Математическая морфология.
Электронный математический и медико-биологический журнал.
Том 24. Вып. 2. 2025.

http://mbiomorph67.ru/N-86-html/cont.htm
http://mbiomorph67.ru/N-86-html/TITL-86.htm
http://mbiomorph67.ru/

http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-86-html/cont.htm
http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/N-86-html/TITL-86.htm
http://sgma.alpha-design.ru/MMORPH/TITL.HTM

УДК 519.6-519.83-519.86

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА УГЛОВ МИКРОВАСКУЛЯРНОГО УЗЛА

© 2025 г. Прудников И. М[1]., Борисов В. В.[2]

Цель. Анализ уравнений С. Д. Муррея, получение аналитической и графической зависимости между собой углов отклонений сосудов в микрососудистом узле.

Методика. Решается система уравнений Муррея, описывающая микрососудистый узел кровеносной системы человека или животного. С помощью аппарата линейной алгебры доказана линейная зависимость системы уравнений Муррея. Поэтому одно уравнение системы уравнений заменили на уравнение неразрывности потока крови. Решением новой системы уравнений является уравнение для углов микроваскулярного узла, ранее не встречавшееся в литературе. Уравнение решается с помощью математических пакетов MATCAD и алгоритмического языка Python.

Результаты. Получено уравнение для углов отклонений друг от друга сосудов в узле микрососудистой кровеносной сети человека или животного. Уравнение решено на компьютере, использовав математический пакет MATCAD, а также алгоритмический язык Python. В итоге дана графическая зависимость между собой углов отклонений сосудов в микрососудистом узле кровеносной системы, построен график зависимости одного угла от другого. Приведены трехмерные графики функций, описывающих зависимость углов отклонений сосудов друг от друга в узле кровеносной системы.

Заключение. Выведенное уравнение для углов отклонений друг от друга сосудов в узле кровеносной системы имеет практическое применение при построении искусственных капиллярных сетей, а также разветвленных трубопроводных сетей для оптимальной, в смысле затрата энергии, перекачки нефти, газа и любой жидкости. Полученное уравнение может быть использовано для экспериментальной проверки уравнений Муррея.

***Ключевые слова**: уравнения Муррея, правила бифуркации капиллярных сетей, принцип оптимальности для микрососудистых узлов.*

Введение

Впервые узел микрососудистой сети математически описал С. Д. Муррей в своей, ставшей уже классической, работе [4]. Формулы он получил, исходя из принципа наименьшего действия, хорошо известного в механике. Фактически этот принцип основан на наименьшей затрате энергии крови при ее движении в капиллярной сети. После знаменитой работы С. Д. Муррея появилось огромное количество работ, посвященных анализу уравнений и их физической трактовке [2-6]. Так в работе [1] были введены кванты крови и показано, что уравнений С. Д. Муррея следуют из закона сохранения импульса кванта крови при его делении на подкванты в узле капиллярной сети. Надо учесть, что сами уравнения С. Д. Муррея были получены для ламинарного движения крови в сосуде диаметром более 100 мкм, так как в этом случае вязкость жидкости не учитывается. В сосудах диаметром менее 100 мкм возникает турбулентность (завихрение), проявляются вязкие свойства крови. Поэтому уравнения С. Д. Муррея требуют модификации, а именно: введения коэффициента вязкости, что и было сделано в работе [1].

Авторы поставили перед собой задачу дальнейшего анализа уравнений С. Д. Муррея, оптимизация их решения, а также анализ результатов на компьютере с привлечением обширного математического аппарата. Надо отметить, что сами уравнения, записанные ниже, линейно зависимые, что показано. Поэтому для их решения надо использовать еще одно уравнение, основанное на другом физическом законе, а именно: на законе сохранения потока жидкости в микрососудистом узле. Сохраняя два уравнения в системе уравнений С. Д. Муррея и добавляя новое, мы получим систему трех независимых уравнений. Дальнейшая задача – это решить полученную систему уравнений и вывести зависимость для углов отклонений сосудов в узле капиллярной сети, что и было сделано. С помощью оптимизационных методов с использованием штрафных функций с различными начальными точками получен массив данных, по которому построено графическое решение уравнения. Из графиков видно, что углы отклонений зависят друг от друга согласно полученной криволинейной зависимости, график которой приведен: задавая один угол, мы получает другой угол (углы).

Методика

Различные исследователи по-разному изучают систему уравнений Муррея. Так в [1] вместо радиусов сосудов автор использует диаметры сосудов и вводит углы между сосудами, а не углы отклонений, как это написано ниже, а сами уравнения трактует как закон сохранения импульса для квантов крови. В работе используются обозначения из [4].

