

<http://mbiomorph67.ru/N-86-html/cont.htm>
<http://mbiomorph67.ru/N-86-html/TITL-86.htm>
<http://mbiomorph67.ru/>

<http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-86-html/cont.htm>
<http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-86-html/TITL-86.htm>
<http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/TITL.HTM>

УДК 519.6-519.83-519.86

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИИ
ВНУТРЕННЕГО ПРОСВЕТА И ТОПОЛОГИИ КРОВЕНОСНЫХ
МИКРОСОСУДИСТЫХ СЕТЕЙ И ФЕНОМЕН
ПСЕВДОСВЕРХТЕКУЧЕСТИ КРОВИ В ПРЕДЕЛЬНОМ СМЫСЛЕ
СООБЩЕНИЕ I. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ПРАВИЛ РУ (W. ROUX)**

© 2025 г. Парфёнова В. С.

Научный руководитель – Глотов В. А., д.м.н., профессор, заведующий кафедрой анатомии человека
ФБГОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет» Минздрава России.

По каким именно принципам происходит ветвление и разрастание сетей кровеносных сосудов является важным вопросом для понимания способа функционирования и развития кровеносной системы любого живого существа. Эту тему немецкий ученый Вильгельм Ру (W. Roux) освятил в своей диссертации, описав взаимосвязь между углом и диаметром разветвляющихся кровеносных сосудов, а также изложил перечень правил, по которым происходит ветвление кровеносных сосудов относительно параметров диаметров внутренних просветов сосудов и углов между осями этих сосудов. С помощью уравнений выведенных Мюрреем, а также универсальной системы уравнений (Глотов В. А.), мы с помощью математического анализа можем убедиться в истинности Правил Ру.

Ключевые слова: Правила Ру, Вильгельм Ру, W. Roux, кровеносные сосудистые сети.

1. Историческая справка. Кто такой Ру W.Roux?



Wilhelm Roux (9.06.1850 – 15.09.1924)

Происходил из гугенотской семьи, отец Фридрих Август Вильгельм Людвиг Ру служил преподавателем фехтования в Йене. Изучал медицину в Йенском, Берлинском и Страсбургском университетах. Вильгельм Ру является одним из основоположников эмбриологии, он изучал процессы дифференцировки клеток посредством наблюдения за «поведением» красного костного мозга, помещенного в изотонический раствор хлорида натрия. В 1878 году, за диссертацию «Ueber die Verzweigungen der Blutgefäße», получил степень доктора медицины. С 1878 года состоял ассистентом в Лейпцигском университете, с 1879 года – в Бреслаульском университете. С 1880 года – приват-доцент анатомии, с 1886 года – экстраординарный профессор. В 1889 году приглашён ординарным профессором анатомии в Инсбрукский университет, а в 1895 году – в Галльский университет, где для него специально был создан институт эмбриологии и механики развития. В 1894 году основал журнал «Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen», получивший имя Ру после его смерти («W. Roux Archiv...»). Вышел в отставку в 1921 году.

Достижения учёного: изучал функциональное приспособление, обратил внимание на борьбу за существование между отдельными клетками организма как основу физиологического приспособления, что дополнило теорию Дарвина; исследовал динамику развития, зависимость положения срединной продольной плоскости зародыша от направления, в котором происходит соединение женского и мужского ядер в яйце; изучал методы получения половинных зародышей; отстаивал так называемую мозаичную теорию развития; установил принцип культивирования тканей, извлёк часть костного мозга из куриного эмбриона и показал его жизнеспособность в тёплом физрастворе в течение нескольких дней; исследовал взаимно притягательное действие отдельных клеток раздробившегося яйца, названное им цитотропизмом, имеющее значение, по мнению Ру, для распределения клеток в теле зародыша; в своей докторской диссертации описал взаимосвязь между углом и диаметром разветвляющихся кровеносных сосудов, а также изложил перечень правил, по которым происходит ветвление кровеносных сосудов относительно параметров диаметров внутренних просветов сосудов и углов между осями этих сосудов.

1.1. Оригинальная формулировка Правил Ру

«Правило II d: отклонение артериального ствола от своего начального направления незначительно по сравнению с отклонением ветви...

Правило III: величина отклонения, которую артериальный ствол испытывает в правиле II, растёт с относительной силой ветви...

Правило IV: величина отклонения, которую артериальный ствол испытывает в правиле II, растёт с абсолютной величиной отклонения ветви от исходного направления ствола...

...Правило VI: если ствол разделяется на две равные ветви, то обе ветви образуют равные углы с направлением ствола...

...Правило XI: тонкие ветви аорты *a. brachialis*, *a. femoralis*, венечных артерий, при отхождении которых продолжение ствола не отклоняется, отходят чаще под углом более 70° ...

Правило XII: толстые ветви, при отхождении которых продолжение ствола значительно отклоняется, отходят чаще под углом менее 70° ...»

2. Терминологическая справка

2.1. Трекер – это круглая цилиндрическая трубка без ответвлений, которая соединяет два соседних узла.

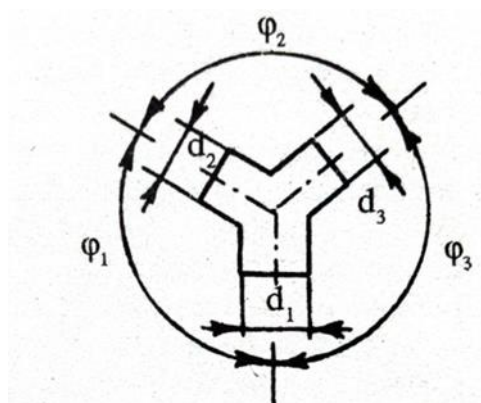
2.2. Узел – это соединение или стык трёх сосудов в области разветвления и прилегающие к ним начальные участки.

2.3. d_i – диаметр внутреннего просвета сосуда, $i=1, 2, 3$.

2.4. ϕ_i – угол между осями сосудов, $i=1, 2, 3$.

2.5. η_i – коэффициент динамической вязкости крови в сосудах, $i=1, 2, 3$.

2.6. Правила индексации



I. Если все три сосуда в бифуркации имеют разные диаметры, то параметру d_i большего сосуда присваивают индекс $i=1$, параметрам d_i следующих по ходу часовой стрелки сосудов присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.

II. Если два из трех сосудов имеют равные диаметры, до диаметру d_i третьего сосуда присваивают индекс $i=1$, параметрам d_i следующих по ходу часовой стрелки сосудов присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.

III. Параметру угла ϕ_i между осями сосудов с параметрами d_1 и d_2 присваивают индекс $i=1$, параметрам ϕ_i следующих по ходу часовой стрелки углов присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.

2.7. Переформулировка Правил Ру (W. Roux)

Правило II d.: угол ϕ_1 , значительно превышает угол ϕ_3 ;

Правило III: Чем больше значение d_3 , тем меньше угол ϕ_1 ;

Правило IV: Чем меньше угол ϕ_3 , тем больше угол ϕ_1 ;

Правило VI: Если значения d_2 и d_3 равны, то углы ϕ_1 и ϕ_3 также будут равны.

3. Цель исследования: Аналитическая проверка Правил Ру (W. Roux)

3.1. Задачи исследования

3.1.1. Подтвердить правильность уравнений универсальной математической модели [8].

3.1.2. Подтвердить отсутствие влияния направления тока крови в микрососудистых узлах на «схождение».

3.1.3. Нахождение зависимости параметров углов между осями трекеров и диаметрами внутренних просветов трекеров.

