Министерство науки и высшего образования РФ
Смоленский государственный университет

Системы компьютерной математики и их приложения

Материалы XXIII Международной научной конференции

Выпуск 23

Смоленск
Издательство СмолГУ
2022

УДК 621.396.218
ББК 32.97
С 409

Печатается по решению редакционно-издательского совета СмолГУ

С 409 **Системы компьютерной математики и их приложения:** материалы XXIII Международной научной конференции. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2022. Вып. 23. 416 с.

ISBN 978-5-88018-445-3, *продолжающееся издание*

В сборнике публикуются тексты научных докладов и сообщений, представленных на XXIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения», проходившей 27–28 мая 2022 года в г. Смоленске на базе физико-математического факультета Смоленского государственного университета. В работе конференции приняли участие научные работники и преподаватели вузов ряда стран СНГ и Прибалтики.

В материалах сборника рассматриваются вопросы применения систем компьютерной математики и их приложений в различных областях науки и техники, в математическом, техническом и гуманитарном образовании.

Сборник рекомендуется научным работникам, преподавателям вузов, аспирантам и студентам старших курсов университетов.

УДК 621.396.218
ББК 32.97

ISBN 978-5-88018-445-3,
продолжающееся издание

Литература

1. Базылев Вячеслав Тимофеевич. Ученый, учитель и друг. К 100-летию со дня рождения / сост. Н.И. Гусева. М.: Интеллект-Центр, 2019. 624 с.
2. Атанасян Левон Сергеевич: воспоминания к 100-летию со дня рождения / под ред. Н.С. Денисовой. М.: МПГУ. 2021. 128 с.

M.B. Banaru, G.A. Banaru
Smolensk State University

BAZYLEV AND ATANASIAN

Keywords: *geometry, mathematics, history of mathematics.*

Abstract. *The main achievements of two outstanding geometers professors V.T. Bazylev and L.S. Atanasian (Soviet Union / Russian Federation) are presented.*

В.В. Борисов, И.М. Прудников
Филиал Национального исследовательского университета «МЭИ» в г. Смоленске
Смоленский государственный медицинский университет

УДК 519.6-519.83-519.86

ФОРМУЛА ДЛЯ УГЛОВ МИКРОВАСКУЛЯРНОГО УЗЛА

Ключевые слова: *уравнения Муррея, правила бифуркации капиллярных сетей, принцип оптимальности для микрососудистых узлов.*

Получена формула, связывающая углы отклонений сосудов в узле микрососудистой сети, проведена оптимизация этого уравнения на компьютере, использовав математический пакет MATCAD, а также алгоритмический язык Python. В итоге дана графическая зависимость между собой углов отклонений в микрососудистом узле, построены графики зависимостей. Отмечено важное практическое применение графиков и уравнений. Это, в первую очередь, построение искусственных капиллярных сетей, а также построение разветвленных трубопроводных сетей для оптимальной, в смысле затраты энергии, перекачки нефти, газа и любой жидкости.

1. Постановка задачи. Впервые узел микрососудистой сети математически описал С.Д. Муррей в своей ставшей уже классической, работе [1]. Формулы он получил исходя из принципа наименьшего действия, хорошо известного в механике. Фактически этот принцип основан на наименьшей затрате энергии крови при ее движении в капиллярной сети. После знаменитой работы С.Д. Муррея появилось огромное количество работ, посвященных анализу уравнений и их физической трактовке (см., например, [2; 3]). Так, в работе [3] были введены кванты крови и показано, что уравнения С.Д. Муррея следуют из закона сохранения импульса кванта крови при его делении на подкванты в узле капиллярной сети. Надо учесть, что сами уравнения С.Д. Муррея были получены для ламинарного движения крови в сосуде диаметром более 100 мкм. В сосудах диаметром менее 100 мкм возникает турбулентность (завихрение), проявляются вязкие свойства крови. Поэтому уравнения С.Д. Муррея требуют модификации, а именно: введения коэффициента вязкости, что и было сделано в работе [3].