Пусть x и y – углы отклонений (разветвлений) капиллярных сосудов в узле, как это изображено на рис. 1.

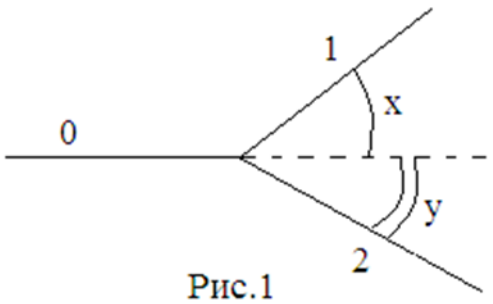

Рис.1

Микрососудистый узел кровеносной системы с углами отклонений x и y.

Пусть также r_0, r_1, r_2 – радиусы капиллярных сосудов 0,1,2 соответственно. Тогда уравнения Муррея для сосудов 0,1,2, изображенных на рисунке 1, записываются в виде [4]

$$\begin{cases} {r_0}^2 & = & (cosx)r_1^2 + (cosy)r_2^2 \\ r_1^2 & = & (-\cos(x+y))r_2^2 + (cosx)r_0^2 \\ r_2^2 & = & -\cos(x+y)\, r_1^2 + (cosy)r_0^2 \end{cases}$$

Покажем, что данная система линейно зависимая, если ее рассматривать как систему относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2. Подставим r^2_0 во вторую и третью формулы, приведем подобные. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (sin^2x)r_1^2 - (\mathrm{sinx})(\mathrm{siny})\, r_2^2 = 0 \\ -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny})r_1^2 + (sin^2y)r_2^2 = 0 \end{cases}$$

которая линейно зависимая, так как определитель этой системы равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} sin^2x & -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny}) \\ -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny}) & sin^2y \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому вместо первого уравнения запишем уравнение непрерывности потока [4], из которого следует равенство для кубов:

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3.$$

Это равенство для объемов квантов крови в точке разветвления сосудах. Впервые термин «квант» крови был введен в [3]. Получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} {r_0}^3 & = & r_1^3 + r_2^3 \\ r_1^2 & = & (-\cos(x+y))r_2^2 + (cosx)r_0^2 \\ r_2^2 & = & -\cos(x+y)\, r_1^2 + (cosy)r_0^2 \end{cases}$$

относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2.

В результате преобразований получаем уравнение относительно углов x, y.

$$1-\left(\frac{cosx-\cos(x+y)\,cosy}{sin^2(x+y)}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{cosy-\cos(x+y)\,cosx}{sin^2(x+y)}\right)^{\frac{3}{2}}=0,$$

следствием которого является уравнение

$$sin^{1.5}(x+y)=sin^{1.5}(y)+sin^{1.5}(x). \qquad (1)$$

На электронной вычислительной машине было промоделировано решение этого уравнения на языке Python. Для различных начальных значений x через y(x) обозначим решение написанного выше уравнения, т.е.

$$sin^{1.5}(x+y(x))=sin^{1.5}(y(x))+sin^{1.5}(x).$$

Получен большой массив данных, по которому построен график решения, приведенный ниже. Построим поверхность

$$z(x,y)=sin^{1.5}(x+y)-sin^{1.5}(y)-sin^{1.5}(x)$$

и найдем ее сечение плоскостью, параллельной X0Y на уровне z (x, y) = 0.

1) При $x\ \in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right], y\ \in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ получен график поверхности z=z(x,y).

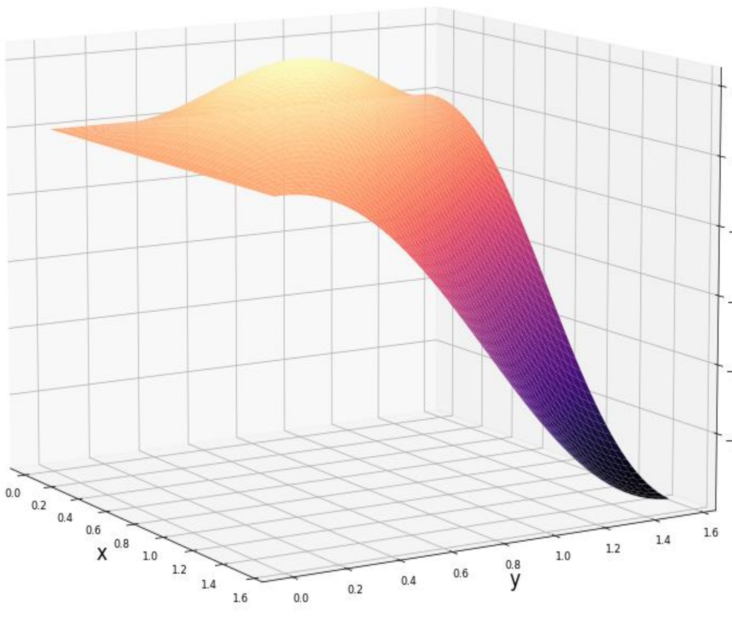

График 1. График поверхности z=z (x, y) для $x\ \in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right], y\ \in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

График 2. График решения y=y(x) уравнения $sin^{1.5}(x+y) - sin^{1.5}(y) - sin^{1.5}(x) = 0$.