3.1.4. Проследить соответствие математически полученных зависимостей между параметрами углов между осями трекеров и диаметрами их внутренних просветов с зависимостями, описываемыми в правилах Ру.

3.1.5. Проверка уравнений Мюррея.

4. Объект и методы исследования

4.1. Объект исследования: Узлы и трекеры кровеносных сосудистых сетей.

4.2. Методы исследования: Математическое моделирование с применением математического аппарата: алгебры, тригонометрии, аналитической геометрии, теории симметрии, электронных таблиц Excel.

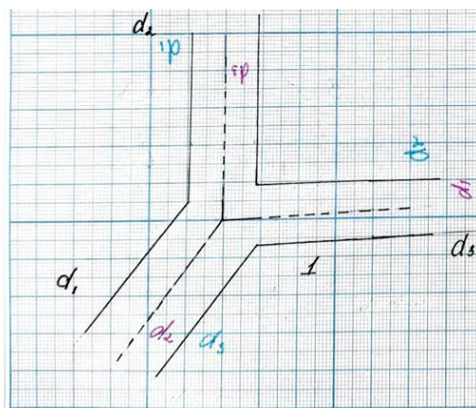
5. Материалы собственных исследований

5.1. Проверка уравнений универсальной математической модели [8]

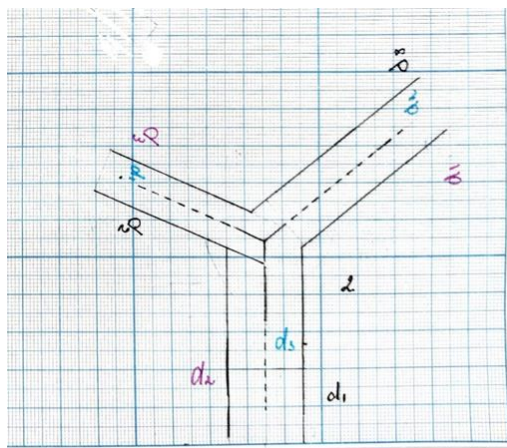
Предположим, что направление крови не влияет на «схождение».

Проверим данное предположение на нескольких моделях микрососудистых узлов. Для этого изобразим микрососудистый узел на миллиметровой бумаге, проведем измерения параметров углов между осями трекерами и диаметров просветов этих трекеров. Для каждого узла произведем 2 переиндексации, опираясь на правила индексации. Значения синусов углов найдем по таблице Брадиса.

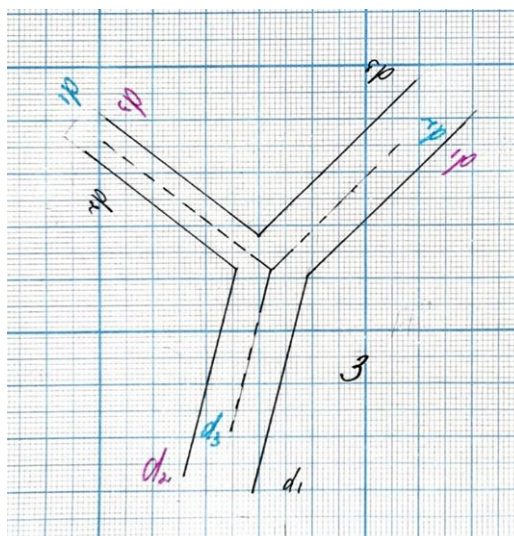
УЗЕЛ №1



УЗЕЛ №2



УЗЕЛ №3



Расчет проводим по формулам (8), (9) с. 66:

$$\begin{aligned} \eta_3^2 d_3^4 - \eta_1^2 d_1^4 - \eta_2^2 d_2^4 - 2\eta_1 \eta_2 d_1^2 d_2^2 \cos \varphi_1 &= 0 \\ \eta_1^2 d_1^4 - \eta_2^2 d_2^4 - \eta_3^2 d_3^4 - 2\eta_2 \eta_3 d_2^2 d_3^2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ \eta_2^2 d_2^4 - \eta_1^2 d_1^4 - \eta_3^2 d_3^4 - 2\eta_1 \eta_3 d_1^2 d_3^2 \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

η_1 ;

$$\eta_2 = \frac{d_1^2 \sin \varphi_3}{d_2^2 \sin \varphi_2} \eta_1;$$

$$\eta_3 = \frac{d_1^2 \sin \varphi_1}{d_3^2 \sin \varphi_2} \eta_1,$$

Полученные данные заносим в таблицу. Для удобства помечаем параметры, относящиеся к одним и тем же трекерам одним цветом.

Микрососудистый узел №1								
Индексация 1								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
22	18	14	0,6018	0,9986	0,766	5	5,73	7,44
Индексация 2								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
18	14	22	0,9986	0,766	0,6018	5,73	7,44	5
Индексация 3								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
14	22	18	0,766	0,6018	0,9986	7,44	5	5,73
Микрососудистый узел №2								
Индексация 1								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
20	12	16	0,9135	0,8829	0,788	5	12,4	8,08
Индексация 2								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
12	16	20	0,8829	0,788	0,9135	12,4	8,08	5
Индексация 3								

d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
16	20	12	0,788	0,9135	0,8829	8,08	5	12,4
Микрососудистый узел № 3								
Индексация 1								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
14	8	12	0,9703	0,9925	0,515	5	7,95	6,65
Индексация 2								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
8	12	14	0,9925	0,515	0,9703	7,95	6,65	5
Индексация 3								
d1	d2	d3	sin(f1)	sin(f2)	sin(f3)	n1	n2	n3
12	14	8	0,515	0,9703	0,9925	6,65	5	7,95

В таблицу заносим известные нам параметры $d_i(\mu)$ и $\phi_i(\text{градусы})$ всех трех индексаций каждого узла. Значение η_1 (усл. ед.) для первой индексации мы также задаем самостоятельно. Для расчета η_2 нам необходимо формулу из математической модели преобразовать в следующий вид:

$$f_x = A4^2 / B4^2 * F4 / E4 * G4$$

где A4 - d_1 ; B4 - d_2 ; F4 - $\sin(\phi_3)$; E4 - $\sin(\phi_2)$; G4 - η_1 . (Индексы параметров и имена ячеек представлены для конкретного случая расчета η_2 для микрососудистого узла №1, индексации 1).

Для расчета η_3 нам необходимо аналогично преобразовать формулу, чтобы она приняла следующий вид:

$$f_x = A4^2 / C4^2 * D4 / E4 * G4$$

где A4 - d_1 ; C4 - d_3 ; D4 - $\sin(\phi_1)$; E4 - $\sin(\phi_2)$; G4 - η_1 . (Индексы параметров и имена ячеек представлены для конкретного случая расчета η_3 для микрососудистого узла №1, индексации 1).

Для расчетов η_2 и η_3 для индексации 2 и 3 используем подобные формулы. В качестве значений η_1 в индексации 2 и в индексации 3, берем значения η_2 и η_3 из индексации 1 соответственно, так как при переиндексации эти значения будут равны.

С расчетами микрососудистых узлов №2 и №3 выполняем аналогичные действия.

Получив при расчетах одинаковые значения коэффициента динамической вязкости в одних и тех же трекерах при переиндексациях в трёх разных микрососудистых узлах, можем сделать вывод:

- при практической проверке подтвердили правильность формул (8), (9) с. 66
- в отдельных микрососудистых узлах направление крови не влияет на «схождение»
- подтвердили корректность Правил Индексации

5.2. Проверка Правил Ру

5.2.1. Формулировка Правил Ру

Правило II_d: Отклонение артериального ствола от своего начального направления незначительно по сравнению с отклонением ветви...

