений математической физики

Рассматривается видоизмененное уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi(z) = \overline{\Phi}^{\beta}(z)$$

$$\overline{\Phi}(z) = \begin{cases} \max(0, c - \Phi(z)) + 1, & z \in \Theta, \\ 0, & z \notin \Theta, \end{cases} \qquad c = \int\limits_{\Theta} \Phi(z) p(z) dz$$

где p(·)-плотность распределения случайного вектора z=(u,α), β>0 – малый параметр. Решение $\varphi(z)$ является гладкой дважды дифференцируемой функцией с матрицей вторых смешанных производных $\nabla^2\varphi(z)$. **Доказывается, что** для малых β>0 существует окрестность $B_\rho(z_0) \in \Theta$, в которой для некоторых констант $L_1(\beta,\rho,\Phi)$,$L_2(\beta,\rho,\Phi) > 0$ для функции $\varphi(\cdot)$, являющейся решением написанного выше уравнения Пуассона, **верно неравенство** $L_1(\beta,\rho,\Phi)\|g\|^2 \le (\nabla^2\varphi(z)g, g) \le L_2(\beta,\rho,\Phi)\|g\|^2$.

Также **изучается применение уравнения теплопроводности** для задач глобальной оптимизации следующего вида

$$\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t} = a^2\Delta\varphi(z,t), \;\; \varphi(z,0) = m_k\hat{\Phi}_k(z), \;\; z \in \Theta,$$

$$\hat{\Phi}_k(z) = \max(0, -c_k + \hat{\Phi}_{k-1}(z)), k > 1, \; \hat{\Phi}_0(z) = \Phi(z), \hat{\Phi}_1(z) = \max(0, c_1 - \Phi_0(z)),$$

Оценки для матриц решений уравнений математической физики

$c_k = \int\limits_{\Theta} \hat{\Phi}_{k-1}(\xi) p_{k-1}(\xi) d\xi,$ где $p_k(\cdot)$- плотность распределения случайного вектора $z \in \Theta$. **Доказано, что** для любого z_0 из области поиска Θ существуют окрестность $B_\rho(z_0) \in \Theta$, большие $m_k>0$, а также $M_1(\rho, t, m_k)$, $M_2(\rho, t, m_k) > 0$, что **верно неравенство** $M_1(\rho,t,m_k)\|g\|^2 \le \left|(\nabla^2 \varphi(z,t) g, g)\right| \le M_2(\rho,t,m_k)\|g\|^2$ для малых $t>0$, а также, когда $\frac{\|z_0 - \xi\|}{2a^2 t} << 1$ для $\xi \in B_\rho(z_0)$, матрица $\nabla^2{}_{zz}\varphi(\xi, t)$ есть отрицательно определенная.

Доказанные теоремы **дают правило овыпукления решения** уравнений Пуассона и теплопроводности, которое надо применять вблизи точки оптимума, что позволяет строить **методы оптимизации со сверхлинейной скоростью сходимости вблизи точки оптимума.** Когда находимся вдали от оптимальной точки, о чем можно судить по величине градиента, то применяем градиентный метод.

ПРВ функции

В оптимизации важную роль играют квазидифференцируемые функции, например, представимые в виде разности выпуклых (ПРВ) функции. **Даны необходимые и достаточные** условия представимости произвольной липшицевой функции в виде разности выпуклых функций. **Дана** также **геометрическая интерпретация** этих условий.

Пусть $\wp(D)$ – класс кривых на плоскости XOY в выпуклой открытой области D с компактным замыканием, ограничивающих выпуклые компактные множества. Параметризуем кривые $r \in \wp(D)$ естественным образом, т.е. параметр t точки M на кривой r равен длине кривой между M и начальной точкой. Обозначим такую кривую как r(t), t є$[0,T_r]$. С помощью кривых необходимые и достаточные условия представимости функции в виде разности выпуклых функций **могут быть записаны в следующем виде**.

Условия представимости функции в виде разности выпуклых

Для того, чтобы липшицевая функция $f: D \to R$ была представима в виде разности выпуклых функций, **необходимо и достаточно, чтобы** $(\exists c(D,f) > 0)(\forall r \in \wp(D)) \quad \vee(\Phi';0,T_r) < c(D,f),$ где $\Phi(t) = f(r(t))$ для $t \in [0,T_r]$. **Доказательство основано** на специальном **алгоритме** представления функции f в виде разности выпуклых функций. Как следствие, приходим к **следующему результату**: положительно однородная (п.о.) функция f степени 1 есть ПРВ тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $\vee(\Phi';0,2\pi) < \infty$, где Ф(t)=f(r(t)) для $t \in [0,2\pi]$, V-знак вариации производной Ф'.