2) При $x \in [0;\ 2\pi], y \in [0; 2\pi]$ поверхность: z=z (x, y) имеет следующий график

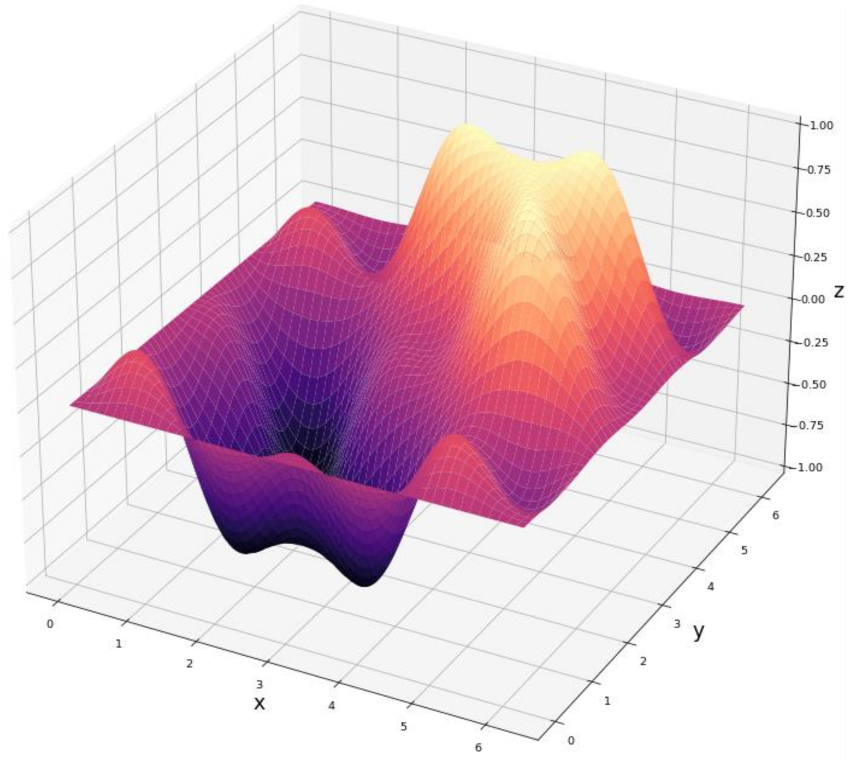

График 3. График функции z=z (x, y) для $x \in [0;\ 2\pi], y \in [0; 2\pi]$.

Уравнение (1) может быть переписано, используя углы между сосудами.

Обозначим углы между сосудами 0-1, 1-2, 0-2 через u, v, w соответственно. Тогда соотношение между углами u, v, w и углами x, y следующее

$$u = \pi - x,\ w = \pi - y,\ v = x + y.$$

Поскольку

$$\sin(x) = \sin(\pi - u) = \sin u,\ \sin(y) = \sin(\pi - w) = \sin w,\ x + y = v,$$

то уравнение (1) может быть переписано в виде

$$sin^{1.5}(v) = sin^{1.5}(w) + sin^{1.5}(u).$$

Обсуждение результатов исследования

Изучением системы уравнений Муррея занимаются многие исследователи [1-7]. Эта система интересна тем, что она описывает морфологию кровеносной системы человека и любого животного. Система уравнений Муррея линейно зависима. Была получена линейно независимая система уравнений, связывающая радиусы кровеносных сосудов и углы отклонений сосудов в узле кровеносной системы. Решением уравнений является уравнение для углов отклонений сосудов в узле кровеносной системы. Аналитически решить полученное уравнение не удается, поэтому применялось графическое решение на компьютере с помощью математических пакетов и алгоритмического языка Python.

Решение полученного уравнения на компьютере важно для практического применения. Это решение дает нам возможность понять, как устроена наша капиллярная сеть для ее 3D модели. Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей in vitro в пространстве организованных микропотоков питательной среды и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами, которые создаются в рамках проводимых проектов.

Полученные уравнения важны для оптимального построения сети трубопроводов для перекачки нефти, газа и любой жидкости. Сети трубопроводов, построенных на основе полученных уравнения, будут оптимальными в смысле затрата энергии.