Правило III: Величина отклонения, которую артериальный ствол испытывает в правиле II, растет с относительной силой ветви...

Правило IV: Величина отклонения, которую артериальный ствол испытывает в правиле II, растет с абсолютной величиной отклонения ветви от исходного направления ствола...

...Правило VI: Если ствол разделяется на две равные ветви, то обе ветви образуют равные углы с направлением ствола...

Переформулировка Правил Ру в соответствии с Правилами Индексации

Правило II d: угол ϕ_1 , значительно превышает угол ϕ_3 ;

Правило III: чем больше значение d_3 , тем меньше угол ϕ_1 ;

Правило IV: чем меньше угол ϕ_3 , тем больше угол ϕ_1 ;

Правило VI: если значения d_2 и d_3 равны, то углы ϕ_1 и ϕ_3 также будут равны.

5.2.2. Система уравнений Мюррея

$$d_3^4 - d_1^4 - d_2^4 - 2d_1^2 d_2^2 \cos\phi_1 = 0,$$

$$d_1^4 - d_2^4 - d_3^4 - 2d_2^2 d_3^2 \cos\varphi_2 = 0,$$

$$d_2^4 - d_1^4 - d_3^4 - 2d_1^2 d_3^2 \cos\varphi_3 = 0.$$

5.2.3. Правила индексации:

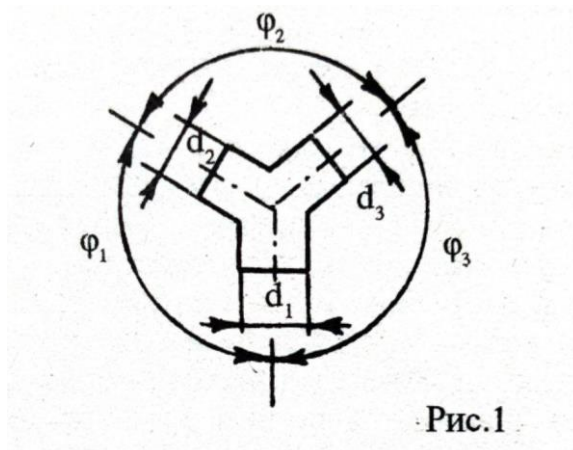


Рис.1

1. Если все три трекера в узле имеют разные диаметры, то параметру d_i большего трекера присваивают индекс $i=1$, параметрам d_i следующих по ходу часовой стрелки трекеров присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.
2. Если два из трех трекеров имеют равные диаметры, то параметру d_i третьего трекера присваивают индекс $i=1$, параметрам d_i следующих по ходу часовой стрелки трекеров присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.
3. Параметру угла φ_i между осями трекеров с параметрами d_1 и d_2 присваивают индекс $i=1$, параметрам φ_i следующих по ходу часовой стрелки углов присваивают соответственно индексы $i=2$ и $i=3$.

5.2.4. Общая система уравнений (универсальная математическая модель [8])

$$\begin{aligned} \eta_3^2 d_3^4 - \eta_1^2 d_1^4 - \eta_2^2 d_2^4 - 2\eta_1 \eta_2 d_1^2 d_2^2 \cos\varphi_1 &= 0 \\ \eta_1^2 d_1^4 - \eta_2^2 d_2^4 - \eta_3^2 d_3^4 - 2\eta_2 \eta_3 d_2^2 d_3^2 \cos\varphi_2 &= 0 \\ \eta_2^2 d_2^4 - \eta_1^2 d_1^4 - \eta_3^2 d_3^4 - 2\eta_1 \eta_3 d_1^2 d_3^2 \cos\varphi_3 &= 0. \end{aligned}$$

5.2.5. Решение системы уравнений (универсальной математической модели [8]) по отношению к параметру коэффициента динамической вязкости крови

$$\eta_1;$$

$$\eta_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \eta_1;$$

$$\eta_3 = \frac{d_1^2}{d_3^2} \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \eta_1,$$

5.2.6. Условия перехода системы уравнений (универсальная математическая модель [8]) в систему уравнений Мюррея

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$$

5.2.7. Проверка Правил Ру

Для подтверждения Правил Ру, используем формулы для нахождения коэффициента динамической вязкости крови (универсальная математическая модель [8]), при условии, что все трекеры в узлах имеют диаметр внутреннего просвета больше 100 мкм. Как мы знаем в трекерах с диаметром свыше 100 мкм кровь ведет себя как Ньютоновская жидкость и значения коэффициента динамической вязкости крови во всех трех трекерах каждого узла будут одинаковы, а значит мы можем приравнять коэффициенты динамической вязкости крови в формулах и получить следующие уравнения:

$$\varphi_1 = \arcsin \left(\frac{d_3^2}{d_1^2} \cdot \sin \varphi_2 \right)$$

$$\varphi_2 = \arcsin \left(\frac{d_1^2}{d_3^2} \cdot \sin \varphi_1 \right)$$

$$\varphi_3 = \arcsin \left(\frac{d_2^2}{d_3^2} \cdot \sin \varphi_1 \right)$$

5.2.7.1. Рассчитаем значения углов с помощью каждого уравнения

Уравнение 1

$$\varphi_1 = \arcsin \left(\frac{d_3^2}{d_1^2} \cdot \sin \varphi_2 \right)$$

Для достоверной проверки с помощью данного уравнения должны соблюдаться следующие условия:

$$d_1 = \text{const} > 100 \mu$$

$$d_3 > 100 \mu$$

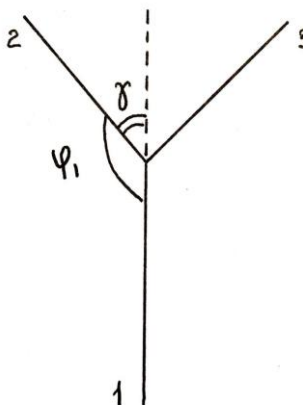
$$d_1 > d_3$$

$$\varphi_2 = \text{const}, 0 < \varphi_2 < \pi$$

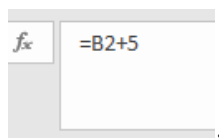
$$\pi/2 < \varphi_1 < \pi$$

d1	d3	f2(град)	f1'(град)	f3'(град)	γ(град)
250	100	65	171,66	123,34	8,34
250	105	65	170,8	124,2	9,2
250	110	65	169,89	125,11	10,11
250	115	65	168,94	126,06	11,06
250	120	65	167,95	127,05	12,05
250	125	65	166,9	128,1	13,1
250	130	65	165,81	129,19	14,19
250	135	65	164,68	130,32	15,32
250	140	65	163,49	131,51	16,51
250	145	65	162,25	132,75	17,75
250	150	65	160,96	134,04	19,04
250	155	65	159,61	135,39	20,39
250	160	65	158,21	136,79	21,79
250	165	65	156,75	138,25	23,25
250	170	65	155,22	139,78	24,78
250	175	65	153,63	141,37	26,37
250	180	65	151,98	143,02	28,02
250	185	65	150,24	144,76	29,76
250	190	65	148,43	146,57	31,57
250	195	65	146,54	148,46	33,46
250	200	65	144,55	150,45	35,45

При расчетах $\arcsin$ мы получаем значения двух разных, дополняющих друг друга углов, острого и тупого, в сумме дающих π . Значения острого угла соответствуют углу γ , а значения тупого угла соответствуют искомому нами углу ϕ_1 .