Также **дана** геометрическая трактовка основного результата. Поворотом кривой $R(t) = (r(t), f(r(t)))$, $r \in \wp(D)$, на многообразии $\Gamma_f = \{(x,y,z) \in R^3 \,|\, z = f(x,y)\}$ назовем величину $\sup_{\{t_i\} \subset N_r} \sum_i \left\| \tau(t_i)/\|\tau(t_i)\| - \tau(t_{i-1})/\|\tau(t_{i-1})\| \right\| = \mathrm{O}_r$, где $\tau(t) = R'(t)$ касательная к кривой R(t) в точках, где она существует.

Получен следующий результат.

Геометрическая трактовка теоремы о ПРВ функциях

Для того, чтобы произвольная липшицевая функция f была ПРВ на D, **необходимо и достаточно, чтобы** для всех $r \in \wp(D)$ **существовала константа** $c_2(D,f)>0$ такая, что **поворот кривой** R(t) на Γ_f **ограничен сверху константой** $c_2(D,f)$, т.е.

$\mathrm{O}_r \le c_2(D,f) \quad \forall r \in \wp(D)$.

Экзостеры

Дается правило построения исчерпывающего множества верхних выпуклых аппроксимаций (в.в.а.) для произвольной липшицевой дифференцируемой по направлениям функции f, которые в совокупности образуют экзостер. В терминах экзостеров формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности в точке. Введем обозначение $\mathrm{h(g)} = \mathrm{F}(\mathrm{x}_0, g) = \limsup\limits_{\alpha \to +0} (f(x_0+\alpha g) - f(x_0))/\alpha$. Функция h_λ называется в.в.а. функции f в точке x_0 , если 1) h_λ (g) ≥F(x_0,g) $\forall \mathrm{g} \in R^n$,2)$h_\lambda$ - выпуклая конечная положительно однородная(п.о) функция. Если рассматривать достаточное количество в.в.а., то можно сформулировать и достаточные условия оптимальности.

Построение экзостеров

По определению исчерпывающим множеством функции f в точке x_0 называется такое множество в.в.а. h_λ, для которого $\inf_{\lambda\in\Lambda^*} h_\lambda(g)=F(x_0,g) \quad \forall g\in R^n$. Для построения экзостера для функции f в точке x достаточно определить множество $E^*=\{C\subset R^n \mid C=C(h_\lambda)=\partial h_\lambda(0)$ $\lambda\in\Lambda^*\}$. Множество E*=E*(f) называется верхним экзостером функции f в точке x_0. Если существует множество Λ_*, для которого выполнено равенство $\sup_{\lambda\in\Lambda_*} h_\lambda(g)=F(x_0,g) \quad \forall g\in R^n$, называется нижним экзостером функции f в точке x. Пара E=[E*,E*] называется биэкзостером. **Построение** множества E* осуществляется вначале для функции $\tilde{f}(x)=f(x)+L\|x-x_0\|$. Для любого вектора $v\in E_g(\tilde{f})=co\{v\in R^n \mid \exists\{\alpha_k\},\alpha_k\to+0,(\exists r(x,\cdot,g)\in\eta(x)),v=\lim_{\alpha_k\to+0}\alpha_k^{-1}\int_0^{\alpha_k}\nabla\tilde{f}(r(x,\tau,g))d\tau\}$ **определим** $C_g(\tilde{f})=D\tilde{f}(x)\cap P_g(v)$, где $P_g(v)=\{w\in R^n \mid (w,g)\le(v,g)\}$. **Доказывается**, что ограниченное в совокупности семейство выпуклых компактных множеств С, включающих $C_g(\tilde{f})$ для всех $g\in S^{n-1}_1(0)$ **образует верхний экзостер** $E^*(\tilde{f})$, т.е. **верно равенство** $\tilde{h}(g)=\inf_{C\in E^*(\tilde{f})}\tilde{h}_C(g)$, где $\tilde{h}_C(g)=\max_{v\in C}(v,g)$. Тогда **верхний экзостер** E*(f)

Необходимые и достаточные условия минимума и максимума

определяется равенством $E^*(f)=\{w+C \mid w\in LB_1^n(0), C\in E^*(\widetilde{f})\}$.Для построения нижнего экзостера E*(f) определим функцию $\bar{h}(g)=h(g)-L\|g\|$.

Доказывается,что $E_*(f)=\{w+C \mid w\in LB_1^n(0), C\in -E^*(-\bar{h})\}$. Если функция f достигает минимума на R^n в точке x и известен верхний экзостер E*(f)в этой точке, то необходимое условие безусловного минимума $0\in C \quad \forall C\in E^*(f)$.Если найдется δ>0, что $B_\delta \subset C \quad \forall C\in E^*(f)$, где $B_\delta=\{x\in R^n \,\|\, \|x\|<\delta\}$,то x -точка строгого локального минимума. Аналогичные условия можно сформулировать для точки максимума, используя нижний экзостер.