Авторы поставили перед собой задачу дальнейшего анализа уравнений С.Д. Муррея, оптимизацию их решения, а также анализ результатов на компьютере с привлечением обширного математического аппарата. Надо отметить, что сами уравнения, записанные ниже, линейно зависимые. Поэтому для их решения надо использовать еще одно уравнение, основанное на другом физическом законе, а именно: на законе сохранения потока жидкости в микрососудистом узле. Сохраняя два уравнения в системе уравнений С.Д. Муррея и добавляя новое, мы получим систему трех независимых уравнений. Дальнейшая задача – это решить полученную систему уравнений и вывести зависимость для углов отклонений сосудов в узле капиллярной сети, что и было сделано. С помощью оптимизационных методов с использованием штрафных функций с различными начальными точками получен массив данных, по которому построено графическое решение уравнения. Из графиков видно, что углы отклонений зависят друг от друга согласно полученной криволинейной зависимости, график которой приведен: задавая один угол, мы получаем другой угол (углы).

2. Решение задачи. Пусть x и y – углы отклонений (разветвлений) капиллярных сосудов в узле, как это изображено на рисунке 1.

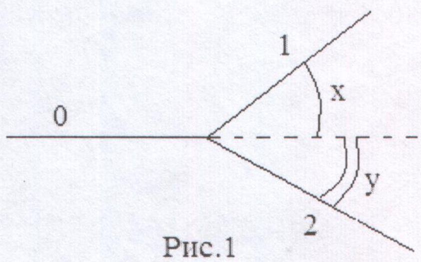

Рис.1

Пусть также r_0, r_1, r_2 – радиусы капиллярных сосудов 0, 1, 2 соответственно. Тогда уравнения Муррея для сосудов 0, 1, 2, изображенных на рисунке 1, записываются в виде

$$\begin{cases} r_0^2 = (\cos x) r_1^2 + (\cos y) r_2^2, \\ r_1^2 = (-\cos(x+y)) r_2^2 + (\cos x) r_0^2, \\ r_2^2 = -\cos(x+y) r_1^2 + (\cos y) r_0^2. \end{cases}$$

Покажем, что данная система линейно зависимая, если ее рассматривать как систему относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2. Подставим r_0^2 во вторую и третью формулы, приведем подобные. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (\sin^2 x) r_1^2 - (\sin x)(\sin y) r_2^2 = 0, \\ -(\sin x)(\sin y) r_1^2 + (\sin^2 y) r_2^2 = 0, \end{cases}$$

которая линейно зависимая, так как определитель этой системы равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin^2 x & -(\sin x)(\sin y) \\ -(\sin x)(\sin y) & \sin^2 y \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому вместо первого уравнения запишем уравнение непрерывности потока [1], из которого следует равенство для кубов: $r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$. Это равенство для объемов квантов крови в точке разветвления сосуда. Впервые термин «квант» крови был введен в [3]. Получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} r_0^3 = r_1^3 + r_2^3, \\ r_1^2 = (-\cos(x+y)) r_2^2 + (\cos x) r_0^2, \\ r_2^2 = -\cos(x+y) r_1^2 + (\cos y) r_0^2 \end{cases}$$

относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2.

В результате преобразований получаем уравнение относительно углов x, y.

$$1 - \left(\frac{\cos x - \cos(x+y)\cos y}{\sin^2(x+y)} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\cos y - \cos(x+y)\cos x}{\sin^2(x+y)} \right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

следствием которого является уравнение

$$\sin^{\frac{3}{2}}(x+y) = \sin^{\frac{3}{2}}(y) + \sin^{\frac{3}{2}}(x). \tag{1}$$

Уравнение (1) может быть переписано с использованием углов между сосудами. Обозначим углы между сосудами 0-1, 1-2, 0-2 соответственно через u, v, w. Тогда связь между углами u, v, w и углами x, y имеет вид

$$u = \pi - x, w = \pi - y, v = x + y.$$

Так как $\sin(x) = \sin(\pi - u) = \sin u, \sin(y) = \sin(\pi - w) = \sin w, x + y = v,$ то уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\sin^{\frac{3}{2}}(v) = \sin^{\frac{3}{2}}(w) + \sin^{\frac{3}{2}}(u).$$

На электронной вычислительной машине было промоделировано решение этого уравнения на языке *Python*. Для различных начальных значений x было получено решение $y(x)$. Получен большой массив данных, по которому построен график решения (см. рис. 2 и 3).

Построим поверхность

$$z(x,y)=\sin^{\frac{3}{2}}(x+y)-\sin^{\frac{3}{2}}(y)-\sin^{\frac{3}{2}}(x).$$

Найдем ее сечение плоскостью, параллельной $X0Y$ на уровне $z(x,y)=0$.