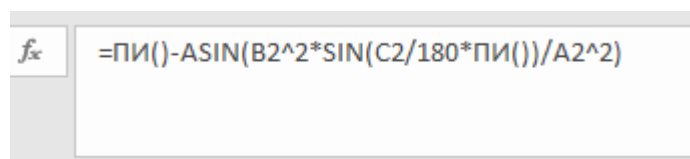


В таблицу заносим известные нам значения параметров $d_1(\mu)$, $d_3(\mu)$ и ϕ_2 (градусы), изменяется с шагом 5μ по формуле:



B2 – значение d_3 .

Чтобы рассчитать изменение значения необходимо преобразовать полученное нами уравнение в следующий вид:

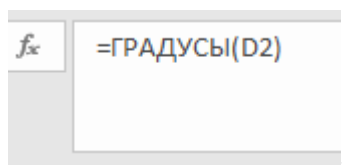


где B2 - d_3 ; C2 - ϕ_2 ; A2 - d_1 .

Таким образом мы получаем значение угла в радианах (для расчета в радианах значение угла в градусах, для которого необходимо найти синус делится на 180 и умножается на π).

Разность π и $\arcsin$ производится для нахождения $\arcsin$ тупого угла. Значения острого угла не подчиняются нашим условиям ($\pi/2 < \phi_1 < \pi$).

Для того чтобы вычислить значения в градусах в соседней ячейке вводим функцию:

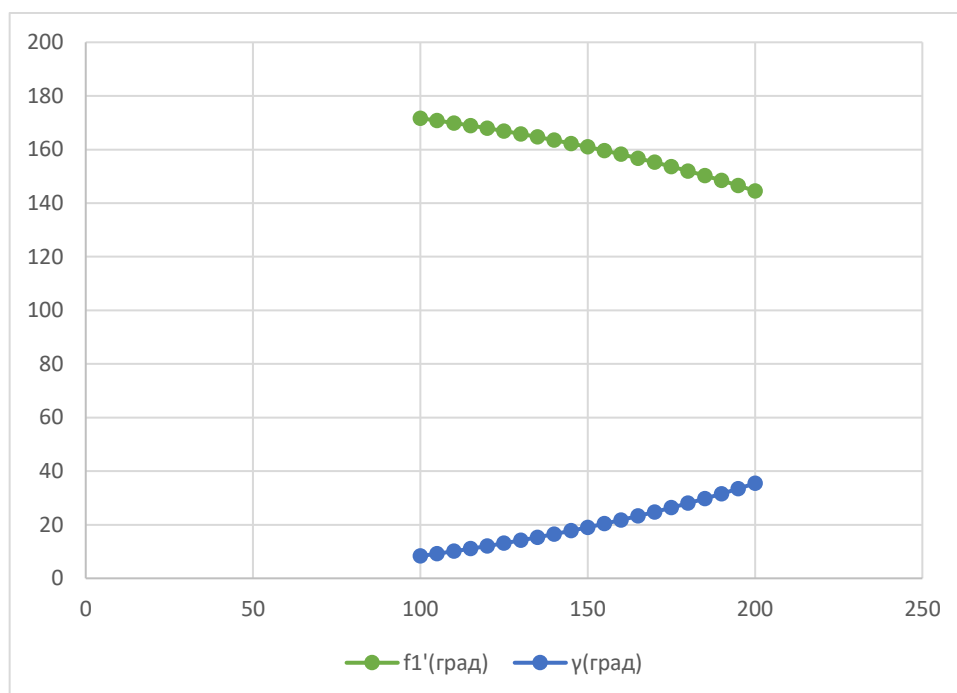


где D2 - ϕ_2 (радианы). (Имена ячеек представлены для конкретного случая расчета ϕ_1).

Чтобы наглядно проследить зависимость ϕ_1 от d_3 построим кривую на графике, где:

По оси x – значения d_3 , в мкм

По оси y – значения углов, в градусах



Зеленым цветом – график зависимости угла ϕ_1 от d_3 ,

Синим цветом – график зависимости γ от d_3 .

По полученным данным можем заметить, что ϕ_1 находится в обратной зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_1 уменьшается; это соответствует переформулировке Правил Ру с использованием правил индексации: чем больше значение d_3 , тем больше значение ϕ_1 . В свою очередь γ находится в прямой зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , γ увеличивается; это соответствует правилам Ру: величина отклонения, которую испытывает материнский ствол растет с относительной силой ветви.

Уравнение 2

$$\varphi_2 = \arcsin \left(\frac{d_1^2}{d_3^2} \cdot \sin \varphi_1 \right)$$

Для достоверной проверки с помощью данного уравнения должны соблюдаться следующие условия:

$$d_1 = \text{const} > 100 \mu$$

$$d_3 > 100 \mu$$

$$d_1 > d_3$$

$$\phi_1 = \text{const}, \pi/2 < \phi_1 < \pi$$

$$0 < \phi_2 < \pi$$

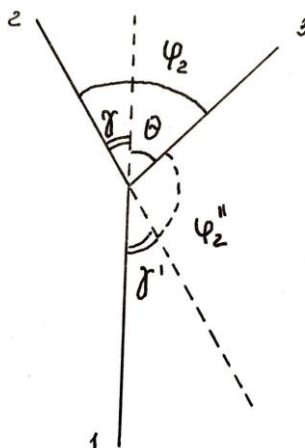
d1	d3	f1(град)	f2(град)	f3(град)	f'(град)	γ(град)	Θ(град)
250	100	175	33,01	151,99	146,99	5	28,01
250	105	175	29,61	155,39	150,39	5	24,61
250	110	175	26,76	158,24	153,24	5	21,76
250	115	175	24,32	160,68	155,68	5	19,32
250	120	175	22,23	162,77	157,77	5	17,23
250	125	175	20,4	164,6	159,6	5	15,4
250	130	175	18,8	166,2	161,2	5	13,8
250	135	175	17,39	167,61	162,61	5	12,39
250	140	175	16,14	168,86	163,86	5	11,14
250	145	175	15,02	169,98	164,98	5	10,02
250	150	175	14,01	170,99	165,99	5	9,01
250	155	175	13,1	171,9	166,9	5	8,1
250	160	175	12,29	172,71	167,71	5	7,29
250	165	175	11,54	173,46	168,46	5	6,54
250	170	175	10,86	174,14	169,14	5	5,86
250	175	175	10,25	174,75	169,75	5	5,25
250	180	175	9,68	175,32	170,32	5	4,68
250	185	175	9,16	175,84	170,84	5	4,16
250	190	175	8,68	176,32	171,32	5	3,68
250	195	175	8,24	176,76	171,76	5	3,24
250	200	175	7,83	177,17	172,17	5	2,83

При расчетах $\arcsin$ мы получаем значения двух разных углов, острого и тупого, в сумме дающих π . Значения острого угла соответствуют искомому нами углу ϕ_2 , а значения тупого угла соответствуют углу ϕ_2'' .

Условно продлим ось трекера 2. Получаем угол γ' между осью материнского ствола (трекер 1) и осью продолжения трекера 2, этот угол является смежным с углом γ и имеет такую же градусную меру.

Углом ϕ_2'' будет являться угол между осями трекера 3 и продолжения трекера 2.