Дальнейшая задача – это экспериментальная проверка полученного уравнения, применяя статистическую обработку с проверкой на достоверность полученных результатов. Экспериментальная проверка полученного уравнения проще, чем системы из трех уравнений Муррея, так как оно одно и в него не входят радиусы сосудов кровеносной системы.

Выводы

1. Применение полученного уравнения для углов между сосудами в узле кровеносной системы позволяет построить ее трехмерную модель, что важно для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей.
2. Необходимо использовать полученное уравнение в технике при прокладке трубопроводных и водопроводных сетей для перекачки нефти, газа и любой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Глотов В. А. Правила Ру и конфигурации микрососудистых бифуркаций // Биофизика. Т.37. Вып.2. 1992. С. 341-344. [Glotov V.A. Pravila Ru i konfiguratsii mikrososudistykh bifurkatsiy // Biofizika. T.37. №.2. 1992. S. 341-344. (in Russian)]
2. Cohn D. L On optimal system: I. The vascular system. Bulletin of Mathematical Biophysics. Vol. 16, 1954, P. 59-74.
3. Cohn D. L On optimal system: II. The vascular system. Bulletin of Mathematical Biophysics. Vol. 17, 1955, P. 219-227.
4. Murray C. D. The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries // J. of General Physiology. Vol. 9. №6. 1926. P.835-841.
5. Murray C. D. The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood volume. Physiology. Vol. 12, 1926, P. 207-213.
6. Murray C. D. The physiological principle of minimum work. II. Oxygen exchange in capillaries. Physiology. Vol. 12, 1926, P. 299-304.
7. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. Из-во «Мир», Москва, 1969. 215 с. [R. Rozen. Printsip optimal'nosti v biologii. Iz-vo «Mir», Moskva, 1969. 215 s. (in Rusian)]

FORMULA FOR CALCULATION THE ANGLES OF A MICROVASCULAR NODE

Prudnikov I. M.[1], Borisov V. V.[2]

Objective. Analysis of the Murray’s equations, obtaining an analytical and graphic relationship between the angles of deviations of the vessels in a microvascular node.

Methods. The system of the Murray's equations is solved, which describes a microvascular node of the human's or animal's circulatory system. Using the apparatus of linear algebra, the linear dependence of the system of the Murray's equations is proved. Therefore, one equation of the system of the equations was replaced by the equation of continuity of blood flow. The solution of the new system of equations is the equation for the angles of a microvascular node, which has not previously been found in the literature. The equation is solved using the mathematical packages MATCAD and the algorithmic language Python.

Results. An equation for the angles of deviations from each other of the vessels in a node of the microvascular circulatory system of a person or an animal is obtained. The equation was solved on a computer using the mathematical package MATCAD, as well as the algorithmic language Python. As a result, the graphical relationship between the angles of deviations of the vessels in a microvascular node of the circulatory system is given, a graph of the dependence of one angle on another is plotted. The three-dimensional graphs of functions describing the dependence of the angles of deviations of the vessels from each other in a node of the circulatory system are presented.

Conclusion. The obtained equation for the angles of deviation from each other of the vessels in a node of the circulation system has practical application in the construction of artificial capillary networks, as well as pipeline networks for the optimal, from the point of view of energy consumption, pumping of oil, gas and any liquid. The obtained equation can be used for experimental testing of the Murray's equations.

Key words: the Murray's equations, the rules for bifurcation of capillary networks, the principle of optimality for microvascular nodes.

[1]Смоленский государственный медицинский университет, 214019, Россия, Смоленск, ул. Крупской, 28.
[2]Филиал НИУ МЭИ ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ» в г. Смоленске, 214013, Россия, Смоленск, Энергетический проезд,1.

[1]Smolensk State Medical University, 28, Krupskoj St., 214019, Russia, Smolensk,
[2]Branch of «National Research University of Moscow Energy Institute" in Smolensk, 214013, Russia, Smolensk, Energetichesky driveway, 1

Информация об авторах

Прудников Игорь Михайлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательского центра ФГБОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет» Минздрава России. E-mail: prudnik09@yandex.ru

Борисов Вадим Владимирович – доктор техн. наук, профессор кафедры вычислительной техники, действительный член Академии военных наук, президент Российской ассоциации искусственного интеллекта. Филиал НИУ МЭИ ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ» в г. Смоленске, E-mail: vbor67@mail.ru

Кафедра анатомии человека
Научно-исследовательский центр
ФГБОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет»
Минздрава России.
Кафедра вычислительной техники
Филиал НИУ МЭИ ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ» в г. Смоленске
Поступила в редакцию 14.04.2025.