Субдифференциалы первого и второго порядка

Дается правило построения с помощью интеграла Стеклова субдифференциалов **первого и второго** порядков, состоящих соответственно из обобщенных градиентов и обобщенных матриц вторых частных производных липшицевой функции. При этом, как **доказывается**, субдифференциал первого порядка, построенный с помощью этого метода, **совпадает** с субдифференциалом Df(x), построенным с помощью преде-

МО, используемые при построении

льных усредненных интегралов от градиентов функции, вычисленных вдоль кривых из *η(x).* Для случая, **когда функция дифференцируема или дважды дифференцируема** в точке, **субдифференциалы первого и второго порядков** состоят соответственно из **градиента и матрицы вторых частных** производных в этой точке. Обобщенные градиенты и матрицы вторых частных производных **используются для** формулировки необходимых и достаточных условий оптимальности первого и второго порядков, на основе которых можно строить оптимизационные методы. **Рассмотрим МО** D(·), удовлетворяющее следующим условиям:1) x_0 є (x + D(x)) для всех x є S, S єR^n-окрестность точки x_0; 2) диаметр множества D(x), который обозначим через diam D(x) = d(D(x)), стремится к нулю при $x \to x_0$, и удовлетворяет неравенству $d(D(x)) \le k\ |x - x_0|$ для некоторой константы k;3) для некоторой последователь-Нос ти ε_i , $\varepsilon_i \to +0$, при $i \to \infty$, МО D(·) постоянно для x из множества $\varepsilon_{2i+1} < |x - x_0| < \varepsilon_{2i}$; 4) граница множества D(x) для всех

Интегралы Стеклова и субдифференциалы

$x \in S$, $x \neq x_0$, задается дважды непрерывно дифференцируемыми функциями от x, $0 \in \operatorname{int} D(x)$, $\mu(D(x))>0$. Мы будем рассматривать МО $D(\cdot)$, удовлетворяющее данным условиям для произвольных последовательностей ε_i , $\varepsilon_i \to +0$, при $i \to \infty$, и константы k. Определенное семейство МО обозначим через Ξ.Ранее **было доказано**, что для постоянного МО $D(\cdot)$ функция $\varphi(x) = \frac{1}{\mu(D(x))} \int\limits_{D(x)} f(x+z)dz$ имеет липшицевую производную. Для МО $D(\cdot)$ и функции $\varphi(x)$ определим множество $\partial\varphi_{\mathrm{D}}(x_0) = co\{v \in R^n \mid \mathrm{v} = \lim\limits_{x_i \to x_0} \varphi'(x_i)\}$,где точки x_i берутся из областей постоянства МО $D(\cdot) \in \Xi$. **Определим** МО $\Phi f(\cdot)$ с образами $\Phi f(x_0) = co \bigcup\limits_{D(\cdot)\in\Xi} \partial\varphi_D(x_0)$. **Множество $\Phi f(x_0)$ назовем** субдифференциалом первого порядка функции f в точке x_0. **Доказано**, что если f дифференцируема в точке x_0 ,то $\Phi f(x_0) = f'(x_0)$. В общем случае **доказано равенство** $\Phi f(x_0) = Df(x_0)$. Для построения субдифференциала второго порядка используем функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{\mu(D(x))} \int\limits_{D(x)} \varphi(x+z)dz \quad .$$

Субдифференциал второго порядка

Определим множество $\partial\psi_{\mathrm{D}}(x_0) = co\{v \in R^n \mid \mathrm{v} = \lim\limits_{x_i \to x_0} \psi'(x_i)\}$, где точки x_i берутся из областей постоянства МО D(·)єΞ. Введем МО Ψf(·) с образами $\Psi f(x_0) = co \bigcup\limits_{D(\cdot)\in\Xi} \partial\psi_D(x_0)$. **Доказано**, что $\Psi f(x_0) = Df(x_0)$. **Введем множество матриц** $\partial^2\psi_{\mathrm{D}}(x_0) = co\{\mathrm{A} \in R^{n\times n} \mid \mathrm{A} = \lim\limits_{x_i \to x_0} \psi''(x_i)\}$, где точки x_i принадлежат областям постоянства МО D(·)єΞ. **Доказывается**, что $\partial^2\psi_{\mathrm{D}}(x_0)$ - выпуклое замкнутое множество. Определим МО $\Psi^2 f(\cdot)$ с образами $\Psi^2 f(x_0) = co \bigcup\limits_{D(\cdot)\in\Xi} \partial^2\psi_D(x_0)$. **Доказано**, что для дважды дифференцируемой в точке x_0 функции f, $\Psi^2 f(x_0) = \{f''(x_0)\}$. Одно из **достаточных условий** оптимальности может быть **сформулировано следующим образом**: если в x_0 выполняются необходимые условия минимума и для всех подозрительных на экстремум направлений g существует $\beta(g)>0$, что верно неравенство $(\mathrm{Ag}, \mathrm{g}) \geq \beta(\mathrm{g})\|\mathrm{g}\|^2$ для всех $A \in \Psi^2 f(x_0)$, то x_0 – точка минимума f.

Приводятся **примеры** построения множества $\Psi^2 f(x_0)$ и применения его в оптимизации.