Исходя из условия, что сумма всех $\phi_i = 2\pi$, найдем ϕ_3 и ϕ_3''



В таблицу заносим известные нам значения параметров $d_1(\mu)$, $d_3(\mu)$ и ϕ_1 (градусы), d изменяется с шагом 5μ по формуле, подобной формуле из расчетов по Уравнению 1.

Преобразовываем полученное нами уравнение в следующий вид:

$$f_x = \text{=ASIN}(J2^2 * \text{SIN}(L2/180 * \text{ПИ}()) / K2^2)$$

где $J2$ - d_1 ; $L2$ - ϕ_1 ; $K2$ - d_3 .

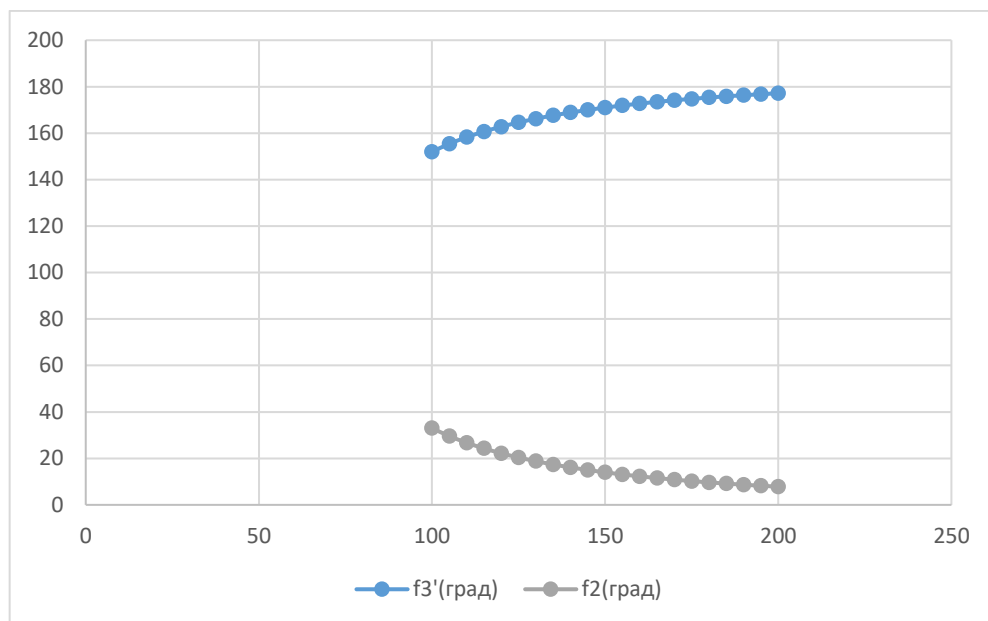
Таким образом мы получаем значения угла в радианах. Находим значение угла в градусах, аналогичным образом, как делали для Уравнения 1.

В данном случае разность π и $\arcsin$ не требуется, так как значения острого угла подчиняются нашим условиям ($0 < \phi_2 < \pi$). (Имена ячеек представлены для конкретного случая расчета ϕ_2).

Чтобы наглядно проследить зависимость ϕ_3 от d_3 и ϕ_2 от d_3 построим кривую на графике, где:

По оси x – значения d_3 , в мкм

По оси y – значения углов, в градусах



Синим цветом – график зависимости ϕ_3 от d_3 ,
Серым цветом – график зависимости ϕ_2 от d_3 .

Основываясь на переформулировку Правил Ру, в соответствии с Правилами Индексации, можем сделать вывод, что при изменении диаметра d_3 , ϕ_3 будет находиться в прямой зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_3 – увеличивается, при уменьшении d_3 , ϕ_3 – уменьшается. Так как углы ϕ_3 и Θ – смежные, то они находятся друг от друга в обратной зависимости: при увеличении ϕ_3 , Θ – уменьшается, при увеличении Θ , ϕ_3 – уменьшается. В свою очередь, угол Θ является составляющей угла ϕ_2 , а значит ϕ_2 находится в прямой зависимости от Θ : при увеличении Θ , ϕ_2 – увеличивается, при уменьшении – уменьшается.

По полученным данным можем проследить прямую зависимость ϕ_3 от d_3 ; это соответствует переформулировке Правил Ру с использованием Правил Индексации: чем больше значение d_3 , тем больше значение ϕ_3 .

А также можем заметить, что ϕ_2 находится в обратной зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_2 уменьшается, что аналогично переформулировке Правил Ру в соответствии с Правилами Индексации.

Уравнение 3

$$\varphi_3 = \arcsin\left(\frac{d_2^2}{d_3^2} \cdot \sin \varphi_1\right)$$

Для достоверной проверки с помощью данного уравнения должны соблюдаться следующие условия:

$$d_2 = \text{const} > 100 \mu$$

$$d_3 > 100 \mu$$

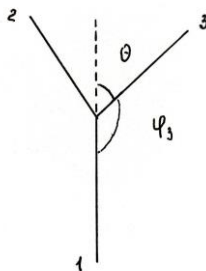
$$d_2 > d_3$$

$$\phi_1 = \text{const}, \pi/2 < \phi_1 < \pi$$

$$\pi/2 < \phi_3 < \pi$$

d2	d3	f1(град)	f3'(град)	f2'(град)	Θ(град)
200	100	175	159,5969	25,40311	20,40311
200	105	175	161,566	23,43396	18,43396
200	110	175	163,2547	21,74533	16,74533
200	115	175	164,7157	20,28432	15,28432
200	120	175	165,9895	19,01048	14,01048
200	125	175	167,1077	17,89228	12,89228
200	130	175	168,0952	16,90478	11,90478
200	135	175	168,972	16,02798	11,02798
200	140	175	169,7543	15,24565	10,24565
200	145	175	170,4555	14,5445	9,544498
200	150	175	171,0865	13,91352	8,913522
200	155	175	171,6564	13,34356	8,343557
200	160	175	172,1731	12,82691	7,826908
200	165	175	172,6429	12,35707	7,357069
200	170	175	173,0715	11,92851	6,928508
200	175	175	173,4635	11,5365	6,536496
200	180	175	173,823	11,17697	6,176966
200	185	175	174,1536	10,84641	5,846407
200	190	175	174,4582	10,54177	5,541774
200	195	175	174,7396	10,26041	5,260411
200	200	175	175	10	5

При расчетах $\arcsin$ мы получаем значения двух разных, дополняющих друг друга, углов, острого и тупого, в сумме дающих π . Значения острого угла соответствуют углу Θ , а значения тупого угла соответствуют искомому нами углу ϕ_3 .



В таблицу заносим известные нам значения $d_2(\mu)$, $d_3(\mu)$ и ϕ_1 (градусы), d_3 изменяется с шагом 5μ по формуле подобной формуле из расчетов по Уравнению 1.

Преобразовываем полученное нами уравнение в следующий вид:

$$f_x = \pi() - \text{ASIN}(R2^2 * \sin(T2/180 * \pi()) / S2^2)$$

где $R2 - d_2$; $T2 - \phi_1$; $S2 - d_3$.