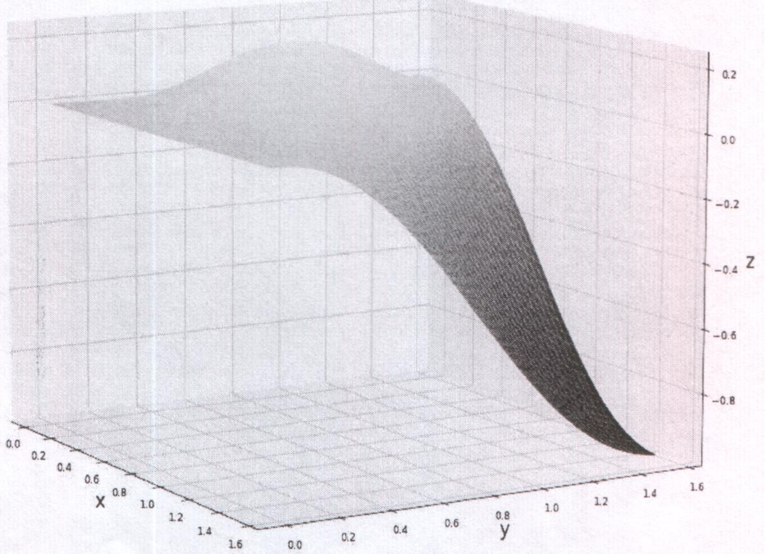

Рис. 2. Поверхность: $z=z(x,y)$ при $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $y\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

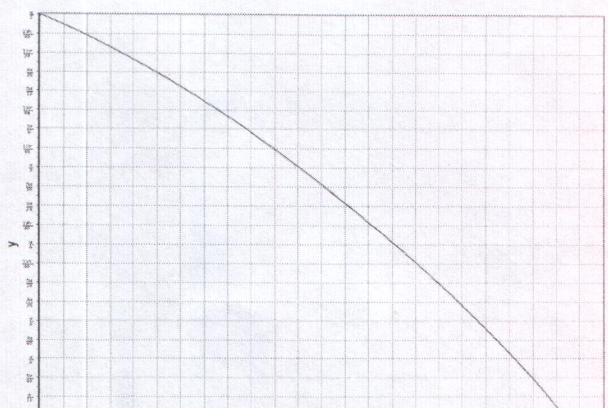

Рис. 3. График зависимости решения уравнения $y=y(x)$

3. Обсуждение результатов исследования. Получение зависимости углов отклонений путем решения линейно независимой системы уравнений, состоящей из двух уравнений Муррея и одного уравнения непрерывности потока крови, является новым результатом в математической морфологии. Решение полученного уравнения на компьютере важно для практического применения. Это решение дает нам возможность понять, как устроена наша капиллярная сеть для ее 3D модели.

Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами. Полученные уравнения важны для оптимального в смысле затраты энергии построения сети трубопроводов для перекачки нефти, газа и любой жидкости. Дальнейшая задача – это экспериментальная проверка уравнения Муррея.

Литература

1. Murray C.D. The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries // J. of General Physiology. 1926. Vol. 9. № 6. P. 835–841.

2. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. М.: Мир, 1969. 215 с.

3. Глотов В.А. Правила Ру и конфигурации микрососудистых бифуркаций // Биофизика. 1992. Т.37. Вып.2. С. 341–344.

V.V. Borisov, I.M. Prudnikov
Branch of the National Research University
«Moscow Power Engineering Institute» in Smolensk,
Smolensk State Medical University

FORMULA FOR ANGLES OF A MICROVASCULAR NODE

Keywords: *the Murray equations, the rules for bifurcation of capillary networks, the principle of optimality for microvascular nodes.*

Abstract. *The main aim of this paper is to analyze further the equations by S.D.Murray, optimization of their solution in order to obtain an analytical and graphical relationship between the angular deviation of vessels of a microvascular node and analysis of the results on a computer, using the apparatus of penalty functions and MATCAD mathematical packages, as well as the Python algorithmic language. As a result, a graphical relationship between the angles of deviations in the microvascular node is given, and graphs of dependencies are plotted. Also, an important practical application of graphs and equations is noted. This is, first of all, the construction of artificial capillary networks, as well as the construction of branched pipeline networks for optimal, in terms of energy consumption, pumping oil, gas and any liquid.*