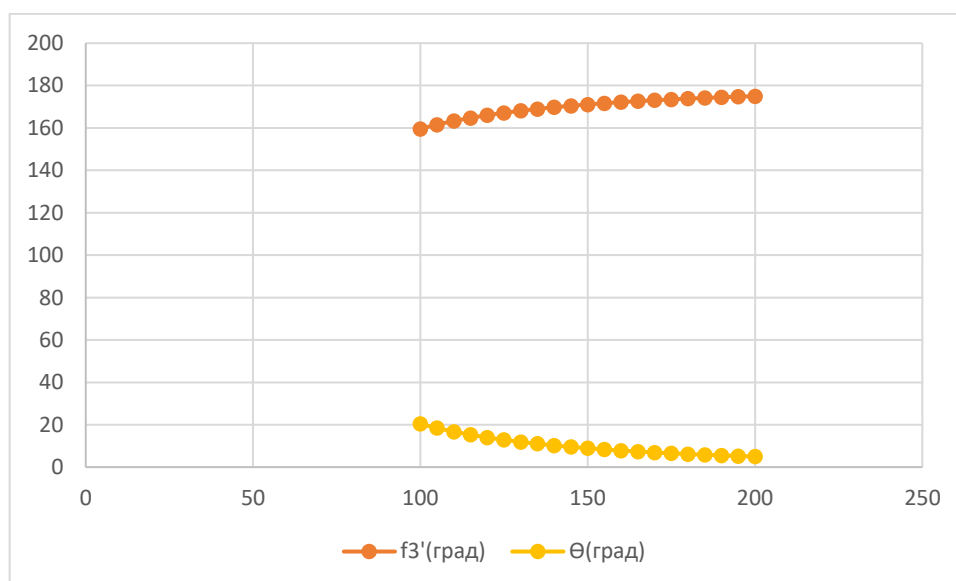
Таким образом мы получаем значения угла в радианах. Находим значения угла в градусах, аналогичным образом, как делали для Уравнения 1.

Разность π и $\arcsin$ проводится для нахождения $\arcsin$ тупого угла. Значения острого угла не подчиняются нашим условиям ($\pi/2 < \phi_3 < \pi$). (Имена ячеек представлены для конкретного случая расчета ϕ_3).

Чтобы наглядно проследить зависимость ϕ_3 от d_3 построим кривую на графике, где:

По оси x – значения d_3 , в мкм

По оси y – значения угла, в градусах



Оранжевым цветом – график зависимости ϕ_3 от d_3

Желтым цветом – график зависимости Θ от d_3

По полученным данным можем проследить прямую зависимость ϕ_3 от d_3 ; это соответствует переформулировке Правил Ру с использованием правил индексации: чем больше значение d_3 тем больше значение ϕ_3 . В свою очередь Θ находится в обратной зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , Θ уменьшается, что соответствует правилам Ру – при увеличении диаметра внутреннего

просвета ветви, угол под которым она отходит от направления материнского ствола уменьшается.

5.2.7.2. Проверка Правил Ру по уравнениям Мюррея

$$\cos \theta = \frac{r_0^4 + r_1^4 - r_2^4}{2r_0^2 r_1^2}, \quad (3.14)$$

$$\cos \varphi = \frac{r_0^4 + r_2^4 - r_1^4}{2r_0^2 r_2^2}, \quad (3.15)$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{r_0^4 - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2}. \quad (3.16)$$

Для проверки Правил Ру по уравнениям Мюррея, нам необходимо произвести преобразования этих уравнений в более удобный для нас вид, с учетом того, что преобразованные уравнения, должны быть тождественны изначальным уравнениям Мюррея. Для этого произведем замену значений:

$$r_1 = d_1/2, r_0 = d_1/2, r_1 = d_2/2, r_2 = d_3/2, \\ \Theta = \gamma, \Phi = \Theta, \Theta + \Phi = \Phi_2(\gamma + \Theta).$$

Получаем следующие уравнения:

$$\cos \gamma = \frac{\frac{d_1^4 + d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_2^2}{8}}$$

$$\cos \Theta = \frac{\frac{d_1^4 + d_3^4 - d_2^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_3^2}{8}}$$

$$\cos \varphi_2(\gamma + \theta) = \frac{\frac{d_1^4 - d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_2^2 d_3^2}{8}}$$

Для расчета и построения по расчетам графика нам необходимо выразить углы:

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\frac{d_1^4 + d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_2^2}{8}} \right)$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\frac{d_1^4 + d_3^4 - d_2^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_3^2}{8}} \right)$$

$$\varphi_2(\gamma + \theta) = \arccos \left(\frac{\frac{d_1^4 - d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_2^2 d_3^2}{8}} \right)$$

Произведем расчеты углов по полученным уравнениям.

Уравнение 3

$$\varphi_2(r+\theta) = a_1 \cos \left(\frac{\frac{d_1^4 - d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_2^2 d_3^2}{8}} \right)$$

Для достоверной проверки с помощью данного уравнения должны соблюдаться следующие условия:

$$d_1 = \text{const} > 100 \mu$$

$$d_2 = \text{const} > 100 \mu$$

$$d_3 > 100 \mu$$

$$d_1 > d_3$$

$$0 < \phi_2 < \pi$$

d_1	d_2	d_3	$f_2(\text{град})$
250	245	100	99,75
250	245	105	97,89
250	245	110	96,2
250	245	115	94,64
250	245	120	93,18
250	245	125	91,81
250	245	130	90,5
250	245	135	89,24
250	245	140	88,03
250	245	145	86,85
250	245	150	85,69
250	245	155	84,55
250	245	160	83,42
250	245	165	82,3
250	245	170	81,18
250	245	175	80,06
250	245	180	78,93
250	245	185	77,8
250	245	190	76,66
250	245	195	75,5
250	245	200	74,33

В таблицу заносим известные нам значения $d_1(\mu)$, $d_2(\mu)$, и $d_3(\mu)$; d_3 измеряется с шагом 5μ , по формуле подобной, формуле, писанной выше.

Преобразуем полученное нами уравнение в следующий вид:

$$f_x = \pi - \arccos\left(\frac{(A2^4 - B2^4 - C2^4)/16}{((B2^2 * C2^2)/8)}\right),$$

где $A2 - d_1$; $B2 - d_2$; $C2 - d_3$.

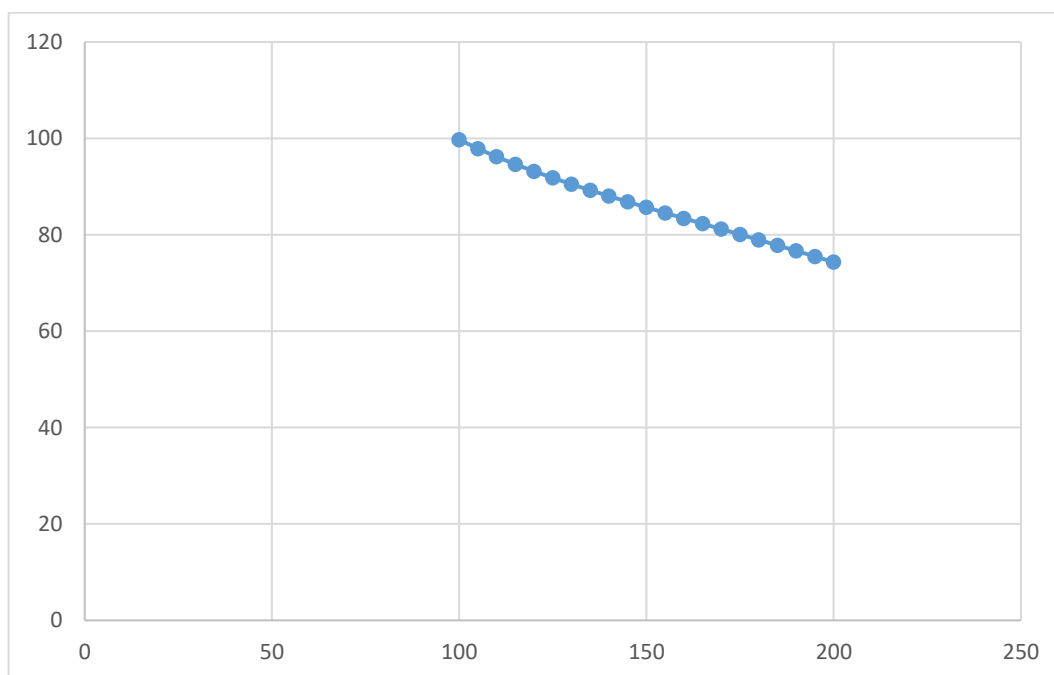
Таким образом мы получаем значения угла в радианах. Находим значения угла в градусах, аналогичным образом, как делали ранее.

Разность π и $\arccos$ проводится для нахождения $\arccos$ тупого угла. Значения острого угла не подчиняются нашим условиям ($0 < \phi_2 < \pi$). (Имена ячеек представлены для конкретного случая расчета ϕ_2).

Чтобы наглядно проследить зависимость ϕ_2 от d_3 построим кривую на графике, где:

По оси x – значения d_3 , в мкм

По оси y – значения ϕ_2 , в градусах



Основываясь на переформулировку Правил Ру, в соответствии с Правилами Индексации, можем сделать вывод, что при изменении диаметра d_3 , ϕ_3 будет находиться в прямой зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_3 – увеличивается, при уменьшении d_3 , ϕ_3 – уменьшается. Так как углы ϕ_3 и Θ – смежные, то они находятся друг от друга в обратной зависимости: при увеличении ϕ_3 , Θ – уменьшается, при увеличении Θ , ϕ_3 – уменьшается. В свою очередь, угол Θ является составляющей угла ϕ_2 , а значит ϕ_2 находится в

прямой находится в прямой зависимости от Θ : при увеличении Θ , ϕ_2 – увеличивается, при уменьшении – уменьшается.

По полученным данным можем заметить, что ϕ_2 находится в обратной зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_2 уменьшается, что соответствует переформулировке Правил Ру в соответствии с Правилами Индексации.

Уравнения 1 и 2

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\frac{d_1^4 + d_2^4 - d_3^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_2^2}{8}} \right)$$

$$\Theta = \arccos \left(\frac{\frac{d_1^4 + d_3^4 - d_2^4}{16}}{\frac{d_1^2 d_3^2}{8}} \right)$$

Для достоверной проверки с помощью данных уравнения должны соблюдаться следующие условия:

$$d_1 = \text{const} > 100\mu$$

$$d_2 = \text{const} > 100\mu$$

$$d_3 > 100\mu$$

$$d_1 > d_3$$

$$0 < \gamma < \phi_2, 0 < \Theta < \phi_2$$

$$\gamma + \Theta = \phi_2$$

d_1	d_2	d_3	$\Theta(\text{град})$	$\gamma(\text{град})$	$f_2(\gamma+\Theta)$
250	245	100	71,18	9,07	99,75
250	245	105	72,05	10,06	97,89
250	245	110	72,7	11,1	96,2
250	245	115	73,19	12,18	94,64
250	245	120	73,52	13,3	93,18
250	245	125	73,72	14,47	91,81
250	245	130	73,81	15,69	90,5
250	245	135	73,8	16,95	89,24
250	245	140	73,71	18,27	88,03
250	245	145	73,53	19,63	86,85
250	245	150	73,27	21,04	85,69
250	245	155	72,95	22,5	84,55
250	245	160	72,57	24,01	83,42
250	245	165	72,13	25,57	82,3
250	245	170	71,63	27,19	81,18
250	245	175	71,08	28,86	80,06
250	245	180	70,48	30,58	78,93
250	245	185	69,84	32,36	77,8
250	245	190	69,15	34,2	76,66
250	245	195	68,41	36,09	75,5
250	245	200	67,63	38,04	74,33

Для проверки последнего условия, построим график зависимости $\gamma+\Theta$ от d_3 и сравним с графиком зависимости ϕ_2 от d_3 из Уравнения 3.

В таблицу заносим известные нам значения $d_1(\mu)$, $d_2(\mu)$, и $d_3(\mu)$; d_3 измеряется с шагом 5μ , по формуле подобной, формуле, писанной выше.

Преобразуем полученные нами уравнения в следующий вид:

– для Уравнения 1

$$f_x = \text{ACOS}(((A2^4+B2^4-C2^4)/16)/((A2^2*B2^2)/8))$$

– для Уравнения 2

$$f_x = \text{ACOS}(((A2^4+C2^4-B2^4)/16)/((A2^2*C2^2)/8))$$

Таким образом мы получаем значения углов в радианах. Находим значения углов в градусах, аналогичным образом, как делали ранее.

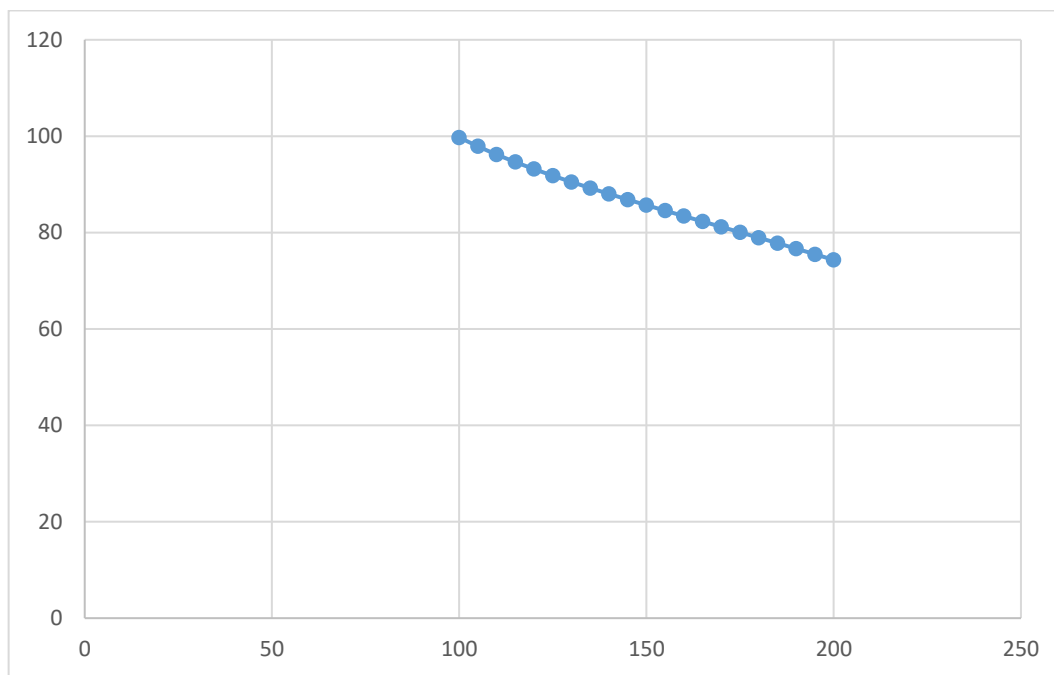
Разность π и $\arccos$ не требуется, так как значения острого угла подчиняются нашим условиям ($0 < \gamma < \phi_2$, $0 < \Theta < \phi_2$, $\gamma+\Theta = \phi_2$, $0 < \phi_2 < \pi$).

Значения угла ϕ_2 находим с помощью команды суммы значений параметров двух углов γ и Θ . (Имена ячеек представлены для конкретного случая расчета γ , Θ , ϕ_2).

Чтобы наглядно проследить зависимость $\gamma+\Theta$ от d_3 построим кривую на графике, где:

По оси x – значения d_3 , в мкм

По оси y – значения $\gamma+\Theta$, в градусах



Основываясь на переформулировку Правил Ру, в соответствии с Правилами Индексации, можем сделать вывод, что при изменении диаметра d_3 , ϕ_3 будет находиться в прямой зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , ϕ_3 – увеличивается, при уменьшении d_3 , ϕ_3 – уменьшается. Так как углы ϕ_3 и Θ – смежные, то они находятся друг от друга в обратной зависимости: при увеличении ϕ_3 , Θ – уменьшается, при увеличении Θ , ϕ_3 – уменьшается. В свою очередь, угол Θ является составляющей угла ϕ_2 , а значит ϕ_2 находится в прямой зависимости от Θ : при увеличении Θ , ϕ_2 – увеличивается, при уменьшении – уменьшается.

По полученным данным можем заметить, что $\gamma+\Theta$ находится в обратной зависимости от d_3 : при увеличении d_3 , $\gamma+\Theta$ уменьшается, что соответствует переформулировке Правил Ру в соответствии с Правилами Индексации; также можно заметить, что кривая тождественная кривой, полученной при расчетах Уравнения 3.

6. Обсуждение результатов, заключение, выводы

В ходе математической проверки была подтверждена правильность системы уравнений универсальной математической модели [8], а также справедливость гипотезы об отсутствии влияния направления тока крови в микрососудистых узлах на «схождение».

По результатам математического анализа Правил Ру было выявлено, что:

А) При решении уравнений универсальной математической модели [8] получили следующие выводы:

– при увеличении d_3 , значение ϕ_1 уменьшается (при соблюдении следующих условий: $d_1 = \text{const} > 100\mu$, $d_3 > 100\mu$, $d_1 > d_3$, $\phi_2 = \text{const}$, $0 < \phi_2 < \pi$, $\pi/2 < \phi_1 < \pi$)

– при увеличении d_3 , значение ϕ_2 уменьшается (при соблюдении следующих условий: $d_1 = \text{const} > 100\mu$, $d_3 > 100\mu$, $d_1 > d_3$, $\phi_1 = \text{const}$, $0 < \phi_2 < \pi$, $\pi/2 < \phi_1 < \pi$)

– при увеличении d_3 , значение ϕ_3 увеличивается (при соблюдении следующих условий: $d_2 = \text{const} > 100\mu$, $d_3 > 100\mu$, $d_2 > d_3$, $\phi_1 = \text{const}$, $\pi/2 < \phi_1 < \pi$, $\pi/2 < \phi_3 < \pi$)

Данные выводы тождественны смыслу Правил Ру.

Б) при решении уравнений Мюррея получили следующие выводы:

– при увеличении d_3 , значение ϕ_2 уменьшается (при соблюдении следующих условий: $d_1 = \text{const} > 100\mu$, $d_2 = \text{const} > 100\mu$, $d_3 > 100\mu$, $d_1 > d_3$, $d_2 > d_3$, $0 < \phi_2 < \pi$)

– при увеличении d_3 , значения γ и Θ уменьшаются таким образом, что сумма этих двух углов тождественна значению ϕ_2 при данном значении d_3 при соблюдении следующих условий: $d_1 = \text{const} > 100\mu$, $d_2 = \text{const} > 100\mu$, $d_3 > 100\mu$, $d_1 > d_3$, $d_2 > d_3$, $0 < \gamma < \phi_2$, $0 < \Theta < \phi_2$, $0 < \phi_2 < \pi$).

Данные выводы тождественны смыслу выводов, сделанных по результатам расчетов уравнений универсальной математической модели [8], а также смыслу Правил Ру.

Таким образом мы подтвердили правдивость Правил Ру, путем проверки математическими расчетами двух различных систем уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roux W. Ueber die Verzweigungen der Blutgefasse. Eine. morphologische Studie. // Z. Naturwissenschaft. – 1878. – Bd.12. – S. 205-266.
2. Roux W. Die Bedeutung der Ablenkung des Arterien Systemes bei der Astabgabe. // Z. Naturwissenschaft. – 1879. – Bd. 13. – N2. – S. 321-338.
3. Murray C.D. The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood volume. //Proc. N. A. S. – 1926. – Vol. 12. – P. 207-214.
4. Cohn D. L. Optimal systems: I. The vascular system. //The bulletin of Mathematical Biophysics. – Illinois: The university of Chicago Press. – 1954.

- Vol.16. – P. 59-74. [Committee on Mathematical Biology the University of Chicago].
5. Cohn D. L. Optimal systems: II. The vascular system //The bulletin of Mathematical Biophysics. – Illinois: The university of Chicago Press. – 1955. – Vol.17.-P.219-227. [Committee on Mathematical Biology the University of Chicago].
6. Розен Р. [Rosen R. Optimality principles in biology. – Committee on Mathematical Biology. The University of Chicago. – London: Butterworths, 1967.] ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ В БИОЛОГИИ. – М.: Муп, 1969. – С. 11,44-49, 54-73.
7. Мамисашвили В. А., Бабунашвилт М. К., Мchedlishvili Г. И. Критерий оптимального функционирования подсистем крупных и мелких пиальных артерий. // Физиологический журнал СССР им И.М. Сеченова. – 1975. – Т.61. – N.10. – С. 1501-1506. [Лаборатория физиологии и патологии мозгового кровообращения, Институт физиологии АН Грузинской ССР, Тбилиси]
8. Глотов В. А. Структурный анализ микрососудистых бифуркаций (микрососудистый узел и гемодинамический фактор): монография / В. А. Глотов; Смоленская медицинская академия. – Смоленск. 1995. – С. 62-81.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE CONFIGURATION OF THE
INTERNAL LUMEN AND TOPOLOGY OF CIRCULATORY
MICROVASCULAR NETWORKS AND THE PHENOMENON OF
PSEUDOFUIDITY OF BLOOD IN THE ULTIMATE SENSE MESSAGE I.
ANALYTICAL VERIFICATION OF THE RU RULES (W. ROUX)**

Parfenova V. S.

The scientific supervisor is V. A. Glotov, MD, Professor, Head of the Department of Human Anatomy at the Smolensk State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation

According to what principles exactly the branching and proliferation of blood vessel networks occurs is an important question for understanding the way the circulatory system of any living being functions and develops. The German scientist Wilhelm Roux highlighted this topic in his dissertation, describing the relationship between the angle and diameter of branching blood vessels, and also outlined a list of rules according to which blood vessels branch in relation to the parameters of the diameters of the internal lumen of the vessels and the angles between the axes of these vessels. Using the equations derived by Murray, as well as the universal system of equations (Glotov V. A.), we can use mathematical analysis to verify the truth of the Rules of the Roux.

Key words: Roux rules, Wilhelm Roux, W. Roux, blood vascular networks.

Об авторе

Парфёнова Вероника Сергеевна, студентка 1-го курса
стоматологического факультета ФГБОУ ВО «Смоленский государственный
медицинский университет» Минздрава России (hhakashii@gmail.com).

Научный студенческий анатомический кружок имени П. Ф. Лесгафта
Кафедра анатомии человека
ФГБОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет»
Минздрава России.
Поступила в редакцию 24.04.2025.